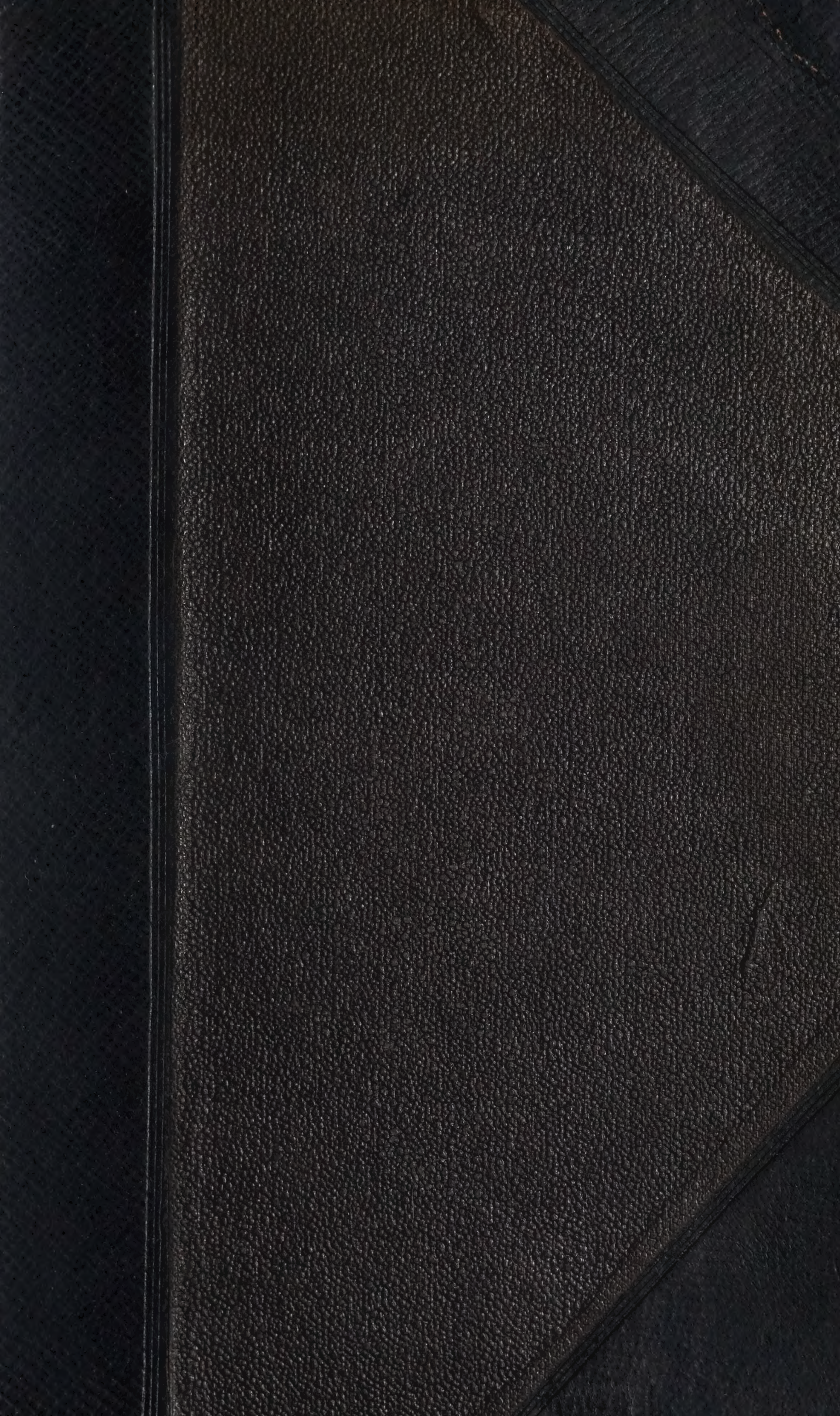
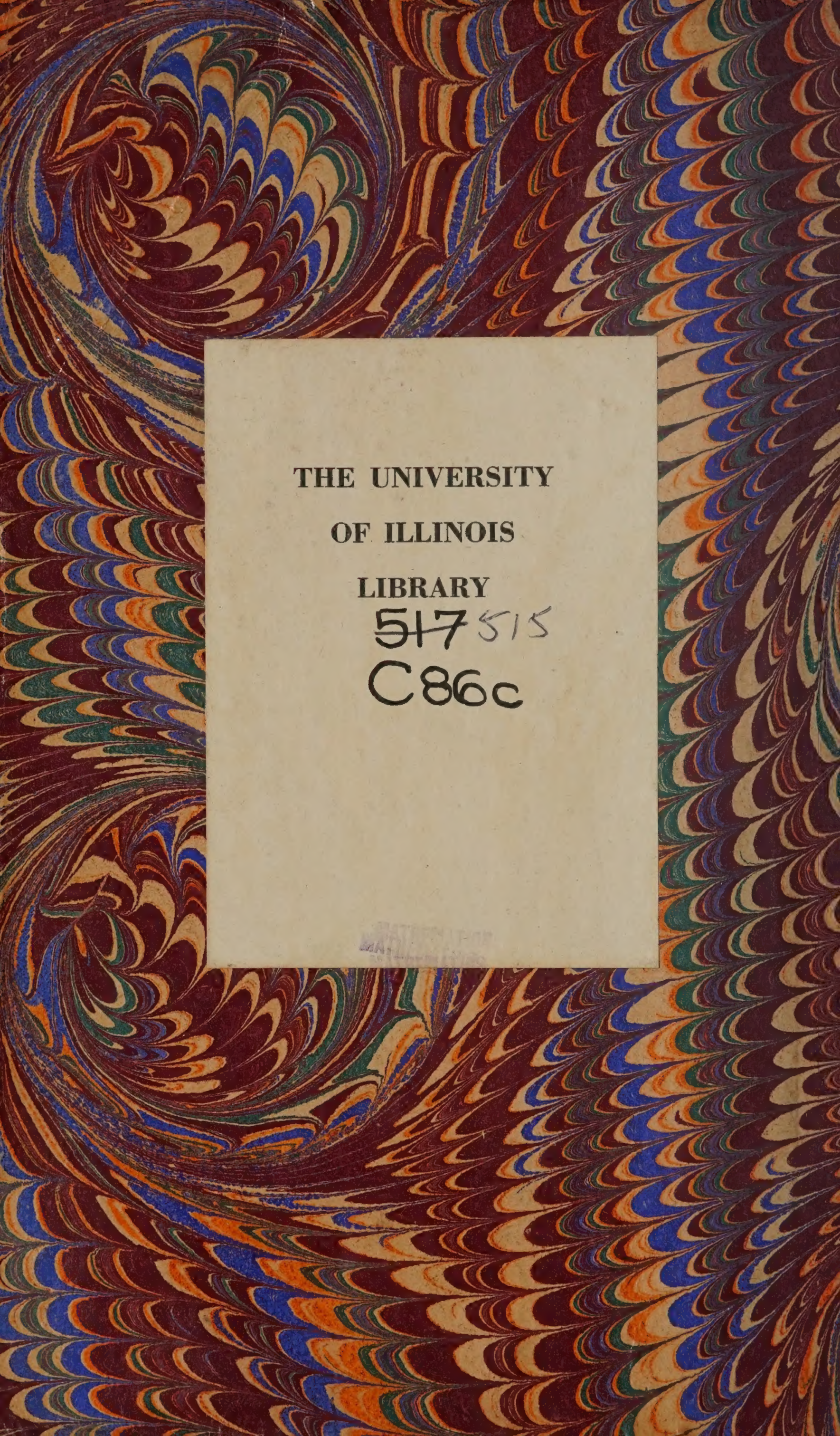
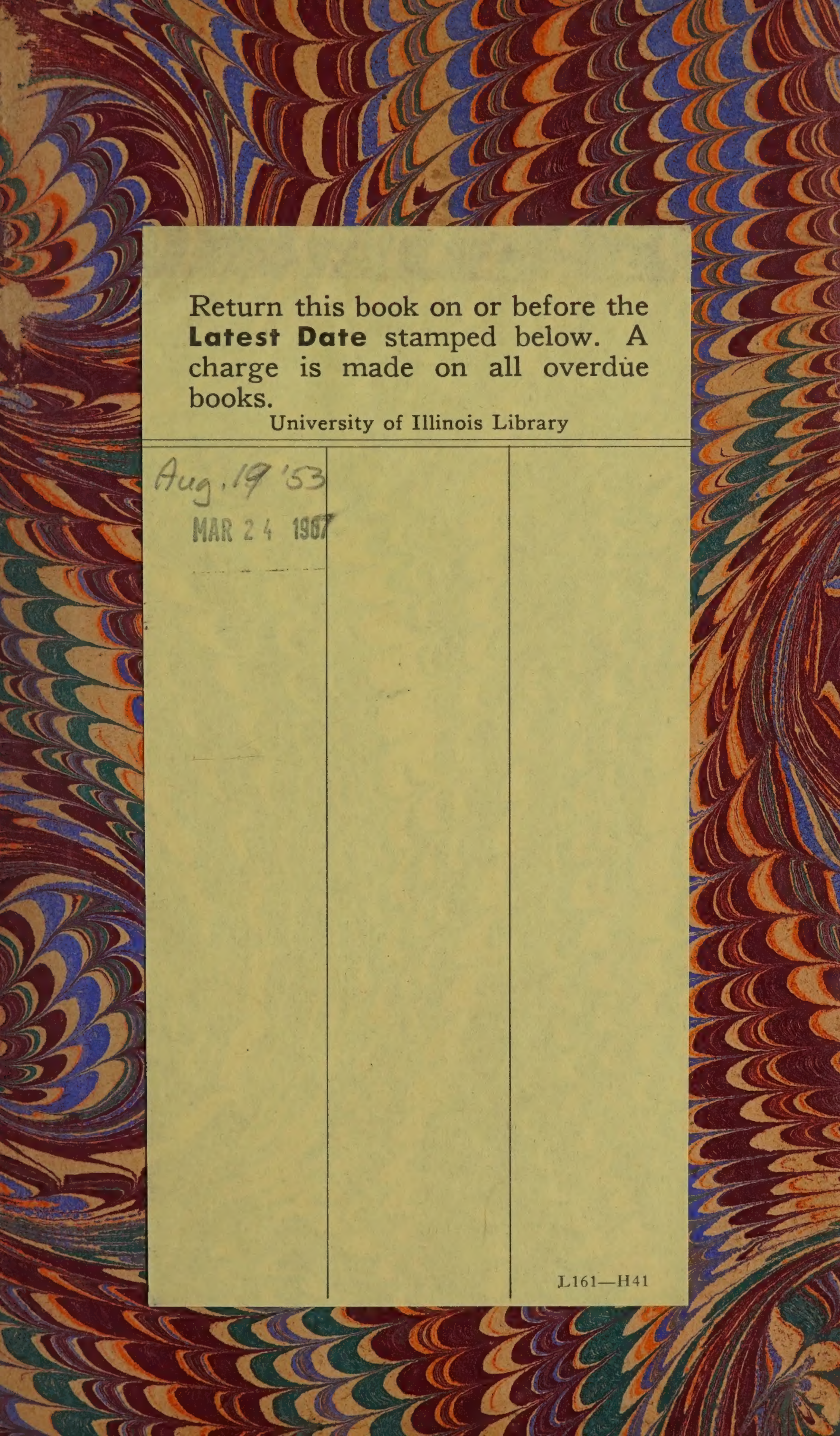








# COURS D'ANALYSE

## CALCUL DIFFÉRENTIEL ET CALCUL INTÉGRAL

**Méthode simple pour apprendre ces branches des mathématiques supérieures**

# COURS D'ANALYSE



## CALCUL DIFFÉRENTIEL ET CALCUL INTÉGRAL

**Méthode simple pour apprendre
ces branches des mathématiques supérieures**

PAR

ALBERT J. M. CREFCŒUR,

ADJOINT DU GÉNIE



ANVERS
IMPRIMERIE DE VLIJT, RUE NATIONALE, 54

1902



# PRÉFACE.

Dans le cours de l'étude d'une science, on doit toujours avoir plus ou moins présent à l'esprit ce qui précède ; on doit saisir les liens de parenté qui existent entre les idées, car une science est un agrégat, un enchaînement d'idées, de concepts ; c'est un ensemble de connaissances présidé par une connaissance première ou principe d'où dérivent et à laquelle se rattachent d'autres connaissances par placement hiérarchique ; une idée découle d'une ou de plusieurs autres, ou du moins s'appuie sur ces dernières, de sorte que pour bien comprendre une idée nouvelle et l'admettre comme vraie, il faut pouvoir se rendre compte de la dépendance qui existe entre elle et celles sur lesquelles elle s'appuie plus ou moins et qui la justifient.

En mathématiques, tout particulièrement, on doit se rendre compte, par exemple, de la façon dont on obtient certaines formules. Or, pour les obtenir, il faut faire subir certaines transformations à d'autres formules exposées antérieurement ; il faut savoir que c'est à l'aide de ces formules qui précèdent qu'on arrive au but, et parmi celles-ci, savoir distinguer lesquelles, dans les différents cas, il s'agit de considérer ; il faut, en un mot, une formule étant exposée, savoir de quelles formules elle découle ou en vertu de quels principes on peut l'obtenir ; et l'on doit transformer, développer des formules avant d'arriver à celle que l'on considère. De là résulte la tâche du professeur. Il doit aider l'intel-

ligence de l'élève, lui faire remarquer ce qui lui échappe, suppléer à l'insuffisance de sa mémoire, de son observation, de son jugement ; exécuter les transformations, les développements et les simplifications nécessaires pour arriver à l'expression considérée.

Donc, si l'on expose aussi clairement et aussi brièvement que possible ce que, pour plus de concision, de précision si vous voulez, on omet dans un livre ; si l'on rappelle, en peu de mots, ce que le professeur avait pour tâche de faire connaître ; si l'on indique, par exemple, le ou les numéros des articles et des formules antérieures qu'on doit considérer ; si l'on exécute les développements et les simplifications des formules ; si l'on rappelle, quand il y a lieu, les propositions et les formules de la géométrie analytique, par exemple, qui font l'objet d'une démonstration ou qui servent à une démonstration ; etc., on comprend la possibilité de pouvoir étudier sans l'aide de professeur.

C'est là le but que nous nous sommes proposé.

Généralement, dans les universités, on commence l'étude des sciences que nous exposons par celle des séries et des dérivées (articles 158 et 157 du calcul différentiel). Pour qui veut faire une étude complète de l'analyse mathématique, nous croyons que c'est là la meilleure méthode ; mais nous ne la suivrons pas ici. Nous aborderons directement le calcul différentiel, en l'exposant aussi simplement que possible ; les autres sciences : le calcul intégral, énoncé en tête de ce livre, le calcul des différences et celui des variations que nous publierons prochainement, en découleront ; et nous pensons que l'on pourra ainsi acquérir plus facilement une connaissance suffisante de ces branches des mathématiques supérieures. Dans la suite, on aura alors facile pour en acquérir une connaissance perfectionnée, si on le désire, en suivant une autre méthode plus compliquée.

Albert CREFCŒUR.

# COURS D'ANALYSE.

---

## ERRATA

Page 127. . . . . . . . .

*Fig. 38*

*Fig. 39*

Page 144, fig. 48, mettre A au centre.

# CALCUL DIFFÉRENTIEL

## DÉFINITIONS.

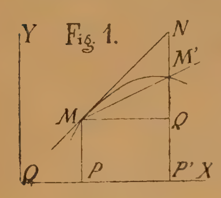
1. — On nomme *infiniment petite* une quantité variable qui tend vers la limite zéro. Par exemple, dans la géométrie élémentaire, si l'on considère un cercle et un polygone régulier inscrit, et si l'on augmente indéfiniment le nombre des côtés du polygone, la grandeur de ce côté décroît indéfiniment et peut devenir aussi petite qu'on voudra ; le côté est dit alors infiniment petit, parce qu'il a pour limite zéro.

Egalement, lorsqu'une quantité croît d'une manière continue, et passe d'une grandeur à une autre, on peut toujours concevoir que ce passage s'effectue par degrés aussi petits qu'on voudra, de sorte que l'accroissement total ou fini soit considéré comme une somme d'accroissements infiniment petits. Ces derniers, qu'on nomme des *différentielles*, sont l'objet du calcul différentiel.

2. — On dit qu'*une variable est fonction d'une autre variable*, lorsque la première est égale à une certaine expression analytique composée de la seconde ; par exemple, y est une fonction de x dans l'équation suivante :

$$y = a + bx^2.$$

3. — Soit $y = f(x)$ une fonction de la variable indépendante x. Prenons, fig. 1., des axes rectangulaires O X, O Y, et construisons la courbe que représente cette équation. Soit un point M dont les coordonnées sont $OP = x$, $MP = y$. Si l'on donne à x un petit accroissement dx, de sorte que $OP' = x + dx$, l'ordonnée correspondante sera $M'P' = y + dy$, et l'on aura :




$$MQ = dx \text{ et } M'Q = dy.$$

dx est l'accroissement de la variable indépendante x ; dy, celui de la fonction y.

Le rapport entre l'accroissement de la fonction et l'accroissement correspondant de la variable sera :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}$$

et sur la figure, il représente la tangente trigonométrique de l'angle $M'MQ$. Or, si l'on fait tendre dx vers zéro, il devient le coefficient angulaire de la tangente M N menée à la courbe au point M.

La limite de ce rapport est ce qu'on appelle le *coefficient différentiel* de la fonction y ; ce dernier est donc le coefficient angulaire précité.

Représentons par p, le second membre de l'équation précédente, nous aurons :

$$\frac{dy}{dx} = p.$$

L'accroissement infiniment petit dy de la fonction correspondant à l'accroissement dx de la variable, se nomme *différentielle,* et elle est égale au produit de p par le dernier accroissement, de sorte qu'on a :

$$dy = p\, dx.$$

4. — Le *calcul différentiel* a pour but de calculer les différentielles, et de les appliquer à diverses questions d'analyse et de géométrie.

Les principes du calcul différentiel peuvent être démontrés par la méthode des limites, ou par celle des infiniment petits, ou par la méthode dite méthode de Lagrange. Nous examinerons successivement ces différentes méthodes.

## 1°. — Méthode des Limites.

### DIFFÉRENTIATION DES QUANTITÉS ALGÉBRIQUES.

5. — Reprenons maintenant, art. 3, l'équation $y = f(x)$. Toute fonction d'une variable x pouvant être représentée par l'ordonnée d'une courbe, soient, fig. 1, comme nous avons vu, $MM'$ la courbe que l'équation ci-dessus représente, $PM = y$ et $OP = x$ les coordonnées d'un point M de cette courbe.

Si au lieu de $OP = x$, on prend $OP' = x'$, l'ordonnée $PM = y$ deviendra $P'M' = y'$ et l'équation $y = f(x)$ se changera en $y' = f(x')$. Mais $x' = x + PP'$ et en représentant la quantitè $PP'$ par h, on voit qu'il suffira de remplacer $x'$ par $x + h$, dans l'équation précédente, pour avoir $y'$. Si donc, dans l'équation de la courbe, $y = f(x)$, je remplace x par $x + h$, j'obtiendrai la valeur de l'ordonnée $y'$ correspondante à cette abscisse $x + h$.

Soit, par exemple, l'équation

$$y = m x^2 \quad (1),$$

pour obtenir $y'$, on changera x en $x + h$, et l'on aura :

$$y' = m(x+h)^2 = m x^2 + 2 m x h + m h^2 \quad (2)$$

Si maintenant on retranche, membre à membre, l'équation (1) de l'équation (2), on obtiendra :
$y' - y = mx^2 + 2 m x h + m h^2 - m x^2 = 2 m x h + m h^2$, et en divisant les deux membres par h, on aura :

$$\frac{y' - y}{h} = 2 m x + m h \quad (3).$$

Mais $y' - y$ représente l'accroissement de la fonction $y$ en vertu de l'accroissement $h$ donné à $x$ ; il en résulte que l'expression $\frac{y' - y}{h}$ est le rapport de l'accroissement de la fonction $y$ à celui de la variable $x$ ; et d'après le second membre de l'équation (3), on voit que ce rapport diminue d'autant plus que $h$ diminue, et que lorsque $h$ devient nul, ce rapport se réduit à $2mx$.

Ce terme $2mx$ est donc la limite du rapport $\frac{y' - y}{h}$; c'est-à-dire que c'est vers ce terme qu'il tend lorsqu'on fait diminuer $h$.

Dans l'hypothèse de $h = 0$, ou accroissement de $x$ nul, l'accroissement de $y$ devient aussi nul, et le rapport $\frac{y' - y}{h}$ se réduit à $\frac{0}{0}$. Par conséquent l'équation (3) devient

$$\frac{0}{0} = 2mx \quad (4).$$

Cette équation n'a rien d'absurde, car l'algèbre nous apprend que $\frac{0}{0}$ est le symbole de l'indétermination, c'est-à-dire qu'il peut représenter toutes sortes de quantités. On conçoit, du reste, que puisqu'en divisant les deux termes d'une fraction par un même nombre, elle ne change pas de valeur, la petitesse des termes de cette fraction n'influe en rien sur sa valeur, et, que par conséquent, cette valeur reste la même lorsque ses termes sont parvenus au dernier degré de petitesse, c'est-à-dire sont devenus nuls.

Mais l'expression $\frac{0}{0}$, de l'équation (4), qui a remplacé le rapport de l'accroissement de la fonction à celui de la variable, lorsque l'accroissement de celle-ci est devenu nul, ne laisse aucune trace de cette variable; pour obvier à cet inconvénient nous représenterons cette expression par celle-ci : $\frac{dy}{dx}$, qui nous rappellera

que la fonction était y et que la variable était x. Alors (art. 3) dx représentera l'accroissement de x, et dy l'accroissement correspondant de y, lorsque ces accroissements seront devenus infiniment petits ou nuls, et nous aurons

$$\frac{o}{o} \text{ ou } \frac{dy}{dx} = 2\, m\, x \ (5).$$

Et nous avons vu, art. 3, que $\frac{dy}{dx}$ ou mieux sa valeur $2\, m\, x$ est le coefficient différentiel de la fonction y.

On remarquera que $\frac{dy}{dx}$ étant le symbole que représente la limite $2\, m\, x$, dx doit toujours être placé sous dy. Mais pour faciliter les opérations on pourra faire évanouir le dénominateur de l'équation (5), et l'on aura $dy = 2\, m\, x\, dx$. Cette expression est appelée la différentielle de la fonction y, comme nous l'avons vu, à l'article 3, où la limite $2\, m\, x$ est représentée par le terme général p.

6. — Comme application, cherchons la différentielle des expressions suivantes :

1° $a + 3\, x^2$ ; on a : $y = a + 3\, x^2$ et $y' = a + 3\, (x + h)^2 = a + 3\, x^2 + 6\, x\, h + 3\, h^2$ ; $y' - y = 6\, x\, h + 3\, h^2$ et $\frac{y' - y}{h} = 6\, x + 3\, h$ et quand h s'annule, on obtient $\frac{dy}{dx} = 6\, x \therefore dy = 6\, x\, dx$.

2° $y = (x^2 - 2\, a^2)\, (x^2 - 3\, a^2)$; en développant, on a : $y = x^4 - 5\, a^2\, x^2 + 6\, a^4$, donc $y' = (x + h)^4 - 5\, a^2\, (x + h)^2 + 6\, a^4 =$ (en ordonnant par rapport à h) $= x^4 - 5\, a^2 x^2 + 6\, a^4 + (4\, x^3 - 10\, a^2 x)\, h + (6\, x^2 - 5\, a^2)\, h^2 + 4\, x\, h^3 + h^4$; donc $\frac{y' - y}{h} = 4\, x^3 - 10\, a^2 x + (6\, x^2 - 5\, a^2)\, h + 4\, x\, h^2 + h^3$ ; passant à la limite, ou faisant $h = o$, on a : $\frac{dy}{dx} = 4\, x^3 - 10\, a^2 x \therefore$ dy (ou différentielle) $= (4\, x^3 - 10\, a^2\, x)\, dx$.

3° $y = x$, donc $y' = x + h$, et $y' - y = h$, d'où $\frac{y' - y}{h} = 1$ et en passant à la limite $\frac{dy}{dx} = 1 \therefore dy = dx$ ; donc la différentielle de x est dx.

4° $y = ax \therefore y' = a(x + h)$ et $y' - y = a h$, par conséquent $\frac{y' - y}{h} = a$, et en passant à la limite $\frac{dy}{dx} = a$ et par suite $dy = a\,dx$ ; donc la différentielle de ax est adx.

5° $y = ax + b \therefore y' = a(x + h) + b$ et $y' - y = a h$ et par suite $\frac{y' - y}{h} = a$ et en passant à la limite $\frac{dy}{dx} = a$ et $dy = a\,dx$.

Donc, on obtient encore a dx pour différentielle, comme à l'exemple précédent. Il suit de là qu'une constante b qui n'est point affectée de x, ne donne aucun terme à la différentiation, c'est-à-dire n'a point de différentielle. En effet, si l'on a $y = b$, c'est le cas où a est nul dans l'équation $y = ax + b$, et où par conséquent, $\frac{dy}{dx} = a$ se réduisant à $\frac{dy}{dx} = 0$, il n'y a ni limite ni différentielle.

6° Si l'accroissement de la variable est négatif, il faut substituer $x - h$ à x et opérer comme précédemment.

Ainsi, cherchons la différentielle, comme au 1°, de $a + 3x^2$, mais quand l'accroissement de x est négatif, on a : $y = a + 3x^2 \therefore y' = a + 3(x - h)^2 = a + 3x^2 - 6xh + 3h^2$ ; $y' - y = -6xh + 3h^2$ et $\frac{y' - y}{h} = -6x + 3h$ ; en passant à la limite, on a : $\frac{dy}{dx} = -6x \therefore dy = -6x\,dx$.

On peut remarquer que cela revient à supposer

dx négatif dans la différentielle de y calculée dans l'hypothèse d'un accroissement positif.

7. — Si, dans une équation dont le second membre est une fonction de x, et que par suite, nous représenterons généralement par $y = f\,x$, on change x en $x + h$, et qu'après avoir ordonné par rapport aux puissances de h, on trouve le développement suivant :

$$y' = A + B\,h + C\,h^2 + D\,h^3 + \text{etc.}\ (6),$$

on doit toujours avoir $y = A$. En effet, en faisant $h = 0$, le second membre se réduit à A ; et le 1^er^ membre se réduit à y, puisque nous n'avons accentué y que pour marquer que y éprouvait un certain changement, lorsque x devenait $x + h$. Donc l'équation (6), qui a lieu quel que soit h, se réduit à $y = A$ quand on fait dans cette équation $h = 0$ ; mais $y = f\,x$, donc $A = f\,x$ et l'on peut écrire l'équation (6) comme ceci : $y' = f\,x + B\,h + C\,h^2$, etc., ou en changeant les coefficients de h, qui sont représentés arbitrairement, nous aurons :

$$y' = f\,x + A\,h + B\,h^2 + C\,h^3 + \text{etc.,}\ (7)$$

ou

$$y' = y + A\,h + B\,h^2 + C\,h^3 + \text{etc.}$$

et en représentant par K la suite $A\,h + B\,h^2 + \text{etc.}$, nous aurons :

$$y' = f\,x + K = y + K.$$

L'équation (7), en remarquant que $y' = f\,(x + h)$, peut encore se mettre sous cette forme :

$$f\,(x + h) = f\,x + A\,h + B\,h^2 + C\,h^3 + \text{etc.}\ (7^{\text{bis}})$$

On en tire

$$\frac{f\,(x + h) - f\,x}{h} = A + B\,h + C\,h^2 + \text{etc.,}\ (7^{\text{tiers}})$$

8. — Ce qui précède, art. 7, va nous permettre de généraliser le procédé de la différentiation. En effet, si dans l'équation $y = f\,x$, dans laquelle on est sensé

connaître l'expression représentée par f x, on a mis x + h à la place de x, et qu'après avoir ordonné par rapport aux puissances de h, on ait pu obtenir le développement suivant :

$$y' = A + B h + C h^2 + D h^3 + \text{etc.}$$

ou, d'après l'article précédent,

$$y' = y + B h + C h^2 + \text{etc.},$$

on aura

$$y' - y = B h + C h^2 + \text{etc.} ;$$

donc $$\frac{y - y'}{h} = B + C h + \text{etc.} ;$$

et en passant à la limite, où h est nul, on aura

$$\frac{dy}{dx} = B.$$

Ce qui montre que le coefficient différentiel est égal au coefficient du terme qui contient la première puissance de h dans le développemeut de f (x + h) ordonné par rapport aux puissances ascendentes de h.

9. — Si, au lieu d'une fonction y qui change d'état en vertu de l'accroissement donné à la véritable x qu'elle renferme, on a deux fonctions y et z de cette même variable x, et que l'on sache trouver en particulier les différentielles de chacune de ces fonctions, il sera facile, par la démonstration suivante, d'en conclure la différentielle du produit z y de ces fonctions. En effet, si l'on substitue x + h à la place de x dans y et dans z, on obtiendra deux développements qui, étant ordonnés par rapport aux puissances de h, pourront être représentés ainsi :

$$y' = y + A h + B h^2 + \text{etc.} \quad (8),$$
$$z' = z + A' h + B' h^2 + \text{etc.} \quad (9) ;$$

passant à la limite, on trouvera, d'après l'article précédent :

$$\frac{dy}{dx} = A, \frac{dz}{dx} = A' \quad (10) ;$$

multipliant les équations (8) et (9) l'une par l'autre, nous obtiendrons

$$\begin{aligned} z'\, y' = z\, y + A\, z\, h &+ B\, z\, h^2 + \text{etc.} \\ + A'\, y\, h &+ AA'\, h^2 + \text{etc.} \\ &+ B'\, y\, h^2 + \text{etc.}\ ; \end{aligned}$$

donc

$$\frac{z'\, y' - z\, y}{h} = A\, z + A'y + (B\, z + AA' + B'y)\, h + \text{etc.};$$

passant à la limite, c'est-à-dire faisant $h = 0$, et indiquant par un point l'expression qui doit être différentiée, on obtiendra

$$\frac{d.\ z\, y}{dx} = A\, z + A'\, y\ ;$$

mettant au lieu de A et de A′ leurs valeurs données par les équations (10), il viendra

$$\frac{d.\, z\, y}{dx} = \frac{z\, dy}{dx} + \frac{y\, dz}{dx},$$

et en supprimant le diviseur commun dx,

$$d.\ z\, y = z\, dy + y\, dz.$$

Donc, *pour trouver la différentielle d'un produit de deux variables, il faut multiplier chacune par la différentielle de l'autre, et ajouter les produits.*

10. — Cette règle permet de trouver facilement la différentielle d'un produit de trois variables.

Soit, par exemple, $y\, z\, u$ : faisons $y\, z = t$, nous aurons donc $d.\ y\, z\, u = d.\ t\, u.$

Or, d'après ce qui précède, article 9,

$$d.\ tu = t\, du + u\ dt.\ (11)\ ;$$

et puisque $t = y\, z$, on a $dt = y\, dz + z\, dy$ ; mettant donc ces valeurs de t et de dt dans l'équation (11), elle deviendra

$$d.\, y\, z\, u = y\, z\, du + u\, y\, dz + u\, z\, dy.\ (12)$$

On voit que la même règle, art. 9, subsiste encore pour un produit de trois variables, c'est-à-dire qu'il

faut écrire le produit y z u, et remplacer successivement chaque variable par sa différentielle, puis ajouter ces produits.

Par le même procédé, on démontrerait que la même règle a encore lieu pour un plus grand nombre de variables.

11. — Au moyen de la proposition exposée à l'art. 9, nous pouvons trouver la différentielle d'une fraction $\frac{z}{y}$.

En effet, faisons $\frac{z}{y} = t$, nous aurons $z = y\,t$; donc $d\,z = y\,dt + t\,dy$, d'où nous tirons $y\,d\,t = dz - t\,dy$; remplaçant, dans le second membre t par sa valeur $\frac{z}{y}$, il vient $y\,d\,t = dz - \frac{z}{y}\,dy$ ; réduisant au même dénominateur, on a $y^2\,d\,t = y\,dz - z\,dy$, et en divisant par $y^2$, il vient $dt = \frac{ydz - z\,dy}{y^2}$ ou en remplaçant t par sa valeur $\frac{z}{y}$, on a enfin

$$d.\frac{z}{y} = \frac{y\,dz - z\,dy}{y^2}, \ (13).$$

12. — Si on divise par y z u, tous les termes de l'équation, $d.\,y\,z\,u = y\,z\,d\,u + uy\,dz + u\,z\,dy$, de l'art. 10, on aura

$$\frac{d.\,y\,z\,u}{y\,z\,u} = \frac{du}{u} + \frac{dz}{z} + \frac{dy}{y}.$$

Et, en général, en divisant la différentielle d'un produit d'un nombre quelconque de variables par ce produit, on trouvera

$$\frac{d.\,x\,y\,z\,t\,u\,v,\ \text{etc.}}{x\,y\,z\,t\,u\,v,\ \text{etc.}} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} + \frac{dt}{t} + \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}$$

etc., (14).

Quand x, y, z, t, u, v, etc., sont égaux à x et en nombre m, on a dans le second membre de l'équation

(14), un nombre m de termes égaux à $\frac{dx}{x}$; ce second membre se changera donc en $\frac{mdx}{x}$, et l'équation (14) deviendra
$$\frac{d.\ x^m}{x^m} = m\frac{dx}{x},$$
et en multipliant par $x^m$, on obtiendra
$$d.\ x^m = m\, x^m \frac{dx}{x} = m\frac{x^m}{x} dx = m\, x^{m-1}\ dx, (15).$$
D'où l'on conclut la règle suivante :

*Pour obtenir la différentielle d'une variable élevée à une puissance m, il faut :*

1° *prendre l'exposant pour coefficient ;*

2° *faire suivre la variable en l'affectant du même exposant diminué d'une unité ;*

3° *multiplier ensuite par dx.*

13. — Cette règle reste vraie, lorsque l'exposant est fractionnaire ou négatif. En effet :

1° Soit d'abord $y = x^{p/q}$. Elevons les deux membres à la puissance q, on aura $y^q = x^p$, ou $d\,y^q = d.\ x^p$, donc art. 12, $q\,y^{q-1}\ dy = p\ x^{p-1}\ dx$; d'ou l'on tire $dy = \frac{p\ x^{p-1}\ dx}{q\ y^{q-1}}$; et comme $x^{p-1} = \frac{x^p}{x}$, et $y^{q-1} = \frac{y^q}{y}$, en substituant ces valeurs, on a
$$dy = \frac{p\frac{x^p}{x}dx}{q\frac{y^q}{y}} = \frac{p}{q}\frac{\frac{x^p}{x}}{\frac{y^q}{y}}dx = \frac{p}{q} \times \left(\frac{x^p}{x} : \frac{y^q}{y}\right) \times dx =$$
$$\frac{p}{q}\ \frac{x^p}{x}\ \frac{y}{y^q}\ dx = \frac{p}{q}\ \frac{x^p}{y^q}\ \frac{y}{x}\ dx$$; et comme nous avons vu que $x^p = y^q$, l'équation précédente se réduit à $dy = \frac{p}{q} \times 1 \times \frac{y}{x} \times dx = \frac{p}{q}\,\frac{y}{x}\,dx$;

mettant enfin pour y sa valeur $x^{\frac{p}{q}}$, on obtient
$$dy = \frac{p}{q}\ \frac{x^{\frac{p}{q}}}{x}\ dx = \frac{p}{q}\ x^{\frac{p}{q}-1}\ dx.$$

Ce qui est le résultat qu'on aurait obtenu en prenant la différentielle de $y = x^{\frac{p}{q}}$, d'après la règle de l'art. 12.

2° Soit ensuite $y = x^{-p}$, ce qui revient à $y = \frac{1}{x^p}$ $\left(\text{Algèbre } a^{-m} = \frac{1}{a^m}\right)$

Différentions cette expression par la règle des fractions, art. 11, nous aurons

$$dy = \frac{x^p d.1 - 1.dx^p}{x^p x^p}$$

et comme l'unité, étant une constante, n'a point de différentielle, (5° de l'art. 6), cette équation se réduit à $dy = \frac{(x^p \times 0 - 1.dx^p)}{x^{2p}} = -\frac{d.x^p}{x^{2p}}$; et en exécutant la différentiation $d.x^p$ par la règle de l'art. 12, on aura : $dy = -\frac{p\,x^{p-1}\,dx}{x^{2p}} = -p\frac{x^{p-1}}{x^{2p}}dx = -p\,x^{p-1-2p}\,dx = -p\,x^{-p-1}\,dx$, résultat qu'on aurait trouvé en faisant usage de la règle de l'art. 12.

Nous pouvons donc maintenant conclure que cette règle a lieu, quel que soit l'exposant de x, qu'il soit entier, fractionnaire ou négatif.

14. — De cette règle découle la suivante :

*Pour avoir la différentielle de la racine n^e d'une quantité variable, il faut remplacer les radicaux par des exposants fractionnaires, et opérer ensuite comme précédemment.*

Par exemple, pour trouver la différentielle de $\sqrt{x}$, on écrira $x^{1/2}$, et la différentielle sera $1/2\,x^{1/2-1}\,dx = 1/2\,x^{-1/2}\,dx = 1/2\frac{1}{x^{1/2}}dx = \frac{dx}{2\,x^{1/2}} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$; donc *pour avoir la différentielle de la racine carrée d'une quantité variable, il faut diviser la differentielle de cette variable par le double du radical.*

Si l'on avait encore à trouver la différentielle de $\sqrt[3]{x}$ on ferait $\sqrt[3]{\phantom{x}} = x^{1/3}$, et l'on aurait $d.\sqrt[3]{x} = d.\,x^{1/3} =$

$$\frac{1}{3} x^{1/3-1} dx = \frac{1}{3} x^{-2/3} dx = 1/3 \frac{1}{x^{2/3}} dx = \frac{dx}{3x^{2/3}} = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}};$$

donc *la différentielle de la racine cubique d'une quantité variable s'obtient en divisant la différentielle de cette variable par le triple de la racine cubique du carré de cette variable.*

Par la même procédé on trouverait la différentielle de $\sqrt[4]{x}$, etc.

De même pour trouver la différentielle de $\sqrt[3]{x^2}$, on ferait $\sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$.

Et en général $\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$; donc $d.\ \sqrt[n]{x^m} = d.\ x^{m/n}$

$$= \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} dx = \frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}} dx = \frac{m}{n} \sqrt[n]{x^{m-n}}\ dx.$$

Comme cas particulier, si dans cette équation, on fait $n = 2$ et $m = 1$, ce qui revient à $\sqrt[2]{x^1}$ ou $\sqrt{x}$, on retrouve au second membre, comme précédemment, $\frac{dx}{2\sqrt{x}}$ pour la différentielle. En effet, on a

$d \sqrt[n]{x^m} = d.\ x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \sqrt[n]{x^{m-n}}\ dx$, et en mettant pour m et n leurs valeurs, on aura

$$d.\sqrt[2]{x^1} \text{ ou } d.\ \sqrt{x} = \frac{1}{2} \sqrt[2]{x^{1-2}}\ dx = \frac{1}{2} \sqrt[2]{x^{-1}}\ dx = \frac{1}{2} \sqrt[2]{\frac{1}{x}}\ dx = \frac{1}{2} dx \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} dx \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

### DIFFÉRENTIATION D'UNE SOMME DE FONCTIONS.

15. — *La différentielle d'une somme de fonctions est égale à la somme des différentielles de ces fonctions.* (1)

Soit $y = f x + F x + \varphi x +$ etc.,

(1) Nous supposons évidemment qu'on sait différentier, en particulier, chaque fonction.

la somme de diverses fonctions de x, indiquées par les signes f, F, $\varphi$, etc., et supposons qu'il faille chercher la différentielle de y qui est composé de ces diverses fonctions.

Faisons $x = x + h$ dans ces fonctions, et développons-les, chacune en particulier, suivant les puissances de de h, nous pourrons représenter le résultat par (art. 7) :

$$\begin{aligned} y' = {} & f\,x + A\,h + A'\,h^2 + \text{etc...} \\ & + F\,x + B\,h + B'\,h^2 + \text{etc...} \\ & + \varphi\,x + C\,h + C'\,h^2 + \text{etc.}\ ; \end{aligned}$$

rassemblant les termes multipliés par les mêmes puissances de h, et retranchant membre à membre la 1re équation de la seconde, nous aurons

$$y' - y = (A + B + C)\,h + (A' + B' + C')\,h^2 + \text{etc.}\ ;$$

divisant par h, nous trouverons

$$\frac{y' - y}{h} = A + B + C + (A' + B' + C')\,h + \text{etc.}\ ;$$

passant à la limite où $h = o$, nous obtiendrons

$$\frac{dy}{dx} = A + B + C \therefore dy = A\,dx + B\,dx + C dx.$$

Et, A, B, C, étant les termes multipliés par la première puissance de h dans les développements de $f\,(x + h)$, de $F\,(x + h)$ et de $\varphi\,(x + h)$, il en résulte, (art. 8), que l'expression $A\,dx + B\,dx + C\,dx$ représente la somme des différentielles des fonctions proposées.

Application. — Cherchons la différentielle de

$$y = ax^3 + b^2\,x^2 + c^3\,x + d^4\,\sqrt{x} + e^5.$$

La différentielle de $ax^3$ est d'abord, (art. 6, 4°), a d. $x^3$, et d'après l'art. 12, cette expression devient a. $3\,x^2\,dx$ ou $3\,a\,x^2\,dx$.

Celle de $b^2\,x^2$ est, mêmes articles, $b^2\,2\,x\,d\,x$ ou $2\,b^2\,x\,dx$.

Celle de $c^3\,x$ est, (art. 6, 4° et art. 6, 3°), $c^3\,dx$.

Celle de $d^4\,\sqrt{x}$, est (art. 6, 4°), $d^4\,d.\,\sqrt{x}$ et d'après l'art. 14, cette expression devient $d^4\,\dfrac{dx}{2\,\sqrt{x}}$.

Enfin, 5° de l'art 6, la différentielle de la constante $e^5 = o$.

Et en ajoutant les différentielles partielles, nous aurons finalement

$$dy = 3\,a\,x^2\,dx + 2\,b^2\,x\,dx + c^3\,dx + d^4\,\frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

16. — Remarquons donc que, lorsque dans une expression que l'on veut différentier, une constante entre comme facteur d'une fonction de x, il faut différentier comme si cette constante n'existait pas, et multiplier ensuite par cette constante, conformément au 4° de l'art. 6. Mais si la constante n'est point affectée d'une fonction de x, elle ne fournit, 5° de l'art 6, aucun terme à la différentielle.

Différentiation des fonctions compliquées, en évitant l'opération de l'élimination, lorsque la fonction y n'est pas immédiatement exprimée au moyen de la variable x, c'est-a-dire lorsque la fonction y et la variable x ne sont pas données par une même équation.

17. — Soit, par exemple, $y = f\,u$, et $u = \varphi\,x$.

Le 1er moyen qui se présente à l'esprit pour obtenir le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$, c'est d'éliminer u entre ces deux équations, puis d'appliquer au résultat le procédé de la différentiation.

Mais on peut obtenir immédiatement le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$, sans recourir à cette opération préliminaire, l'élimination de u.

En effet, supposons que dans l'équation $u = \varphi\,x$, on fasse $x = x + h$ et qu'alors u devienne $u' = u + k$, c'est-à-dire, art. 7, se compose de la fonction primitive et d'un certain accroissement que nous représenterons par k. Admettons ensuite qu'en substituant $u + k$ à la place de u dans l'équation $y = f\,u$, la fonction y devienne $y'$.

Développons maintenant ces fonctions de u et de y par rapport aux puissances de leurs accroissements, et représentons ces développements comme il suit, art. 7 :

$$u' = u + q\,h + q'\,h^2 + q''\,h^3 + \text{etc.}\,;$$
$$y' = y + p\,k + p'\,k^2 + p''\,k^3 + \text{etc.}\,;$$

nous en tirerons :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{u'-u}{h} = q + q'\,h + q''\,h^2 + \text{etc.} \\[2ex] \dfrac{y'-y}{k} = p + p'\,k + p''\,k^2 + \text{etc.} \end{array}\right\} (16)$$

Multipliant ces équations membre à membre, nous aurons :

$$\frac{y'-y}{k} \cdot \frac{u'-u}{h} = (p + p'\,k + p''\,k^2 + \text{etc.})\,(q + q'\,h + q''\,h^2 + \text{etc.})\ (17).$$

Et comme l'accroissement $u' - u$ est représenté par $k$, nous pouvons écrire le 1er membre comme ceci : $\dfrac{y'-y}{k} \cdot \dfrac{k}{h}$, expression qui se ramène à celle-ci : $\dfrac{y'-y}{h}$, et en mettant $x' - x$ à la place de $h$, nous aurons : $\dfrac{y'-y}{x'-x}$.

Donc l'équation (17) se ramène à celle-ci :

$$\frac{y'-y}{x'-x} = (q + q'\,h + q''\,h^2 + \text{etc.})(p + p'\,k + p''\,k^2 + \text{etc.})\,(18).$$

Lorsque $h$ est nul, $k$ s'évanouit (puisque $u$ n'a pris l'accroissement $k$ que parce que $x$ est devenu $x + h$) ; par conséquent à la limite, où $h = 0$, l'équation (18) devient : $\dfrac{dy}{dx} = qp = pq.$ (19).

Faisons donc aussi dans les équations (16), $h$ et $k$ nuls, et ces équations deviendront :

$$\frac{du}{dx} = q \text{ et } \frac{dy}{du} = p.$$

Et substituons ces valeurs de $p$ et de $q$, dans l'équation (19), nous aurons $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\,\dfrac{du}{dx}$ (20).

D'où, nous pouvons conclure, que si l'on a deux équations $y = f\,u$ et $u = f\,x$, et qu'on en tire les valeurs des coefficients différentiels $\dfrac{dy}{du}$ et $\dfrac{du}{dx}$, il suffira de multiplier ces valeurs entre elles pour avoir celle de $\dfrac{dy}{dx}$.

Exemple. — Soient $y = 4\,u^2$ et $u = 2\,ax^3 + b\,x^2$; on aura d'abord :

$$\frac{dy}{du} = 8\,u \text{ et } \frac{du}{dx} = 6\,a\,x^2 + 2\,b\,x\,;$$

et en multipliant ces équations membre à membre, nous aurons :

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ ou } \frac{dy}{dx} = 8\,u\,(6\,ax^2 + 2\,b\,x),$$

et en remplaçant u par sa valeur $(2\,ax^3 + b\,x^2)$, nous obtiendrons :

$$\frac{dy}{dx} = 8\,(2\,ax^3 + bx^2)\,(6\,ax^2 + 2\,b\,x).$$

18. — Applications de la formule (20).

1° Cherchons la différentielle de

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

A cet effet, faisons $1 + x^2 = u$ ; alors $y = \frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{1}{u^{1/2}} = u^{-1/2}$.

Les équations du n° précédent sont représentées ici par $y = u^{1/2}$ et $u = 1 + x^2$.

Différentions ces équations. On a, d'après les art. 12 et 14 : $dy = -1/2\,u^{-1/2-1}\,du = -1/2\,u^{-3/2}\,du \therefore \frac{dy}{du} = -1/2\,u^{-3/2} = -1/2\,(1 + x^2)^{-3/2}$ pour la 1^re^ équation; et $du = 2\,x\,dx \therefore \frac{du}{dx} = 2\,x$ pour la 2^e^ équation.

Multipliant ces coefficients différentiels, entre eux, on a : $\frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ ou (équation 20) $\frac{dy}{dx} = -1/2\,(1+x^2)^{-3/2} \times 2\,x = -\frac{2\,x}{2}\,(1 + x^2)^{-3/2} = -x\,(1 + x^2)^{-3/2} = -x \left(\frac{1}{(1 + x^2)^{3/2}}\right) = -x \left(\frac{1}{\sqrt{(1 + x^2)^3}}\right) = \frac{-x}{\sqrt{(1 + x^2)^3}}$ ;

donc $dy = \frac{-x\,dx}{\sqrt{(1 + x^2)^3}}$ (21).

2° — Soit maintenant $y = (a + b\,x^m)^n$

Faisons $a + b x^m = u$ ; nous aurons pour les deux équations de l'art. 17 : $y = u^n$ et $u = a + b x^m$. Différentions ces équations. On a, art. 12 :

$$\frac{dy}{du} = n u^{n-1} = n (a + b x^m)^{n-1};$$

$$\frac{du}{dx} = m b x^{m-1};$$

multiplions membre à membre, nous aurons :

$\frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ ou, (éq. 20), $\frac{dy}{dx} = n m b x^{m-1} (a + b x^m)^{n-1}$.

3° — Soit encore $y = \left(a + \sqrt{b - \frac{c}{x^2}}\right)^4$.

Faisons $b - \frac{c}{x^2} = u$, on aura pour les deux équations de l'art. 17 : $u = b - \frac{c}{x^2}$ et $y = (a + \sqrt{u})^4$.

Différentions $u = b - \frac{c}{x^2}$.

Pour cela remarquons que $u = b - \frac{c}{x^2} = b - c \frac{1}{x^2} = b - c x^{-2}$ ∴ art. 12, $du = -c - 2 x^{-2-1} dx = 2 c x^{-3} dx$ ∴ $\frac{du}{dx} = 2 c x^{-3} = 2 c \frac{1}{x^3} = \frac{2c}{x^3}$.

Différentions maintenant l'équation $y = (a + \sqrt{u})^4$. Nous aurons, art. 12 : $dy = 4 (a + \sqrt{u})^3 d. (a + \sqrt{u}) = 4 (a + \sqrt{u})^3 d. \sqrt{u}$ ; mais $d \sqrt{u} =$, (art. 14), $\frac{du}{2 \sqrt{u}}$; donc on aura $dy = 4 (a + \sqrt{u})^3 \frac{du}{2 \sqrt{u}}$ ∴ $\frac{dy}{du} = \frac{4 (a + \sqrt{u})^3}{2 \sqrt{u}}$, et en remplaçant, dans le second membre u par sa valeur $b - \frac{c}{x^2}$, il viendra :

$$\frac{dy}{du} = \frac{4 \left(a + \sqrt{b - \frac{c}{x^2}}\right)^3}{2 \sqrt{b - \frac{c}{x^2}}} = \frac{2 \left(a + \sqrt{b - \frac{c}{x^2}}\right)^3}{\sqrt{b - \frac{c}{x^2}}}.$$

Multipliant, entre eux, les coefficients différentiels $\frac{du}{dx}$ et $\frac{dy}{du}$, on aura :

$$\frac{du}{dx} \times \frac{dy}{du} \text{ ou (éq. 20) } \frac{dy}{dx} = \frac{2c}{x^3} \frac{2\left(a + \sqrt{b - \frac{c}{x^2}}\right)^3}{\sqrt{b - \frac{c}{x^2}}} = \frac{4c\left(a + \sqrt{b - \frac{c}{x^2}}\right)^3}{x^3\sqrt{b - \frac{c}{x^2}}}.$$

## Différentielles successives.

19. — Si l'on prend la différentielle d'une différentielle, on a une différentielle seconde ; celle-ci donne une différentielle troisième ; et ainsi de suite.

Soit $y$ une fonction de $x$ ; si elle est différentiée, on trouvera un résultat de la forme $dy = p\,dx$ ($p$ étant une quantité qui peut renfermer $x$). Si $p$ renferme $x$, nous pourrons aussi différentier $p$ et obtenir un résultat représenté par $dp = q\,dx$ ; opérant de même par rapport à $q$, le résultat $dq = r\,dx$ sera encore de la même forme ; et ainsi de suite. Les expressions $pdx$, $qdx$, $rdx$, etc., sont les différentielles successives de $y$.

Les équations $dy = p\,dx$ ; $dp = q\,dx$ ; $dq = r\,dx$ ; etc., donnent, respectivement, en divisant chacune par $dx$ :

$$\frac{dy}{dx} = p\,; \frac{dp}{dx} = q\,; \frac{dq}{dx} = r\,; \text{ etc.}$$

$q$ étant obtenu par deux différentiations successives et en divisant chaque fois par $dx$, c'est-à-dire en prenant la différentielle de la différentielle de $y$ divisée par $dx$, et en divisant encore par $dx$ ; nous représenterons cette équation par $\frac{d^2y}{dx^2}$, et nous aurons $\frac{d^2y}{dx^2} = q = \frac{dp}{dx}$ ; de même en différentiant de nouveau et en divisant par $dx$, nous aurons $\frac{d^3y}{dx^3} = r$ ; ainsi de suite.

dy est la différentielle première de y;
$d^2y$ en est la différentielle seconde;
$d^3y$ en est la différentielle troisième; etc.

Si l'on a, par exemple, $y = ax^3$, on trouvera, art. 12, $dy = 3\,a\,x^2dx$, donc $p = \frac{dy}{dx} = 3\,a\,x^2$. Différentiant de nouveau, on a $dp = 2.\,3\,a\,x\,dx = 6\,a\,x\,dx$, donc $q = \frac{dp}{dx} = 6\,ax$ ou $6\,ax^1$. Différentiant encore, on a $dq = 1.\,6\,a\,x^{1-1}\,dx = 6\,a\,x^0\,dx = 6\,a\,.1.\,dx = 6\,a\,dx$, donc $r = \frac{dq}{dx} = 6\,a$. Maintenant, la différentiation ne peut plus se continuer, car 6 a est une constante, (voir 5° de l'art 6.). Donc, on a :

$\frac{dy}{dx} = 3\,a\,x^2 = p$; $\frac{dp}{dx}$ ou $\frac{d^2y}{dx^2} = 6\,ax = q$; $\frac{dq}{dx}$ ou $\frac{d^3y}{dx^3} = 6\,a$.

dy ou $3\,a\,x^2\,dx$ est la différentielle première de y ou de $ax^3$.
$d^2y$ ou $6\,ax\,dx^2$ en est la différentielle seconde.
$d^3y$ ou $6\,a\,dx^3$ en est la différentielle troisième.

## Formule de Mac-Laurin.

20. — Soit y une fonction de x. Ordonnons-la par rapport à x, et supposons-la

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}, (22).$$

Nous aurons en différentiant et en divisant par dx, art. 12 et 5° de l'art. 6 :

$\frac{dy}{dx} = O + 1.\,Bx^{1-1}$ ou $Bx^0$ ou $B.\,1$ ou $B + 2\,Cx + 3\,Dx^2 + 4\,Ex^3 + \text{etc.} = B + 2\,Cx + 3\,Dx^2 + 4\,Ex^3 + \text{etc.}$;

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\,C + 2.\,3\,D\,x + 3.\,4\,E\,x^2 + \text{etc.};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2.\,3\,D + 2.\,3.\,4\,E\,x + \text{etc.};$$

etc.

Représentons par (y) ce que devient y quand $x = 0$, par $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ ce que devient $\frac{dy}{dx}$ quand $x = 0$,

par $\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)$ ce que devient $\frac{d^2 y}{dx^2}$ quand $x = 0$, ainsi de suite ; les équations précédentes, y compris l'équation (22), nous donneront : $(y) = A$, $\left(\frac{dy}{dx}\right) = B$, $\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) = 2\,C$, $\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right) = 2.\,3\,D$, etc. ; d'ou nous tirerons $A = (y)$, $B = \left(\frac{dy}{dx}\right)$, $C = 1/2 \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)$, $D = \frac{1}{2.\,3} \left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)$, etc.

Substituant ces valeurs dans l'équation (22), elle deviendra

$$y = (y) + \left(\frac{dy}{dx}\right) x + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) x^2 + \frac{1}{2.\,3}\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right) x^3 + \text{etc.} \quad (23),$$

*ce qui est la formule de Mac-Laurin.*

21. — Applications.

1°. — Soit $y = \frac{1}{a + x}$.

Différentiant, nous aurons, art. 11 :

$$dy = \frac{(a + x)\,d.\,1 - 1\,d.(a + x)}{(a + x)^2} = \frac{(a + x).\,0 - d.(a + x)}{(a + x)^2}$$

$$= -\frac{d.\,(a + x)}{(a + x)^2} = (3° \text{ et } 5° \text{ art. } 6) = -\frac{dx}{(a + x)^2} \quad \text{d'où}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(a + x)^2}.$$

Différentiant de nouveau, nous trouverons,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = d.\left(\frac{-1}{(a + x)^2}\right) : dx = (\text{art. } 11) =$$

$$\frac{(a + x)^2 d(-1) - (-1) d(a + x)^2}{((a + x)^2)^2} : dx = \frac{(a + x)^2.\,0 + d(a + x)^2}{(a + x)^4} : dx =$$

$$\frac{d\,(a + x)^2}{(a + x)^4} : dx = \frac{2\,(a + x)^{2-1}\,d.\,(a + x)}{(a + x)^4} : dx =$$

$$\frac{2\,(a + x)\,d\,(a + x)}{(a + x)^4} : dx = (5° \text{ art. } 6) = \frac{2\,(a + x)\,dx}{(a + x)^4} : dx =$$

$$\frac{2\,(a + x)}{(a + x)^4} = \frac{2}{(a + x)^3}.$$

Différentiant de nouveau nous trouverons :

$\frac{d^3y}{dx^3} = d. \frac{2}{(a+x)^3} : dx = d.\ 2 \frac{1}{(a+x)^3} : dx = d.\ 2$ $(a+x)^{-3} : dx = -3 . 2 (a+x)^{-3-1} d(a+x) : dx = -$ $2.\ 3\ (a+x)^{-4} dx : dx = -2.\ 3\ (a+x)^{-4} = -2.\ 3$ $\frac{1}{(a+x)^4} = - \frac{2.3}{(a+x)^4}.$

$\frac{d^4y}{dx^4} = \text{etc.}$

Faisant $x = 0$ dans les valeurs de y, de $\frac{dy}{dx}$, de $\frac{d^2y}{dx^2}$, de $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc., nous trouverons

$$(y) = \frac{1}{a+0} = \frac{1}{a}, \left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{1}{(a+0)^2} = -\frac{1}{a^2}, \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{2}{(a+0)^3} = \frac{2}{a^3}, \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = -\frac{2.3}{(a+0)^4} = -\frac{2.3}{a^4}, \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) = \text{etc.}$$

Substituant ces valeurs et celle de y dans la formule (23), nous obtiendrons

$$y \text{ ou } \frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} + \left(-\frac{1}{a^2}\right) x + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{a^3}\right) x^2 + \frac{1}{2.3}\left(-\frac{2.3}{a^4}\right) x^3 + \text{etc.},$$

$$\text{ou } \frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \text{etc.}$$

2°. — Soit $y = \sqrt{a^2 + bx}$ ; nous avons, art. 14, $y = (a^2 + bx)^{1/2}$ ; $dy = \frac{1}{2}(a^2 + bx)^{1/2 - 1 \text{ ou } -1/2} d(a^2 + bx)$ $= \frac{1}{2}(a^2 + bx)^{-1/2} b\, dx \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(a^2 + bx)^{-1/2} b$ $= \frac{1}{2} \frac{b}{\sqrt{a^2 + bx}}$;

$\frac{d^2y}{dx^2} = d. \frac{1}{2} \frac{b}{\sqrt{a^2+bx}} : dx = d \frac{1}{2} b (a^2 + bx)^{-1/2}$ $: dx = -\frac{1}{2}. \frac{1}{2} b\ (a^2 + bx)^{-1/2-1}\ d.\ (a^2 + bx) :$ $dx = -\frac{1}{2}. \frac{1}{2} b\ (a^2 + bx)^{-3/2}\ b\, dx : dx = -\frac{1}{2}. \times$

$$\frac{1}{2} b^2 (a^2 + bx)^{-3/2} = -\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} b^2 .}{\sqrt{(a^2 + bx)^3}};$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = d. - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} . b^2 \frac{1}{\sqrt{(a^2 + bx)^3}} : dx = d. - \frac{1}{2} . \frac{1}{2} . b^2$$

$$(a^2 + bx)^{-3/2} : dx = -\frac{3}{2} . - \frac{1}{2} . \frac{1}{2} . b^2 (a^2 + bx)^{-3/2 - 1 \text{ ou} -5/2} d$$

$$(a^2 + bx) : dx = -\frac{3}{2} . - \frac{1}{2} . \frac{1}{2} b^2 (a^2 + bx)^{-5/2} b\, dx : dx =$$

$$\frac{3}{2} . \frac{1}{2} . \frac{1}{2} b^3 (a^2 + bx)^{-5/2} = \frac{1}{2} . \frac{1}{2} . \frac{3}{2} . b^3$$

$$\frac{1}{(a^2 + bx)^{5/2}} = \frac{\frac{1}{2} . \frac{1}{2} . \frac{3}{2} . b^3}{\sqrt{(a^2 + bx)^5}} .$$

Si nous faisons $x = 0$, ces valeurs deviendront

$$(y) = (a^2)^{1/2} = \sqrt{a^2} = a, \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{2} \frac{b}{\sqrt{a^2}} = \frac{1}{2} \frac{b}{a},$$

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) = -\frac{\frac{1}{2} . \frac{1}{2} b^2}{\sqrt{(a^2)^3}} = -\frac{\frac{1}{2} . \frac{1}{2} b^2}{a^3},$$

$$\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right) = \frac{\frac{1}{2} . \frac{1}{2} . \frac{3}{2} . b^3}{\sqrt{(a^2)^5}} = \frac{\frac{1}{2} . \frac{1}{2} . \frac{3}{2} . b^3}{a^5} .$$

Substituant ces valeurs et celle de y dans la formule (23), nous obtiendrons

$$y \text{ ou } \sqrt{a^2 + bx} = a + \frac{1}{2} \frac{b}{a} x + \frac{1}{2} \left( \frac{-\frac{1}{2} . \frac{1}{2} b^2}{a^3} \right)$$

$$x^2 + \frac{1}{2.3} \frac{\frac{1}{2} . \frac{1}{2} . \frac{3}{2} . b^3}{a^5} x^3 + \text{etc. ou } \sqrt{a^2 + bx} =$$

$$a + \frac{bx}{2a} - \frac{\frac{1}{2} . \frac{1}{2} . \frac{1}{2} . b^2}{a^3} x^2 + \frac{\frac{1}{2} . \frac{1}{2} . \frac{3}{2} b^3}{2.3. a^5} x^3 - \text{etc.}$$

ou $\sqrt{a^2+bx} = a + \frac{bx}{2a} - \frac{b^2x^2}{8a^3} + \frac{\frac{3}{8}\, b^3x^3}{2.\,3.\,a^5}$ ou $\frac{3\,b^3x^3}{8\times 2\times 3\,a^5}$ ou $\frac{b^3x^3}{16\,a^5}$ — etc. $= a + \frac{bx}{2a} - \frac{b^2x^2}{8a^3} + \frac{b^3x^3}{16\,a^5}$ — etc.

3°. — Soit $y = (a+x)^m$. Nous trouverons (art. 12) :

$$\frac{dy}{dx} = m\,(a+x)^{m-1}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = d.\,[m\,(a+x)^{m-1}] : dx = m\,(m-1)\,(a+x)^{m-2}\,d.(a+x) : dx = m\,(m-1)\,(a+x)^{m-2}\,dx : dx = m\,(m-1)\,(a+x)^{m-2}.$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = d.\,[m\,(m-1)\,(a+x)^{m-2}] : dx = m\,(m-1)\,(m-2)\,(a+x)^{m-3}\,d\,(a+x) : dx = m\,(m-1)\,(m-2)\,(a+x)^{m-3}\,dx : dx = m\,(m-1)\,(m-2)\,(a+x)^{m-3}.$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \text{etc.}$$

Faisant $x = 0$, on aura :

$$(y) = a^m\,;\ \left(\frac{dy}{dx}\right) = m\,a^{m-1}\,;\ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = m\,(m-1)\,a^{m-2}\,;\ \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = m\,(m-1)\,(m-2)\,a^{m-3}\,;\ \text{etc.}$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (23), on aura : $y$ ou $(a+x)^m = a^m + m\,a^{m-1}\,x + 1/2\,m\,(m-1)\,a^{m-2}\,x^2 + \frac{1}{2.3}\,m\,(m-1)\,(m-2)\,a^{m-3}\,x^3 + \text{etc.} = a^m + m\,a^{m-1}\,x + m\,\frac{(m-1)}{2}\,a^{m-2}\,x^2 + \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{2.\,3}\,a^{m-3}\,x^3 + \text{etc.}$

22. — *Démonstration de la formule de Newton, par le calcul différentiel.*

Procédons comme dans la méthode des coefficients indéterminés et soit $(1+z)^m = A + B\,z + C\,z^2 + D\,z^3 + E\,z^4$, etc.

Pour déterminer les indéterminées A, B, C, etc., faisons d'abord $z = 0$, cette équation se réduit à

$$(1+0)^m \text{ ou } 1^m \text{ ou } 1 = A\,;$$

et par suite, on peut écrire l'équation considérée comme il suit :

$$(1+z)^m = 1 + B\,z + C\,z^2 + D\,z^3 + E\,z^4 + \text{etc.},\ (24.).$$

Différentiant les deux membres de cette équation, et remarquant que $d.1 = 0$, que $d.z = dz$ et que $d.Bz = Bdz$, on aura $m(1+z)^{m-1}dz = B\,dz + 2\,Cz\,dz + 3\,Dz^2\,dz + 4\,Ez^3\,dz + \text{etc.}$

Supprimant le facteur commun dz, il restera
$m(1+z)^{m-1} = B + 2Cz + 3Dz^2 + 4Ez^3 + \text{etc.}$ (25).

Cette équation ayant lieu, quel que soit z, je fais $z = 0$, et elle se réduit (en remarquant que $(1+0)^m = 1^m = 1$) à $m = B$.

Différentiant de nouveau, c'est-à-dire différentiant l'équation (25) et divisant par dz, on aura
$m(m-1)(1+z)^{m-2} = 2C + 2.3Dz + 3.4Ez^2 + \text{etc.}$

Faisant encore $z = 0$ donc $dz = 0$, on obtiendra

$$m(m-1) = 2C \text{ d'où } C = \frac{m(m-1)}{2}.$$

On déterminera de même tous les autres coefficients, et en mettant leurs valeurs dans l'équation (24), elle deviendra $(1+z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{1.2}z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}z^3 + \text{etc.}$

Faisant $z = \frac{x}{a}$, on aura

$$\left(1+\frac{x}{a}\right)^m = 1 + m\frac{x}{a} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{x^2}{a^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3.}\frac{x^3}{a^3} + \text{etc.}$$

Réduisant le premier membre au même dénominateur, il deviendra

$$\left(\frac{a+x}{a}\right)^m \text{ ou plutôt } \frac{(a+x)^m}{a^m}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation précédente et chassant le dénominateur du premier membre, on aura

$$(a+x)^m = a^m + m\,a^m\frac{x}{a} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^m\frac{x^2}{a^2} + \text{etc.},$$

ou $(a+x)^m = a^m + m\,a^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}x^3 + \text{etc.}$ (26),

*ce qui est la formule de Newton* (Algèbre).

## Différentiation des quantités transcendantes.

23. — On appelle quantités transcendantes les quantités qu'affectent des exposants variables, des logarithmes, des sinus, des cosinus, etc.

24. — Différentions d'abord $a^x$. Soit donc $y = a^x$, changeons x en $x + h$ et y en $y'$, cette équation deviendra $y' = a^{x+h}$ ou plutôt $y' = a^x\, a^h$. (27)

Il s'agit donc de développer cette expression par rapport aux puissances de h, qui est l'augmentation de la variable x, et de trouver ensuite les termes multipliés par la première puissance de h. Or, pour que $a^h$ puisse se développer par la formule du binôme, faisons $a = 1 + b$, (voir algèbre, ou art. 22 en faisant dans la formule (26) $a = 1$, $x = b$ et $m = h$) et l'on aura $a^h$ ou $(1 + b)^h =$
$1 + h\frac{b}{1} + h\,(h-1)\,\frac{b^2}{1.\,2} + h\,(h-1)\,(h-2)\,\frac{b^3}{2.\,3} + h\,(h-1)\,(h-2)\,(h-3)\,\frac{b^4}{2.\,3.\,4} +$ etc. (28).

Voici comment on peut trouver les termes multipliés par la première puissance de h sans former tous les produits indiqués par le second membre de l'équation (28). Pour cela, nous remarquerons d'abord que les termes qui contiennent la première puissance de h dans le second et dans le troisième terme de l'équation (28) sont $\frac{b}{1}h$ et $-\frac{b^2}{2}h$ (1). A l'égard des autres, nous remarquerons que si dans un produit tel que $h\,(h-1)\,(h-2)\,(h-3)$, etc., la partie $(h-1)(h-2)(h-3)$, etc., est composée de n facteurs, le développement, de cette partie, d'après la théorie des équations, sera de la forme

$$h^n + A\,h^{n-1} + B\,h^{n-2} \ldots + M\,h + N,$$

(1) En effet, pour le troisième terme on a $h\,(h-1)\,\frac{b^2}{1.2}$ et en effectuant les opérations indiquées on aura $(h^2 - h)\frac{b^2}{1.2}$ ou $\frac{h^2\,b^2}{1.2} - h\,\frac{b^2}{1.2}$ ou $\frac{h^2 b^2}{2} - \frac{b^2}{2}\,h$.

c'est-à-dire qu'on aura, en multipliant par h,
$h(h-1)(h-2)(h-3)\ldots = h(h^n + A h^{n-1}\ldots + M h + N)\ldots(29)$, ou en exécutant l'opération indiquée dans le second membre, il vient $h(h-1)(h-2)(h-3)\ldots = h^{n+1} + A h^n \ldots + M h^2 + N h$, et l'on peut remarquer que le terme qui contient la première puissance de h dans le produit $h(h-1)(h-2)(h-3)$, etc., sera N h.

Voyons maintenant comment se compose le coefficient N. Pour cela remarquons que l'Algèbre nous apprend encore que dans un produit tel que $(h-1)(h-2)(h-3)$, etc., dont le développement est $h^n + Ah^{n-1}\ldots + M h + N$, le dernier terme N de ce développement se compose du produit des secondes parties $-1, -2, -3$, etc., des binômes $h-1$, $h-2$, $h-3$, etc., c'est-à-dire qu'on a en général $N = -1 \times -2 \times -3 \times -4$, etc.

Ainsi, en considérant le quatrième terme $\frac{b^3}{2.3}\,h\,(h-1)$ $(h-2)$ de l'équation (28), nous voyons que le développement de la partie $(h-1)(h-2)$ qu'il renferme sera de la forme $h^2 + M h + N$ et aura le produit $-1 \times -2$ pour valeur de N ; par conséquent la partie affectée de la première puissance de h que nous fournira ce terme, sera $\frac{b^3}{2.3} \times (-1 \times -2)\,h = \frac{b^3}{3}\,h$.

En considérant ensuite le cinquième terme de l'équation (28), on verra pareillement que le terme affecté de la première puissance de h qu'il renferme, sera $\frac{b^4}{2.3.4} \times (-1 \times -2 \times -3)\,h = -\frac{b^4}{4}\,h$.

Et ainsi de suite, de sorte que nous aurons $(1+b)^h = 1 + \left(\frac{b}{1} - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4}, \text{etc.}\right) h$ + termes en $h^2$, en $h^3$, etc., et en mettant à la place de $1 + b$ sa valeur a, on aura $a^h = 1 + \left(\frac{b}{1} - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4}, \text{etc.}\right)$ h + termes en $h^2$, en $h^3$, etc.

Et si nous représentons $\left(\frac{b}{1} - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4}, \text{etc.}\right)$

par A, on aura $a^h = 1 + A h +$ termes en $h^2$, en $h^3$, etc.

En mettant cette valeur de $a^h$ dans l'équation $y' = a^x . a^h$, celle-ci deviendra $y' = a^x (1 + A h +$ termes en $h^2$, en $h^3$, etc.) $= a^x + A a^x h + a^x$ (termes en $h^2$, en $h^3$, etc.).

Si de cette équation nous retranchons, membre à membre, l'équation primitive $y = a^x$, il viendra $y' - y = A a^x h + a^x$ (termes en $h^2$, en $h^3$, etc.); et en divisant par h, aurons

$$\frac{y' - y}{h} = A a^x + a^x \text{ (termes en h, en } h^2\text{, etc.)}.$$

Et en passant à la limite, où $h = 0$, on aura

$$\frac{dy}{dx} = A a^x \quad (30).$$

Si dans l'équation (30) nous remplaçons y par sa valeur $a^x$, nous aurons enfin

$$\frac{d . a^x}{dx} = A a^x \ (31).$$

Remarquons que la constante A dépend de a ; en effet, si dans l'équation $A = \left(\frac{b}{1} - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4}, \text{etc.}\right)$, on met pour b sa valeur $a - 1$, tirée de l'équation $a = 1 + b$, ou obtiendra

$$A = \frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4}, \text{ etc., } (32).$$

25. — Si nous voulons déterminer la valeur de la constante A, nous chercherons, par le théorème de Mac-Laurin, art. 20, et à l'aide des équations (30) et (31), le développement de $a^x$ ; nous aurons donc $y = a^x$ ; $\frac{dy}{dx} = A a^x$ ; $\frac{d^2 y}{dx^2} = d. A a^x : dx = A. d. a^x : dx = A \frac{d. a^x}{dx} =$ (éq. 31) $= A A a^x = A^2 a^x$ ; $\frac{d^3 y}{dx^3} = d. A^2 . a^x : dx = A^2 . d. a^x : dx = A^2 \frac{d. a^x}{dx} = A^2 . A a^x = A^3 a^x$ ; etc.

Si nous faisons, art. 20, $x = 0$, nous aurons :

$(y) = a^0 = 1$ ; $\left(\frac{dy}{dx}\right) = A$ ; $\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) = A^2$ ; $\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right) = A^3$ ;

etc. Substituant ces valeurs dans l'équation (23), nous obtiendrons

$$y \text{ ou } a^x = 1 + A x + \frac{1}{2} A^2 x^2 + \frac{1}{2.3} A^3 x^3 + \text{etc.},$$

$$\text{ou } a^x = 1 + \frac{A x}{1} + \frac{A^2 x^2}{1.2} + \frac{A^3 x^3}{1.2.3} + \text{etc. } (33).$$

26. — Si dans cette équation (33), nous faisons $x = \frac{1}{A}$, elle deviendra

$$a^{\frac{1}{A}} = 1 + \frac{A \frac{1}{A}}{1} + \frac{A^2 \frac{1}{A^2}}{1.2} + \frac{A^3 \frac{1}{A^3}}{1,2.3} + \text{etc. ou}$$

$$a^{\frac{1}{A}} = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \text{etc.}.$$

Si nous représentons par e le second membre de cette équation, elle devient $a^{\frac{1}{A}} = e$ ; d'où l'on tire $a^{\frac{A}{A}} = e^A$ ou $a^1 = e^A$ ou $a = e^A$ ; prenant les logarithmes, on aura $\log a = \log e^A = A \log e$ ; donc $A = \frac{\log a}{\log e}$, (34).

Le nombre e, dont la valeur est donnée par l'équation $e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \text{etc.}$, est la base que Néper adopta pour calculer ses tables de logarithmes.

On peut remarquer que la série $1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \text{etc.}$, est *convergente*, c'est-à-dire que la somme $S_n$ des n premiers termes *tend vers une limite finie et déterminée S*, lorsque le nombre n croît indéfinément. Et comme cette série est assez convergente même, nous pouvons nous borner à prendre les douze premiers termes de cette suite, et alors nous trouverons que e vaut environ 2,7182818.

Nous savons que *le logarithme d'un nombre est l'exposant de la puissance à laquelle on doit élever une quantité constante, appelée base, pour reproduire le nombre donné.*

Ainsi, dans l'équation $y = a^x$, x peut-être regardé comme une fonction de y ; on dit alors que x est le logarithme du nombre y, dans le système dont la base est a.

Donc, si nous représentons par L a le logarithme de a dans le système Népérien dont la base est e, nous aurons $a = e^{La} = (2,7182818...)^{La}$, donc $\log a = \log e^{La}$, et par suite, comme le logarithme d'une quantité affectée d'un exposant est égal au logarithme de cette quantité multiplié par son exposant, nous aurons $\log a = L a . \log e$ ; d'où nous tirerons

$$\frac{\log a}{\log e} = L\,a, \quad (35).$$

Par suite l'équation (34) se réduit à $A = L\,a$, et par conséquent l'équation (31) donne

$$\frac{d.\,a^x}{dx} = L\,a\,.\,a^x \text{ d'où } d\,.\,a^x = L\,a\,.\,a^x\,.\,dx = a^x\,dx.\,L\,a. (36).$$

27. — Voici un procédé pouvant être employé pour trouver promptement la différentielle de $a^x$, c'est-à-dire pour parvenir plus vite au même résultat que dans l'article 24, quoique ce procédé s'éloigne un peu de la théorie générale que nous avons exposée.

Pour cela, de l'équation (27) $y' = a^x a^h$ retranchons l'équation primitive $y = a^x$, nous aurons

$y' - y = a^x a^h - a^x$ ce qui donne $y' - y = a^x (a^h - 1)$ ; (37).

Faisons $a = 1 + b$ pour que $a^h$ puisse se développer par la formule du binôme (art. 24), nous aurons, comme dans l'équation (28) :

$$a^h \text{ ou } (1+b)^h = 1 + h\frac{b}{1} + h(h-1)\frac{b^2}{1.2} + h(h-1)(h-2)\frac{b^3}{2.3} + h(h-1)(h-2)(h-3)\frac{b^4}{2.3.4} + \text{etc.}$$

Multiplions par $a^x$ les deux membres de cette équation après avoir fait passer l'unité dans le premier, nous aurons :

$$a^x(a^h - 1) = a^x\left[h\frac{b}{1} + h(h-1)\frac{b^2}{1.2} + h(h-1)(h-2)\frac{b^3}{1,2.3} + \text{etc.}\right].$$

Mais d'après l'équation (37), on peut remplacer le premier membre de cette équation par $y - y$, et en divisant par h les deux membres, on aura alors

$$\frac{y'-y}{h}=a^x\left[\frac{b}{1}+(h-1)\frac{b^2}{2}+(h-1)(h-2)\frac{b^3}{2.3}+\text{etc.}\right].$$

Et en passant à la limite où h=o, cette équation deviendra

$$\frac{dy}{dx}=a^x\left(\frac{b}{1}-\frac{b^2}{2}+\frac{2\,b^3}{2.3}-\text{etc.}\right)=a^x\left(b-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\text{etc.}\right).$$

Et en remplacant, dans le premier membre, y par sa valeur $a^x$, on aura :

$$\frac{d.\,a^x}{dx}=a^x\left(b-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\text{etc.}\right).$$

Représentons par A la suite qui est entre les parenthèses, c'est-à-dire posons

$$A=b-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\text{etc.},$$

l'équation précédente deviendra

$$\frac{d\,.\,a^x}{dx}=A\;a^x.$$

## Des différentielles logarithmiques.

28. — Soit, comme nous avons vu à l'art. 26, x le logarithme de y dans le système dont la base est a, on a $y=a^x$, et l'équation (30) nous donne $dy=A\;a^x\,dx$ d'où $dx=\frac{dy}{A\;a^x}$.

Mais, éq. (34), $A=\frac{\log a}{\log e}$, donc $dx=\frac{dy}{\frac{\log a}{\log e}\,a^x}=\frac{dy}{a^x}\,\frac{\log e}{\log a}$.

Or, $a^x=y$ et $x=\log\,y$, par suite l'équation précédente devienda dx ou $d\,.\log y=\frac{dy}{y}\,\frac{\log e}{\log a}$. (38).

Dans la formule qui précède, la base a du système est indéterminée. Mais si nous prenons les logarithmes dans le système Népérien, la base a devenant le nombre e (art. 26), nous aurons $\frac{\log e}{\log a}=\frac{\log e}{\log e}=1$ ; donc dans le système Népérien, on a, au lieu de l'équation (38) :

$$d\,.\log y=\frac{dy}{y}\times 1=\frac{dy}{y}.$$

## Des différentielles des sinus, cosinus et autres lignes trigonométriques, ou des différentielles des fonctions circulaires.

29. — Nous allons d'abord démontrer qu'un arc est plus grand que le sinus et plus petit que la tangente qui y correspondent.

En effet, soit A B, fig. 2, un arc qui a B E pour sinus et D A pour tangente. Prenons l'arc A B′ égal à l'arc A B. La corde B B′ est plus petite que l'arc B A B′, puisqu'elle est droite. Donc B E, moitié de B B′ est plus court que A B, moitié de B A B′. Donc, le sinus est plus petit que l'arc.

Je dis maintenant que la tangente est plus grande que l'arc. Car on a : aire triangle D D′ C $>$ aire secteur B A B′ C, ou, en remplaçant l'indication de ces aires par leurs expressions géométriques :

$$DD' \times \frac{1}{2} AC > \text{arc } BAB' \times \frac{1}{2} AC ;$$

supprimant le facteur commun $\frac{1}{2}$ A C, il reste D D′ $>$ arc B A B′, et en prenant la moitié de chaque membre de cette inégalité, on a : D A $>$ arc B A.

Il résulte de là que la limite du rapport du sinus à l'arc est l'unité. En effet quand l'arc A B diminue et devient nul, le sinus et la tangente diminuent également et deviennent nuls en même temps que l'arc ; c'est-à-dire qu'alors le sinus et la tangente se confondent, donc à plus forte raison le sinus se confond-t-il alors avec l'arc qui est compris entre la tangente et le sinus ; donc dans le cas de la limite on a :

$$\frac{\sin h}{\text{arc } h} \text{ ou plutôt } \frac{\sin h}{h} = 1.$$

30. — Maintenant, cherchons la différentielle du sinus dont l'arc est x.

Pour cela, remarquons que quand cet arc x reçoit un accroissement h, on a par la trigonométrie :

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h, \ (39) ;$$

retranchant de chaque membre de cette équation la valeur primitive sin x, et divisant par l'accroissement h, on aura :

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}.$$

Mettant sin x en évidence, dans le second membre (1er et 3e terme), on aura :

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\frac{\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h}{h}=\sin x\frac{(\cos h-1)}{h}+\frac{\cos x\sin h}{h}\ (40).$$

Lorsque h devient nul, $\cos h=1$ et $\cos h-1=1-1=0$, de sorte que $\frac{\cos h-1}{h}=\frac{0}{0}$, valeur indéterminée. Nous mettrons donc ce terme sous une autre forme. Dans ce but, de l'équation $\cos^2 h+\sin^2 h=1$ (trigonométrie), je tire $\cos^2 h-1=-\sin^2 h$ ou $(\cos h-1)(\cos h+1)=-\sin^2 h$, donc $\cos h-1=\frac{-\sin^2 h}{\cos h+1}$. Cette valeur mise dans l'équation (40), nous donne

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\frac{\sin x}{h}\left(\frac{-\sin^2 h}{\cos h+1}\right)+\frac{\cos x\sin h}{h}=$$

$$\frac{-\sin x\sin^2 h}{h(\cos h+1)}+\frac{\cos x\sin h}{h}=-\frac{\sin x\sin h\sin h}{(\cos h+1)h}+\frac{\cos x\sin h}{h}$$

$$=-\sin x\frac{\sin h}{\cos h+1}\frac{\sin h}{h}+\frac{\cos x\sin h}{h}\ (41).$$

Quand $h=0$, l'arc et le sinus de h se confondent, c'est-à-dire qu'on a : $h=0$, $\sin h=0$, et, comme à l'article précédent, $\frac{\sin h}{h}=1$ ; d'autre part le $\cos h=1$ quand $h=0$ ; donc $\frac{\sin h}{\cos h+1}=\frac{0}{1+1}=\frac{0}{2}=0$, et l'équation (41) se ramène à $\frac{d.\sin x}{dx}=\cos x\frac{\sin h}{h}=\cos x\times 1=\cos x$ ; d'où l'on déduit

$$d.\sin x=\cos x\,dx,\ (42).$$

*Remarque.* — Dans cette démonstration, nous avons supposé que le rayon des tables avait été pris pour unité ; et pour avoir la différentielle d'un sinus dont le rayon serait a, par exemple, on ferait dans l'équation (39), (trigo-

nométrie) : $\sin(x+h) = \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h}{a}$, (43).

Il faudrait donc restituer la constante a dans l'équation (42), qui a été obtenue en supposant $a = 1$ (trigon.), et l'on aurait ainsi pour la différentielle du sinus d'un arc x, dont le rayon est a :

$$d. \sin x = \frac{dx \cos x}{a}, \ (44).$$

31. — Cherchons maintenant la différentielle de cos x. Pour cela prenons l'équation, (trigon.), $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ou ce qui est la même chose, $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$. Différentions-la, (art. 12), nous aurons :

$$2 \sin x \, d. \sin x + 2 \cos x \, d. \cos x = d. 1 = 0,$$

d'où, en divisant par 2 et faisant passer le premier terme dans le second membre, puis divisant par cos x, on aura

$$d. \cos x = -\frac{\sin x \, d. \sin x}{\cos x};$$

remplaçant, dans cette équation, d. sin x par sa valeur cos x dx, donnée par l'équation (42), on aura

$$d. \cos x = -\frac{\sin x \cos x \, dx}{\cos x} = -\sin x \, dx, \ (45).$$

32.—Pour chercher la différentielle de tang. x, observons que la trigonométrie nous apprend que $\tan g\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Si nous différentions cette équation par la règle de l'art. 11, nous aurons

$$d. \tan g\, x = d. \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \, d. \sin x - \sin x \, d. \cos x}{\cos^2 x};$$

remplaçant, dans cette équation, d. sin x et d. cos x par leurs valeurs trouvées précédemment, nous obtiendrons

$$d. \tan g\, x = \frac{\cos x \cos x \, dx - \sin x \, (-\sin x \, dx)}{\cos^2 x} =$$

$$\frac{\cos^2 x \, dx + \sin^2 x \, dx}{\cos^2 x} = \frac{dx (\cos^2 x + \sin^2 x)}{\cos^2 x}.$$

Or, la trigonométrie enseigne que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, donc, l'équation précédente se ramène à

$$d. \tan g\, x = \frac{dx \times 1}{\cos^2 x} = \frac{dx}{\cos^2 x}, \ (46).$$

33. — Pour trouver la différentielle de cotangente x, remarquons que par la trigonométrie on sait que le rayon est une moyenne proportionnelle entre la tangente et la cotangente, c'est-à-dire qu'on a $\cot x = \frac{1}{\tang x}$. Et en différentiant cette équation par la règle de l'art. 11, on aura

$$d.\cot x = \frac{\tang x\, d.1 - 1.d.\tang x}{\tang^2 x} = \frac{\tang x \times 0 - d.\tang x}{\tang^2 x} = \frac{-d.\tang x}{\tang^2 x}.$$

Et en remplaçant d. tang x par sa valeur $\frac{dx}{\cos^2 x}$ on aura :

$$d.\cot x = -\frac{dx}{\cos^2 x} : \tang^2 x = \frac{-dx}{\cos^2 x \tang^2 x}, \quad (47).$$

Or de l'équation $\frac{\sin x}{\cos x} = \tang x$, on tire $\sin x = \cos x \times \tang x$, d'où $\sin^2 x = \cos^2 x \tang^2 x$.

Donc, dans l'équation (47), on peut remplacer le dénominateur du second membre par $\sin^2 x$, et l'on aura enfin

$$d.\cot x = \frac{-dx}{\sin^2 x}, \quad (48).$$

34. — La différentielle de sécante x se trouverait d'une façon analogue. En effet, par la trigonométrie, on sait que le rayon est une moyenne proportionnelle entre le cosinus et la sécante, de sorte qu'on a $\text{séc}\, x = \frac{1}{\cos x}$.

En différantiant cette équation par l'art. 11, on aura :

$$d.\text{séc}\, x = d.\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x\, d.1 - 1.d.\cos x}{\cos^2 x} = -\frac{d.\cos x}{\cos^2 x}.$$

Remplaçant, dans cette équation, — d . cos x par sa valeur sin x dx donnée par l'équation (45), on aura :

$$d.\text{séc}.x = \frac{\sin x\, dx}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x}\,\frac{1}{\cos x}\,dx, \quad (49).$$

Or, nous avons vu précédemment que $\frac{\sin x}{\cos x} = \tang x$ et que $\frac{1}{\cos x} = \text{séc}.\ x$. Mettant ces valeurs dans l'équation (49), on aura enfin :

$$d.\text{séc}.\ x = \tang\ x\ \text{séc}.\ x\ dx.\ (49^{\text{bis}})$$

35. — De même pour trouver la différentielle de cosé-

cante x, on sait par la trigonométrie que $\text{coséc. } x = \frac{1}{\sin x}$. En différentiant, on a, par l'art. 11,

$$d \,.\, \text{coséc. } x = \frac{\sin x \, d \,.\, 1 - 1 \,.\, d \,.\, \sin x}{\sin^2 x} = - \frac{d \,.\, \sin x}{\sin^2 x}.$$

En remplaçant, dans cette équation, $- d \,.\, \sin x$ par sa valeur $- \cos x \, dx$, donnée par l'équation (42), on aura :

$$d \,.\, \text{coséc. } x = - \frac{\cos x \, dx}{\sin^2 x} = - \frac{\cos x}{\sin x} \frac{1}{\sin x} dx.$$

Or, comme nous avons vu que $\frac{\sin x}{\cos x} = \text{tang } x$, on a $- \frac{\cos x}{\sin x} = - \frac{1}{\text{tang } x}$ et nous avons vu également que $\frac{1}{\sin x} = \text{coséc. } x$, donc en mettant ces valeurs dans l'équation précédente, on aura :

$$d \,.\, \text{coséc. } x = - \frac{1}{\text{tang } x} \text{coséc } x \, dx.$$

Mais, trigonométrie, comme $\text{tang } x \times \cot x =$ le carré du rayon ou 1, on a aussi $\frac{1}{\text{tang } x} = \cot x$ ; et en mettant cette valeur dans l'équation précédente, on aura :

$$d \,.\, \text{coséc. } x = - \cot x \, \text{coséc } x \, dx \quad (50).$$

36. — Cherchons encore maintenant la différentielle de sinus verse x. On sait que si l'on a le sinus A B d'un arc A C ou x, la partie B C du rayon, comprise entre le pied B du sinus et l'origine C de l'arc s'appelle sinus verse.

Fig. 3.

Cela posé, on voit que le cosinus O B de x plus le sinus verse B C donnent une somme égale au rayon O C ; donc on a :

$$\text{sin verse } x + \cos x = 1,$$

et en différentiant, on trouve

$$d \,.\, \text{sin verse } x + d. \cos x = d \,.\, 1 \text{ ou } 0, \text{ d'où}$$

$$d. \text{ sin verse } x = - d \,.\, \cos x \,;$$

et en remplaçant $- d \,.\, \cos x$ par sa valeur $\sin x \, d \, x$ donné par l'équation (45), on aura enfin :

$$d \,.\, \text{sin verse } x = \sin x \, dx. \quad (51).$$

37. *Remarque.* — Les principes précédents, bien appliqués, suffisent pour arriver à différentier toute expression

affectée de quantités transcendantes. Nous allons donner quelques exemples.

1°. — Soit à différentier $y = a^{b^x}$. Faisons $b^x = u$, nous aurons ainsi $y = a^u$ ; différentions, par l'art. 26, nous aurons en remplaçant x par u et $d.\,a^x$ ou $d\,a^u$ par dy :
$\frac{dy}{du} = a^u \, L\,a$, ou un mettant pour $a^u$ sa valeur : $\frac{dy}{du} = a^{b^x} \, La$.

Différentions maintenant $u = b^x$ par le même article, en y remplaçant y par u et a par b, nous aurons :

$$\frac{du}{dx} = b^x \, L\,b.$$

En multipliant ces deux résultats membre à membre, (ce qui est permis, art. 17, car on a ici $y = a^u$ et $u = b^x$ ou $y = f\,u$ et $u = \varphi\,x$), on aura

$$\frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \text{ ou } \frac{dy}{dx} = a^{b^x} \, L\,a\,b^x\,L\,b = a^{b^x}\,b^x\,L\,a\,L\,b.$$

2°. — Soit encore $y = z^v$. Par les logarithmes, on obtient $\log y = v \log z$. En différentiant, on a par l'art. 9.

$$d.\log y = v\,d.\log z + \log z\,d.\,v.$$

En remplaçant l'indication des différentielles logarithmiques par leurs valeurs données par l'art. 28, on aura :

$$\frac{dy}{y} = v\frac{dz}{z} + \log z\,d\,v \text{ d'où } dy = y\left(v\frac{dz}{z} + \log z\,d\,v\right),$$

et en remplaçant, dans le second membre, y par sa valeur $z^v$, on aura enfin

$$dy = z^v\left(v\frac{dz}{z} + \log z\,d\,v\right).$$

3°. — Soit encore $y = z^{t^u}$ ; faisons $t^u = v$, l'équation se réduit à $y = z^v$. On a donc deux équations $y = z^v$ et $v = t^u$, qui sont de la même forme que l'équation traitée à l'exemple précédent. On aura donc, comme ci-dessus :

$$d\,y = z^v\left(v\frac{dz}{z} + \log z\,d\,v\right),$$

et par analogie

$$d\,v = t^u\left(u\frac{dt}{t} + \log t\,du\right).$$

Substituons maintenant dans la valeur de dy, donnée par l'avant dernière équation, les valeurs de v et de dv, nous aurons

$$dy = z^{t^u}\left[t^u \frac{dz}{z} + \log z \left(t^u (u \frac{dt}{t} + \log t\ du)\right)\right] = z^{t^u}$$
$$\left[t^u \frac{dz}{z} + \log z\, t^u \left(u \frac{dt}{t} + \log t\, du\right)\right] = z^{t^u} t^u \left(\frac{dz}{z} + \log z (u \frac{dt}{t} +\right.$$
$$\left.\log t\, du)\right) = z^{t^u} t^u \left(\frac{dz}{z} + \log z\, u \frac{dt}{t} + \log z \log t\ du\right).$$

## Théorème de Taylor.

38. — Remarquons d'abord qu'une expression telle que $\frac{dy}{dx}$ signifie qu'une fonction y d'une ou de plusieurs variables à été différentiée par rapport à la variable x et divisée par dx, et par suite une expression telle que $\frac{dy}{dx}dx$ veut dire différentielle de y par rapport à x ; donc si l'on avait l'équation $y = a v^4 x^3 u^2$, l'expression $\frac{dy}{dx}$ se déterminerait en considérant v et u comme constants, en différentiant alors par rapport à x et enfin en divisant le résultat par dx ; dans le cas présent, on aurait donc $\frac{dy}{dx} = 3 a v^4 x^2 u^2$.

On trouverait de la même façon $\frac{dy}{dv} = 4 a v^3 x^3 u^2$ ; et $\frac{dy}{du} = 2 a v^4 x^3 u$.

39. — Lorsque dans une fonction y de x, la variable x se change en x + h, y devient y′, et on a le même coefficient différentiel quand on considère x comme variable et h comme constant, que quand h est considéré comme variable et x comme constant, c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dh}.$$

En effet, si dans l'équation $y = f\ x$, nous mettons $x + h$, que nous représenterons par $x'$, à la place de x, nous aurons $y' = f\ x'$. La différentielle $dy'$ de $f\ x'$ sera une autre fonction de $x'$, que nous représenterons par $\varphi\ x'$, et qui sera multipliée par $dx'$ ; donc on aura $dy' = \varphi\ x'\ dx'$, ou en remplaçant $x'$ par sa valeur $x + h$, on aura

$$dy' = \varphi (x + h)\ d\,.\,(x + h).$$

Si l'on considère x comme variable et h comme constant dans cette équation, le facteur d (x + h) devient dx, et on a alors

$$dy' = \varphi\,(x + h)\,dx, \text{ d'où } \frac{dy'}{dx} = \varphi\,(x + h), \ (52).$$

Si, au contraire, on considère h comme variable et x comme constant, le facteur d (x + h) devient dh, et on a

$$dy' = \varphi\,(x + h)\,dh, \text{ d'où } \frac{dy'}{dh} = \varphi\,(x + h). \ (53).$$

Par conséquent $\frac{dy'}{dx}$ et $\frac{dy'}{dh}$ étant, respectivement, égaux à une même quantité $\varphi\,(x + h)$, sont égaux entr'eux, et l'on a enfin $\frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dh}$, (54).

Par exemple, si l'on avait $y = a\,x^4$, en mettant $x + h$ à la place de x, on aurait $y' = a\,(x + h)^4$. Donc $dy' = 4\,a\,(x + h)^3\ d\,(x + h)$. Si x est variable et h constant, on a $dy' = 4\,a\,(x + h)^3\,dx$ ; et si c'est h qui est variable et x constant, on a $dy' = 4\,a\,(x + h)^3\,dh$. Donc dans le premier cas $\frac{dy'}{dx} = 4\,a\,(x + h^3)$ ; et dans le second cas, on a $\frac{dy'}{dh} =$ encore $4\,a\,(x + h)^3$ ; donc $\frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dh}$.

40. — Si nous différentions maintenant les équations (52) et (53) par rapport à (x+h), nous aurons

$$d.\,\frac{dy'}{dx} \text{ ou } \frac{d^2\,y'}{dx} = d.\,\varphi\,(x+h) = \varphi'\,(x+h)\,d\,(x+h).$$

$$d.\,\frac{dy'}{dh} \text{ ou } \frac{d^2\,y'}{dh} = d.\,\varphi\,(x+h) = \varphi'\,(x+h)\,d.\,(x+h).$$

Faisons, comme précédemment, x variable et h constant dans la première équation, et h variable et x constant dans la seconde, nous aurons

$$\frac{d^2\,y'}{dx} = \varphi'\,(x+h)\,dx,$$

et

$$\frac{d^2\,y'}{dh} = \varphi'(x+h)\,dh\ ;$$

d'où en divisant, dans le premier cas par dx, et dans le second par dh, on a

$$\frac{d^2 y'}{dx^2} = \varphi'(x+h),$$

$$\frac{d^2 y'}{dh^2} = \varphi'(x+h);$$

donc, enfin,
$$\frac{d^2 y'}{dx^2} = \frac{d^2 y'}{d h^2}$$

Par le même procédé on trouverait que $\frac{d^3 y'}{dx^3} = \frac{d^3 y'}{d h^3}$, $\frac{d^4 y'}{dx^4} = \frac{d^4 y'}{d h^4}$, et ainsi de suite.

41. — Soit encore $y'$ une fonction de $x+h$; développons-la par rapport aux puissances de h et supposons le résultat représenté comme ceci

$$y' = y + A h + B h^2 + C h^3 + \text{etc.} \dots (55.)$$

Les coefficients A, B, C, etc., sont des fonctions inconnues de x, que nous devons déterminer ; y est la fonction de x.

A cet effet, différentions cette équation (55) par rapport à x et divisons par dx, nous aurons

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{dy}{dx} + h \frac{d A}{dx} + h^2 \frac{d B}{dx} + h^3 \frac{d C}{dx} + \text{etc.}, (56).$$

Différentions maintenant la même équation (55) par rapport à h, et divisons par d h, nous aurons

$$\frac{dy'}{dh} = A + 2 B h + 3 C h^2 + \text{etc.}, (57);$$

car, y, fonction de x, est ici considéré comme constant et n'a pas de différentielle, la différentielle de A h est A dh, et comme il faut diviser par dh, il reste A ; etc.

Les premiers membres des équations (56) et (57) étant égaux, les seconds membres seront identiques ; égalant donc entr'eux les coefficients des mêmes puissances de h, on aura :

$$\frac{dy}{dx} = A, \frac{d A}{dx} = 2 B \text{ ou } B = \frac{d A}{2 dx}, \frac{d B}{dx} = 3 C \text{ ou } C = \frac{d B}{3 dx},$$
etc.

Substituons maintenant la valeur de A, donnée par la première de ces équations, dans la seconde, on aura

$$B = d \frac{dy}{dx} : 2 dx = \frac{d^2 y}{dx} : 2 dx = \frac{d^2 y}{2 dx^2} = \frac{1}{1.2} \frac{d^2 y}{dx^2};$$

Substituons cette valeur dans celle de C, nous aurons

$$C = d.\frac{1}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} : 3\,dx = \frac{1}{1.2}\frac{d^3y}{dx^2} : 3\,dx = \frac{1}{1.2}\frac{d^3y}{3\,dx^3} = \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^3};$$

ainsi de suite.

Remplaçons maintenant dans l'équation (55), A, B, C, etc. par les valeurs que nous venons de trouver, on aura

$$y' = y + \frac{dy}{dx}h + \frac{1}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2}h^2 + \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^3}h^3 + \text{etc.},$$

ou $$y' = y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

et en remplaçant $y'$ par sa valeur $f(x+h)$, on aura enfin

$$f(x+h) = y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}, \quad (58),$$

*c'est ce qu'on appelle la formule de Taylor.*

Elle peut encore se mettre sous la forme suivante en observant que $y = f\,x$ :

$$f(x+h) = f\,x + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}, \text{ etc.}, \quad (59).$$

42. — Comme application de cette formule, nous allons développer en séries quelques fonctions.

1°. — Soit $y' = \sqrt{x+h}$ ; on a donc $y = \sqrt{x} = x^{1/2}$.

En différentiant successivement, on a :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\,x^{1/2-1 \text{ ou } -1/2} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(d.\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\right) : dx = \left(\frac{1}{2}d.\frac{1}{\sqrt{x}}\right) : dx = \left(\frac{1}{2}d.\frac{1}{x^{1/2}}\right) : dx = \left(\frac{1}{2}d.x^{-1/2}\right) : dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^{-1/2-1 \text{ ou } 3/2}dx\right) : dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right) = -\frac{1}{4}x^{-3/2} = -\frac{1}{4}\frac{1}{x^{3/2}} = -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x^3}}.$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \left(d.-\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right) : dx = \left(d.-\frac{1}{4}\frac{1}{x^{3/2}}\right) : dx = \left(d.-\frac{1}{4}x^{-3/2}\right) : dx = -{}^{3/2}\left(-\frac{1}{4}x^{-3/2-1 \text{ ou } -5/2}dx\right) : dx = -\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{4}x^{-5/2}\right) =$$

$\frac{3}{8} x^{-5/2} = \frac{3}{8} \frac{1}{x^{5/2}} = \frac{3}{8} \frac{1}{\sqrt{x^5}} = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}$,

$\frac{d^4 y}{dx^4} = $ etc.

Substituant ces valeurs dans la formule de Taylor, on aura :

$y'$ ou $\sqrt{x+h} = y$ ou $\sqrt{x} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} h - \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{x^3}} \frac{h^2}{1.2} + \frac{3}{8\sqrt{x^5}} \frac{h^3}{1.2.3}$, etc.,

ou $\sqrt{x+h} = \sqrt{x} + \frac{1}{2} \frac{h}{\sqrt{x}} - \frac{1}{8} \frac{h^2}{\sqrt{x^3}} + \frac{1}{16} \frac{h^3}{\sqrt{x^5}}$, etc

2e. — Soit $y' = \sin(x+h)$, donc $y = \sin x$. Différentions successivement, nous aurons

$\frac{dy}{dx} = \frac{d.\sin x}{dx} = \cos x$, (art. 30 éq. 42),

$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$, (art. 31 éq. 45),

$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d. -\sin x}{dx} = -\cos x$, (art. 30 éq. 42),

$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{d. -\cos x}{dx} = \sin x$, (art. 31 éq. 45),

etc.

Substituant ces valeurs dans la formule de Taylor, on a

$y'$ ou $\sin(x+h) = y$ ou $\sin x + \cos x\ h - \sin x \frac{h^2}{1.2} - \cos x \frac{h^3}{1.2.3} + \sin x \frac{h^4}{1.2.3.4}$ + etc., ou

$\sin(x+h) = \sin x + \cos x \frac{h}{1} - \sin x \frac{h^2}{1.2} - \cos x \frac{h^3}{1.2.3} + \sin x \frac{h^4}{1.2.3.4} +$, etc.

Si dans cette équation, nous supposons $x = 0$, alors $\sin x = 0$, $\cos x = 1$, et le développement se réduit à

$\sin(0+h) = 0 + 1 \frac{h}{1} - 0 \frac{h^2}{1.2} - 1 \frac{h^3}{1.2.3} + 0 \frac{h^4}{1.2.3.4}$ + etc.,

ou $$\sin h = h - \frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

3°. Soit $y' = \cos(x+h)$, donc $y = \cos x$. En opérant comme dans l'exemple précédent, on trouverait

$$\cos h = 1 - \frac{h^2}{1.2} + \frac{h^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

4° Soit $y' = \log(x+h)$, donc $y = \log x$. Différentions successivement :

$dy = d. \log x = \frac{dx}{x}$ (art. 28), donc $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$,

$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(d . \frac{1}{x}\right) : dx = (d . x^{-1}) : dx = (-1 \ x^{-1-1} dx) : dx = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$,

$\frac{d^3 y}{dx^3} = \left(d . -\frac{1}{x^2}\right) : dx = (d . -x^{-2}) : dx = -2 \times - x^{-2-1} dx : dx = 2 x^{-3} = 2 \frac{1}{x^3} = \frac{2}{x^3}$,

etc.

Substituant ces valeurs dans la formule de Taylor, on a :

$$y' \text{ ou } \log(x+h) = y \text{ ou } \log x + \frac{1}{x} h - \frac{1}{x^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{2}{x^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

$$\text{ou } \log(x+h) = \log x + \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3}, \text{ etc., (60).}$$

5° — Voici un autre moyen de trouver le développement du logarithme de $x + h$.

On cherche d'abord le développement de $\log(1+x)$, en égalant cette expression à une suite de termes ordonnés suivant les puissances de x, en observant toutefois que, dans cette suite, il ne peut y avoir de terme indépendant de x, car si l'on avait

$$\log(1+x) = A + Bx + Cx^2 + \text{etc.},$$

cette équation devant se vérifier quel que soit x, il en résulterait qu'en faisant $x = 0$, on aurait $\log. 1 = A$ ; or $\log. 1 = 0$, donc A devrait être zéro, donc il n'y pas de terme indépendant de x.

Nous écrirons donc

$$\log(1+x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc., (61),}$$

et changeant x en z, nous aurons semblablement

$$\log(1+z) = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{etc., (62),}$$

mais z est arbitraire ; donc nous pouvons supposer entre x et z la relation

$$(1+x)^2 = 1 + z \text{ ; ou } 1 + 2x + x^2 = 1 + z,$$

d'où $z = 2x + x^2$.

Substituant cette valeur de z dans l'équation (62), nous aurons

$\log(1+z)$ ou $\log(1+x^2) = A(2x+x^2)+B(2x+x^2)^2 + C(2x+x^2)^3 +$ etc.,

et en développant

$\log(1+x)^2 = 2Ax + Ax^2 + B(4x^2+4x^3+x^4) + C(8x^3+12x^4+6x^5+x^6) +$ etc.,

$= 2Ax + Ax^2 + 4Bx^2 + 4Bx^3 + Bx^4 + 8Cx^3 + 12Cx^4 + 6Cx^5 + Cx^6 +$ etc.

$$= 2Ax + \left.\begin{matrix} A \\ +4B \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} 4B \\ +8C \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} B \\ +12C \\ +16D \end{matrix}\right\} x^4 + \text{etc.} \quad (63)$$

Mais d'après la théorie des logarithmes, on a aussi $\log(1+x)^2 = 2\log(1+x)$, ou en mettant à la place de $\log(1+x)$ sa valeur donnée par le développement (61), on a

$$\log(1+x)^2 = 2(Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{etc.});$$

et en substituant cette valeur de $\log(1+x)^2$ dans le premier membre de l'équation (63), on aura :

$2Ax + 2Bx^2 + 2Cx^3 + \text{etc.} = 2Ax + (A+4B)x^2 + (4B+8C)x^3 +$ etc.

Cetté équation devant se vérifier quel que soit x, on peut égaler entre eux les termes effectés des mêmes puissances de x, nous aurons ainsi :

$$2A = 2A,\ 2B = A + 4B,\ 2C = 4B + 8C, \text{ etc.},$$

d'où nous tirons

$-A = 4B - 2B = 2B$, donc $B = -\frac{A}{2}$,

$-4B = 8C - 2C = 6C$, donc $C = -\frac{4B}{6} = -\frac{2B}{3} = -\frac{2}{3}\left(-\frac{A}{2}\right) = \frac{2A}{6} = \frac{A}{3}$,

etc.

Si nous substituons ces valeurs de B, C, etc., dans l'équation (61), nous aurons

$\log(1+x) = Ax - \frac{A}{2}x^2 + \frac{A}{3}x^3 -$ etc., $= A\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \text{etc.}\right) + C$, (64).

La constante C est nulle, car en faisant $x = 0$, on aura $C = \log 1 = 0$.

Faisons $x = \frac{h}{x}$, nous aurons $1 + x = 1 + \frac{h}{x} = \frac{x+h}{x}$, donc $\log(1 + x) = \log \frac{x+h}{x} = \log(x+h) - \log x$; et si nous substituons cette valeur de $\log(1+x)$ et celle de $x = \frac{h}{x}$, dans l'équation (64), nous aurons

$$\log(x+h) - \log x = A\left(\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \text{etc.}\right), \ (65),$$

$$\text{ou } \log(x+h) = \log x + A\left(\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \text{etc.}\right), \ (66).$$

*Remarque I.* — En divisant par h l'équation (65), on a

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = A\left(\frac{1}{x} - \frac{h}{2x^2} + \frac{h^2}{3x^3} - \text{etc.}\right),$$

et en passant à la limite où $h = 0$, on obtient,

$$\frac{d.\log x}{dx} = A\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{A}{x} \text{ d'où } d.\log x = A\frac{dx}{x} \ (67),$$

équation de même forme que l'équation (38).

*Remarque II.* L'équation (60) donne

$$\log(x+h) - \log x = \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \text{etc.},$$

$$\text{ou} \quad \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{x} - \frac{h}{2x^2} + \frac{h^2}{3x^3} - \text{etc.},$$

et en passant à la limite, où $h = 0$, on trouve

$$\frac{d.\log x}{dx} = \frac{1}{x},$$

$$\text{ou } d.\log x = \frac{dx}{x},$$

équation trouvée autrement à l'art. 28.

*Remarque III.* — Connaissant la différentielle de logarithme x, pour trouver celle de $a^x$, on fera $y = a^x$, et en prenant les logarithmes dans le système Népérien, on aura (en représentant par L les logarithmes Népériens) :

$$L\,y = L\,a^x \text{ où } L\,y = x\,L\,a \text{ ou } L\,a.\,x.$$

En différentiant, on aura

$$d.\,L\,y = \frac{dy}{y} \text{ (art. 28)} = L\,a.\,d\,x, \text{ d'où}$$

$$dy = y.\,L\,a.\,dx,$$

et en mettant la valeur de $y = a^x$, on aura

$$d.\,a^x = a^x.\,L\,a\,dx = a^x.\,dx.\,L\,a,$$

équation qui est la même que l'éq. (36) de l'art. 26.

*Remarque IV.* — D'après l'équation (38), art. 28, on a $d.\log x = \frac{dx}{x}\,\frac{\log e}{\log a}$, cela a été démontré vrai, de même que l'expression (67) qui précède laquelle donne $d.\log x = \frac{dx}{x}\,A$ ; donc $A = \frac{\log e}{\log a}$.

Dans l'équation (60) on a fait usage du système Népérien de logarithmes, puisqu'on a posé $d.\log x = \frac{dx}{x}$ (art. 28) ; donc dans le cas de cette éq. (60), A ou $\frac{\log e}{\log a} = \frac{\log e}{\log e} = 1$.

Dans l'équation (66) le système de logarithmes, est quelconque, et A y est égal à $\frac{\log e}{\log a}$; mais si l'on veut y faire usage du système Népérien, il faudra y faire $A = 1$ et alors on retrouvera l'équation (60).

De la différentiation des équations a deux variables. Expression générale de la différentielle de deux variables. Expression générale de la différentielle de trois variables parmi lesquelles on en prend deux pour variables indépendantes.

43. — Soit une équation entre deux variables représenteé par $F(x, y) = 0$, (68).

Si nous résolvions cette équation par rapport à l'une des inconnues, à y, par exemple, nous aurions un résultat de la forme $y = \varphi\,x$.

Si nous substituions maintenant cette valeur dans l'éq. (68), celle-ci pourrait être représentée par $F(x, \varphi\,x) = 0$, ou plus simplement par $f\,x = 0$.

Cette équation serait évidemment identique, tous les termes doivent s'y détruire quelque valeur que l'on veuille donner à x.

Si, par exemple, cette équation était du troisième degré, nous pourrions la représentér par $A\,x^3 + B\,x^2 + Cx$

$+ D = 0$, et comme toute valeur de $x$ doit la vérifier nous pourrions mettre $x + h$ à la place de $x$, et ainsi nous obtiendrions $A(x+h)^3 + B(x+h)^2 + C(x+h) + D = 0$, autrement dit si l'on a une équation $fx = 0$, quelque soit $x$, on aura encore $f(x+h) = 0$ ; et, en retranchant de cette dernière, l'équation $fx = 0$, il restera $f(x+h) - fx = 0$, et en divisant par $h$, on aura.

$$\frac{f(x+h) - fx}{h} = 0.$$

Or, l'équation $7^{bis}$ de l'art. 7, montre que

$$f(x+h) = fx + Ah + Bh^2 + \text{etc.},$$

d'où $$\frac{f(x+h) - fx}{h} = A + Bh + \text{etc.}, (69),$$

et comme le premier membre de cette équation est nul, d'après ce que nous venons de voir, on a donc $A + Bh + \text{etc.}, = 0$, ce qui montre que $A = 0$, quand on fait $h = 0$.

Donc, si dans l'équation (69), on passe à la limite où $h = 0$, on aura

$\frac{d.fx}{dx} = A = 0$, d'où $d.fx = A\,dx = 0$, ou en remettant à la place de $fx$ son expression $F(x, \varphi x) = 0$, on aura $d.F(x, \varphi x) = A\,dx = 0$, et en mettant à la place de $\varphi x$ sa valeur $y$, on aura enfin

$$d.F(x, y) = A\,dx = 0, (70).$$

*Remarque I.* — Nous venons de voir qu'un regardant $y$ comme une fonction de $x$, si l'on différentie l'équation $F(x, y) = 0$, on peut égaler le résultat à zéro. En agissant ainsi, dans chaque cas particulier, nous pourrons déterminer la valeur du coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$.

Ainsi, soit par exemple

$$F(x, y) = x^2 + 3ay - y^2 = 0. (71).$$

Différentions et égalons le résultat à zéro, nous aurons

$$2x\,dx + 3a\,dy - 2y\,dy = 0, (72),$$

d'où $$2x\,dx = 2y\,dy - 3a\,dy = dy(2y - 3a),$$

d'où $$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2y - 3a}, (73).$$

*Remarque II.* — Si nous comparons le procédé qui nous a fait obtenir l'équation (73) avec le procédé de différen-

tiation que nous avons employé jusqu'à présent, nous voyons qu'en opérant d'après cette seconde méthode, nous aurions dû d'abord mettre l'équation (71) sous la forme $y = f x$, et par conséquent la résoudre par rapport à y, pour en déduire ensuite, par la différentiation, la valeur de $\frac{dy}{dx}$. En suivant ce procédé, nous trouverions d'abord

$$y^2 - 3\,ay - x^2 = 0 \;\therefore\; y = \frac{3\,a}{2} \pm \sqrt{\frac{9\,a^2}{4} + x^2},$$

et ensuite, en différentiant, nous aurons

$$dy = d.\left(\frac{3\,a}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}a^2 + x^2}\right) = d. \pm \sqrt{\frac{9}{4}a^2 + x^2} = d. \pm \left(\frac{9}{4}a^2 + x^2\right)^{1/2} = \pm \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4}a^2 + x^2\right)^{1/2 - 1 \text{ où } -1/2} d.\left(\frac{9}{4}a^2 + x^2\right) = \pm \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4}a^2 + x^2\right)^{-1/2} 2x\,dx = \pm \frac{1}{2}\,2x\,dx\left(\frac{9}{4}a^2 + x^2\right)^{-1/2} = \pm x\,dx \frac{1}{\left(\frac{9}{4}a^2 + x^2\right)^{1/2}} = \pm x\,dx \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4}a^2 + x^2}},$$

donc

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{x}{\sqrt{\frac{9}{4}a^2 + x^2}}, (74).$$

Cette valeur de $\frac{dy}{dx}$ affecte une autre forme que celle qui nous est donnée par l'équation (73) ; mais si nous mettons dans celle-ci la valeur de $y = \frac{3\,a}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}a^2 + x^2}$, cette équation deviendra

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\,x}{2.\left(\frac{3\,a}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}a^2 + x^2}\right) - 3\,a} = \frac{2\,x}{\pm 2\sqrt{\frac{9}{4}a^2 + x^2}} = \pm \frac{x}{\sqrt{\frac{9}{4}a^2 + x^2}},$$

ainsi que nous venons de le trouver (équation 74).

*Remarque III.* — L'équation (72) est ce qu'on appelle la différentielle première de l'équation (71) ; et l'équation (73) donne le coefficient différentiel du premier ordre.

Si nous voulons avoir l'équation qui donne le coefficient différentiel du second ordre, c'est-à-dire $\frac{d^2y}{dx^2}$, nous diviserons l'équation (72) par dx, et nous poserons $\frac{dy}{dx} = p$, art. 19, nous obtiendrons ainsi :

$$\frac{2\,x\,dx}{dx} + 3\,a\frac{dy}{dx} - 2\,y\frac{dy}{dx} = 0 \text{ ou } 2\,x + 3\,a\,p - 2\,y\,p = 0.$$

Regardons y et p comme des fonctions de x, et différentions, nous aurons

$$2\,dx + 3\,a\,dp - 2\,y\,dp - 2\,p\,dy = 0\,;$$

divisons par dx, et mettons p à la place de $\frac{dy}{dx}$, nous aurons

$$2\frac{dx}{dx} + 3\,a\,\frac{dp}{dx} - 2\,y\,\frac{dp}{dx} - 2\,p\,\frac{dy}{dx} = 0, \text{ ou } 2 + 3\,a\,\frac{dp}{dx} - 2\,y\,\frac{dp}{dx} - 2\,p^2 = 0,$$

d'où, nous tirerons

$$3\,a\frac{dp}{dx} - 2\,y\frac{dp}{dx} = 2\,p^2 - 2 \text{ ou } \frac{dp}{dx}(3a - 2y) = 2\,p^2 - 2, \text{d'où}$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{2\,p^2 - 2}{3\,a - 2\,y}, \ (75).$$

Or, nous avons vu que $p = \frac{dy}{dx}$, donc $\frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$, et en mettant ces valeurs dans l'équation (75), nous aurons pour le coefficient differentiel du second ordre.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2p^2 - 2}{3a - 2y} = \frac{2}{3a - 2y}(p^2 - 1) = \frac{2}{3a - 2y}\left(\frac{dy^2}{dx^2} - 1\right) = \frac{2\,dy^2}{(3a - 2y)\,dx^2} - \frac{2}{3a - 2y},$$

et en chassant les dénominateurs nous aurons, pour la différentielle seconde de l'équation (71),

$$d^2y\,(3a - 2y) = 2p^2\,dx^2 - 2\,dx^2 = 2\,\frac{dy^2}{dx^2}\,dx^2 - 2dx^2 = 2\,dy^2 - 2\,dx^2, \ (76).$$

*Remarque IV.* — Pour avoir la différentielle troisième ou le coefficient différentiel du troisième ordre, on fera $\frac{dp}{dx} = q$ (art. 19), et l'équation (75) deviendra, après avoir chassé les dénominateurs :

$$q\,(3a - 2y) = 2p^2 - 2 \text{ ou } 3aq - 2y\,q = 2p^2 - 2\,;$$

différentiant, en regardant y, p, q, comme des fonctions de x, nous aurons

$$3\,a\,dq - 2\,y\,dq - 2\,q\,dy = 4\,p\,dp\,;$$

divisons par dx et mettons p à la place de $\frac{dy}{dx}$ et q à la place de $\frac{dp}{dx}$, nous aurons

$$3\,a\,\frac{dq}{dx} - 2\,y\,\frac{dq}{dx} - 2\,q\,p = 4\,pq,$$

d'où nous tirerons

$$\frac{dq}{dx}(3\,a - 2\,y) = 4\,p\,q + 2\,p\,q = 6\,p\,q$$

donc

$$\frac{dq}{dx} = \frac{6\,p\,q}{3\,a - 2\,y}.$$

Or, art. 19, $\frac{dq}{dx} = r = \frac{d^3\,y}{dx^3}$, donc $\frac{d^3\,y}{dx^3} = \frac{6\,p\,q}{3\,a - 2\,y} =$ (en mettant les valeurs de p et de q, art. 19) $= \frac{6}{3\,a - 2\,y}\,\frac{dy}{dx}\,\frac{d^2\,y}{dx^2} = \frac{6\,dy\,d^2\,y}{(3\,a - 2\,y)\,dx^3}$, tel est le coefficient différentiel du troisième ordre.

Ils suffit de chasser les dénominateurs pour avoir la différentielle troisième, savoir :

$$d^3\,y\,(3\,a - 2\,y)\,dx^3 = 6\,dy\,d^2\,y.$$

Ainsi de suite pour la différentielle quatrième, etc.

*Remarque V.* — Nous employons les lettres p, q, r, etc., pour effectuer les opérations de la manière que nous venons d'exposer ; mais on parviendrait au même résultat en différentiant l'équation (72) et en mettant dy pour la différentielle de y, $d^2y$ pour celle de dy, $d^3y$ pour celle de $d^2y$, etc. ; en regardant dx comme constant, et en observant que, art 9, la différentielle du produit 2y dy de deux variables égale $2\,dy\,dy + 2\,y\,d^2y$ ; on trouverait ainsi :

$$2\,dx\,dx + 3\,a\,d^2y - 2\,dy\,dy - 2\,y\,d^2y = 0, \text{ ou}$$
$$2\,dx^2 + 3\,a\,d^2y - 2\,dy^2 - 2y\,d^2y = 0, \text{ ou}$$
$$d^2y\,(3\,a - 2\,y) = 2\,dy^2 - 2\,dx^2,$$

expression qui est la même que l'équation (76).

44. — Voyons maintenant *l'expression générale* de la différentielle d'une fonction f (x, y) de deux variables.

A cet effet, représentons f (x, y) par u. Nous aurons en

différentiant cette fonction u par rapport à x, le terme $\frac{du}{dx}dx$ ; en effet, $\frac{du}{dx}dx$ veut dire différentielle de u par rapport à x, art. 38.

En différentiant ensuite cette équation u par rapport à y, nous aurons le second terme $\frac{du}{dy}dy$ ; de sorte que

$$d.\ f(x, y) \text{ ou } d.\ u = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy, (77) ;$$

car la différentielle d'une somme est égale à la somme des différentielles de ses parties, art. 15. L'expression ci-dessus veut dire simplement que la différentielle de u est égale à la somme des différentielles de u par rapport à x et de u par rapport à y.

Nous avons considéré ici x et y comme variables indépendantes, ou comme l'expression générale de la différentielle de f(x, y) ; mais si y, par exemple, est une fonction de x, l'expression ci-dessus se modifie. En effet, en différentiant la fonction y par rapport à x, nous aurons $dy = \frac{dy}{dx}dx$, art. 38.

Si l'on substitue ensuite cette valeur de dy dans l'expression différentielle de u ci-dessus, nous obtiendrons :

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}dx, (78).$$

*Remarque I.* — D'après l'art. 17, si u est considéré comme une fonction de y et y comme une fonction de x, le produit $\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}dx$ de l'équation (78), n'est autre chose que la différentielle de u prise par rapport à x renfermé dans y.

*Remarque II.* — La *différentielle totale* d'une fonction de x et de y étant donnée par l'equation (77), $du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy$, on nomme les expressions $\frac{du}{dx}dx$ et $\frac{du}{dy}dy$ les *différentielles partielles* de u.

Si u était une fonction de trois variables indépendantes x, y, z, nous aurions de même pour la différentielle totale de u:

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz,$$

et les termes $\frac{du}{dx}dx$, $\frac{du}{dy}dy$, $\frac{du}{dz}$ dz, seraient les différentielles partielles de u.

Ainsi de suite.

45. — Nous avons vu, art. 38, qu'une expression telle que $\frac{dy}{dx}$ signifiait qu'une fonction y avait été différentiée par rapport à la variable x, et divisée ensuite par dx.

Il résulte de là que si l'on a, par exemple, l'équation $\frac{dy}{dx} =$ A, et que, par division, l'on en déduit $1 = \frac{A}{\frac{dy}{dx}}$, on ne sait pas si l'on peut en conclure que $1 = A\frac{dx}{dy}$, comme l'algèbre le permet, car dans cette dernière équation la différentiation n'est plus celle de y par rapport à x, mais le contraire.

Nous devons donc démontré si ce résultat est vrai.

Pour cela, remarquons que, d'après l'art. 17, nous avons

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

Si, dans cette équation, nous faisons u = x, elle donne

$$\frac{dx}{dx} \text{ ou } 1 = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{dx},$$

d'où l'on tire $\frac{dx}{dy} = 1 : \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$,

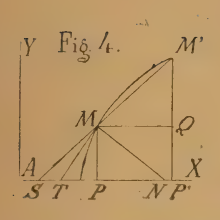
ce qui montre que le changement d'hypothèse de différentiation s'accorde avec l'Algèbre.

## Méthode des Tangentes.

46. — On appelle méthode des tangentes celle qui donne les expressions différentielles des tangentes, sous-tangentes, normales et sous-normales. Nous considérerons une courbe quelconque, cas général.

47. — Cherchons d'abord l'expression différentielle qui donne la longueur de la sous-tangente.

Soient x et y les coordonnées d'un point M, fig. 4, pris sur une courbe ; augmentons l'abscisse A P = x d'une




quantité $PP' = h$, menons l'ordonnée $P'M'$, et par les points M et M' faisons passer une sécante $M'S$. Il est évident que plus $PP'$ diminuera, plus $PS$ tendra à se confondre avec la sous-tangente $PT$, et quand $PP' = h$ deviendra nul, $PS$ se confondra avec $PT$; donc $PT$ est la limite vers laquelle tendra $PS$.

Si donc nous connaissions l'expression qui donne la valeur $PS$, en en prenant la limite, nous aurions celle qui donne la valeur de $PT$.

Or, les triangles semblables $M'MQ$ et $MSP$ donnent la proportion : $M'Q : MQ :: MP : PS$, ou, en remplaçant $MQ$ et $MP$ par leurs valeurs respectives h et y, $M'Q : h :: y : PS$, donc

$$PS = \frac{h.y}{M'Q}.$$

Mais $M'Q = M'P' - MP$. Et $M'P' = y' = f(x+h)$, ou d'après la formule de Taylor, art. 41, formule (58), $M'P' = y' = f(x+h) = y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}$ Et nous savons que $MP = y$, par hypothèse. Donc, en mettant pour $M'P'$ et $MP$, ces valeurs, nous aurons

$$M'Q = M'P' - MP = \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

Si maintenant nous substituons cette valeur de $M'Q$ dans celle de $PS$, nous aurons

$$PS = \frac{h.y}{M'Q} = \frac{h.y}{\frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}},$$ et en divisant les deux termes par h, nous obtiendrons enfin

$$PS = \frac{y}{\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h}{1.2} + \text{etc.}}$$

Et en passant à la limite où $h = 0$, $PS$ se confond avec $PT$, et nous aurons $PT = \frac{y}{\frac{dy}{dx}}$, ou, d'après l'art. 45, $PT = y\frac{dx}{dy}$; et en représentant par $x'$ et $y'$, au lieu de x et y,

les coordonnées du point M, nous aurons pour la valeur de la *sous-tangente* :

$$PT = y' \frac{dx'}{dy'}, (79).$$

48. — Pour trouver de même la valeur (longueur) de la sous-normale, au point M, même figure, menons la perpendiculaire MN sur MT, la sous normale sera PN. Pour la déterminer, remarquons que la perpendiculaire PM, du triangle rectangle TMN, étant moyenne proportionnelle entre les deux segments, de l'hypothénuse, TP et PN, nous avons la proportion

$$PT : PM :: PM : PN,$$

ou, en remplaçant PT par sa valeur (éq. 79), et PM par sa valeur $y'$, nous obtenons

$$y' \frac{dx'}{dy'} : y' :: y' : PN;$$

$$\text{donc } PN = y'^2 : y' \frac{dx'}{dy'} = y' : \frac{dx'}{dy'} = (\text{art. } 45) = y' \frac{dy'}{dx'};$$

$$\text{donc sous-normale } PN = y' \frac{dy'}{dx'}, (80).$$

49. — Pour trouver également la valeur de la tangente, remarquons que $MT = \sqrt{TP^2 + PM^2}$, d'après la théorie du carré de l'hypothénuse, donc, en remplaçant TP et PM, par leurs valeurs respectives $y' \frac{dx'}{dy'}$ et $y'$, nous avons pour la longueur de la tangente :

$$MT \text{ ou tangente} = \sqrt{y'^2 \frac{dx'^2}{dy'^2} + y'^2} = y' \sqrt{\frac{dx'^2}{dy'^2} + 1}, (81).$$

50. — Enfin la longueur de la normale se déterminera en remarquant que, dans le triangle rectangle PMN, on a

$$MN = \sqrt{PN^2 + PM^2},$$

et en remplaçant PN et PM par leurs valeurs respectives $y' \frac{dy'}{dx'}$ et $y'$, on trouve

$$MN \text{ ou normale} = \sqrt{y'^2 \frac{dy'^2}{dx'^2} + y'^2} = y' \sqrt{\frac{dy'^2}{dx'^2} + 1}, (82).$$

51. — Cherchons maintenant l'équation différentielle qui représente la tangente. Soient $x'$ et $y'$ les coordonnées du point de tangence M, même figure.

D'après la géométrie analytique à deux dimensions, nous savons que l'équation d'une droite, en coordonnées rectangulaires, peut être représentée, en fonction de la tangente trigonométrique de l'angle $\alpha$ qu'elle fait avec l'axe des abscisses et de l'ordonnée b à l'origine, par l'équation suivante : $y = \text{tang } \alpha . x + b.$

Donc la tangente M T à la courbe peut être représentée par cette équation générale. Mais cette droite M T passant par le point M de la courbe dont les coordonnées sont x' et y', son équation doit se vérifier par ces valeurs x' et y', on a donc $y' = \text{tang } \alpha . x' + b.$

En retranchant ces équations l'une de l'autre, on a pour la tangente MT :

$$y - y' = \text{tang } \alpha (x - x').$$

Mais la tangente trigonométrique tang $\alpha$ a pour expression $\frac{PM}{PT}$, (d'après la trigonométrie, triangle rectangle M P T ; le rapport P T étant le rayon et P M la tangente trigonométrique), donc tang $\alpha = \frac{PM}{PT}$ ; et en observant que PM $= y'$ et PT, sous tangente, $= y' \frac{dx'}{dy'}$, on a

$$\text{tang } \alpha = y' : y' \frac{dx'}{dy'} = \text{art. } 45 = y' : \frac{y' . dx'}{dy'} = \frac{y' dy'}{y' dx'} = \frac{dy'}{dx'} (82^{bis}).$$

Substituant cette valeur de tang $\alpha$ dans l'équation de la tangente M T, on a pour *l'équation de la tangente :*

$$y - y' = \frac{dy'}{dx'} (x - x'), (83).$$

52. — Pour trouver l'équation différentielle qui représente la normale, rappelons-nous que, d'après la géométrie analytique, si l'équation de la tangente est, comme nous venons de voir $y - y' = \frac{dy'}{dx'} (x - x')$

l'équation de la normale peut se déduire de cette équation, en changeant le signe du coefficient de $x - x'$ et en renversant la fraction qui représente ce coefficient, on a donc *pour l'équation de la normale* :

$$y - y' = - \frac{dx'}{dy'} (x - x'), (84).$$

53. — Nous donnons ci-après quelques applications des formules précédentes.

1°. — *Chercher la sous-tangente de la parabole.* La géométrie analytique donne pour l'équation de la parabole rapportée à son axe, etc., l'équation $y^2 = 2\,px$. En la différentiant, on trouve

$$2\,y\,dy = 2\,p\,dx\ ;\ \text{d'où}\ \frac{dy}{dx} = \frac{2p}{2y} = \frac{p}{y}.$$

Or, $x'$ et $y'$ étant les coordonnées du point de tangence, et ce point appartenant à la courbe, ses coordonnées doivent satisfaire à l'équation précédente ; on a donc pour le coefficient différentiel qui correspond à ce point $\frac{dy'}{dx'} = \frac{p}{y'}$. Si nous substituons cette valeur dans celle de la sous-tangente P T, équation (79), nous aurons

$$PT = y'\frac{dx'}{dy'} = \frac{y'}{\frac{dy'}{dx'}} = \frac{y'}{\frac{p}{y'}} = y'\frac{y'}{p} = \frac{y'^2}{p}.$$

Mais l'équation de la courbe étant $y^2 = 2\,px$, on a aussi $y'^2 = 2\,px'$, et en mettant cette valeur de $y'^2$ dans l'équation $\frac{y'^2}{p}$, on a enfin pour la valeur PT de *la sous-tangente*:

$$\text{P T ou sous-tangente} = \frac{y'^2}{p} = \frac{2px'}{p} = 2\,x', \quad (85).$$

2° — *Trouver la sous-normale de l'ellipse.* L'équation de l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes, etc., étant $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ; si on la différentie elle donne $2b^2x\,dx + 2\,a^2y\,dy = d\,(a^2b^2$ ou constante$) = 0$ ; d'où $dy = -\frac{2\,b^2x\,dx}{2\,a^2y}$ et $\frac{dy}{dx} = -\frac{2\,b^2x}{2\,a^2y} = -\frac{b^2x}{a^2y}$ ; et en prenant, comme ci-dessus, les coordonnées $x'$ et $y'$ du point de tangence, on a $\frac{dy'}{dx'} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x'}{y'}$. Substituant cette valeur de $\frac{dy'}{dx'}$ dans l'équation de la sous-normale P N (éq. 80), elle devient

$$\text{PN ou sous-normale} = y'\frac{dy'}{dx'} = -y'\frac{b^2}{a^2}\frac{x'}{y'} = -\frac{b^2}{a^2}x', \quad (86).$$

3° — *Donner l'expression de la tangente à l'hyperbole.* L'équation de l'hyperbole rapportée à ses axes, etc., origine au centre, pouvant être représentée par l'équation $y^2 - m^2 x^2 = p$ ; si l'on différentie cette équation, elle donne $2 y\, dy - 2 m^2 x\, dx = 0$ ; car d. p, constante, $= 0$. De cette équation on tire $dy = \frac{2 m^2 x\, dx}{2 y} = \frac{m^2 x\, dx}{y}$, d'où $\frac{dy}{dx} = m^2 \frac{x}{y}$ ; et en mettant, comme précédemment, les coordonnées $x'$ et $y'$ du point de tangence, on obtient $\frac{dy'}{dx'} = \frac{m^2 x'}{y'}$. En substituant cette valeur de $\frac{dy'}{dx'}$ dans l'équation générale (81) de la tangente M T, on a, en observant que d'après ce qui précède $\frac{dx'}{dy'} = \frac{y'}{m^2 x'}$ :

M T ou tangente $= y' \sqrt{\frac{dx'^2}{dy'^2} + 1} = y' \sqrt{\left(\frac{y'}{m^2 x'}\right)^2 + 1} =$ $y' \sqrt{\frac{y'^2}{m^4 x'^2} + 1} = y' \sqrt{\frac{y'^2 + m^4 x'^2}{m^4 x'^2}} = y' \frac{\sqrt{y'^2 + m^4 x'^2}}{m^2 x'} =$ $\frac{y'}{m^2 x'} \sqrt{y'^2 + m^4 x'^2}$.

Mais de l'équation $y^2 - m^2 x^2 = p$ de l'hyperbole, on tire $y'^2 - m^2 x'^2 = p$, d'où $y'^2 = p + m^2 x'^2$, donc $y'^2 + m^4 x'^2 = p + m^2 x'^2 + m^4 x'^2 = p + m^2 x'^2 (1 + m^2)$, donc l'équation de la *tangente*

$$M\, T = \frac{y'}{m^2 x'} \sqrt{p + m^2 x'^2 (1 + m^2)}, \quad (87).$$

Si nous prenons pour l'équation de l'hyperbole, celle-ci $a^2 y^2 - b^2 x^2 = - a^2 b^2$ ; en la différentiant, on trouve $2 a^2 y\, dy - 2 b^2 x\, dx = 0$ ; d'où $dy = \frac{2 b^2 x\, dx}{2 a^2 y} = \frac{b^2 x\, dx}{a^2 y}$; d'où $\frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y}$, et en prenant $x'$ et $y'$ on a $\frac{dy'}{dx'} = \frac{b^2}{a^2} \frac{x'}{y'}$, d'où $\frac{dx'}{dy'} = \frac{a^2}{b^2} \frac{y'}{x'}$. Substituant cette valeur de $\frac{dx'}{dy'}$ dans l'équation générale M T de la tangente, (éq. 81), on a

M T ou tangente $= y' \sqrt{\frac{dx'^2}{dy'^2} + 1} = y' \sqrt{\left(\frac{a^2 y'}{b^2 x'}\right)^2 + 1} =$

$$y' \sqrt{\frac{a^4 y'^2}{b^4 x'^2} + 1} = y' \sqrt{\frac{a^4 y'^2 + b^4 x'^2}{b^4 x'^2}} = \frac{y'}{b^2 x'}$$
$\sqrt{a^4 y'^2 + b^4 x'^2}$, (88).

## Maxima et minima dans les fonctions d'une seule variable.

54. — Nous avons vu, art. 41, formule (58), qu'en donnant à x un accroissement h, on change l'équation $y = f x$ en $y' = f(x+h)$, et on obtient la formule de Taylor, savoir :

$$f(x+h) = y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3 y}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Nous allons démontrer que l'on peut, dans cette série, donner à l'accroissement h, une valeur telle que l'un quelconque des termes de la série devienne plus grand que la somme de tous ceux qui le suivent.

En effet, si nous voulons, par exemple, que le terme $\frac{dy}{dx} h$ surpasse la somme de tous ceux qui le suivent, écrivons comme ceci la partie de la série comprenant ce terme et tous ceux qui le suivent :

$$\left(\frac{dy}{dx} + \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{h}{2} + \frac{d^3 y}{dx^3} \frac{h^2}{2.3} + \text{etc.}\right) h., \ (89).$$

Or, quand on fait $h = 0$, la partie $\frac{d^2 y}{dx^2} \frac{h}{2} + \frac{d^3 y}{dx^3} \frac{h^2}{2.3} +$ etc., de cette formule, s'anéantit, donc on conçoit que cette partie peut être rendue aussi petite qu'on voudra en prenant h très-rapproché de zéro, et être alors plus petite que $\frac{dy}{dx}$, qui lui est indépendant de h.

On a donc alors $\frac{dy}{dx} > \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{h}{2} + \frac{d^3 y}{dx^3} \frac{h^3}{2.3} +$ etc., et en multipliant par h les deux termes de cette inégalité, on a

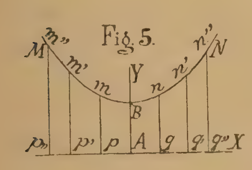
$$\frac{dy}{dx} h > \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \frac{d^3 y}{dx^3} \frac{h^3}{2.3} + \text{etc.},$$

ce qu'il fallait démontrer.

On ferait la même démonstration pour tout autre terme à l'égard de ceux qui le suivent.

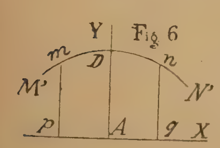
55. — Une équation entre deux variables $y = f x$ peut toujours être considérée comme l'équation d'une courbe

dont les valeurs de la fonction y seraient les ordonnées et celles de x les abscisses. On dit que cette fonction y est à son minimum, lorsqu'après avoir diminué successivement, elle est sur le point de recommencer à croître ; et qu'elle est à son maximum, lorsqu'après augmenté successivement, elle est arrivée au point passé lequel elle commence à décroître.




Soit, par exemple, la courbe M N, fig. 5., dont l'équation est $y = b + cx^2$. On voit que, à partir du point B, à droite comme à gauche, les ordonnées n q, n′ q′. . , ou m p, m′ p′. . ., etc., vont en augmentant, donc l'ordonnée B A est un minimum de la fonction y. Et en effet, cela découle de la nature même de l'équation. Car, soit en A, l'origine des axes coordonnés, en A, $x = o$ et $y = b$ qui est positif. Quand les abscisses positives A q, A q′, etc., ou négatives A p, A p′, etc., prennent de la valeur à partir de l'origine où elles sont égales à zéro, le produit $cx^2$ est positif et dès lors $y = b +$ une quantité positive $cx^2$ ; donc y augmente de valeur, et plus les abscisses positives ou négatives augmentent plus la fonction y acquiert de valeur, et ainsi indéfiniment ; donc on peut conclure également que la fonction y n'a pas de maximum, c'est-à-dire qu'elle peut augmenter jusqu'à l'infini, sans devoir jamais décroître ; c'est-à-dire enfin qu'en supposant un point mobile qui se meut sur cette ligne, à partir d'un point M vers N, en B, il arrive au point où la fonction y a son minimum, et passé ce point, vers N, situé à l'infini, le mobile ne rencontrera plus de point sur la courbe où y commencera à décroître, y augmentera jusqu'à l'infini.

La courbe M′ N′, fig. 6, dont l'équation est $y = b - cx^2$, nous présente un cas de maximum au point D. En effet, les ordonnées y diminuent à partir de ce point, soit vers les abscisses positives A q, soit vers les abscisses négatives A p.




En A, origine des axes coordonnés,

$x = o$, et $y = AD = b$. Lorsque les abscisses prennent de la valeur, à partir de zéro, au point A, en augmentant soit positivement soit négativement, la fonction $y$ qui égalait $b$ diminue de $cx^2$ qui est toujours de même signe.

56. — Il y a des courbes qui n'ont qu'un maximum, d'autres qu'un minimum ; il en est qui ont l'un et l'autre, et d'autres qui n'en ont pas du tout.

Le cercle C B D, fig. 7, nous offre un exemple de courbe ayant un maximum et un minimum. En effet, l'équation de ce cercle est $r^2 = (y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2$.

Résolvons cette éq. par rapport à $y$, nous aurons : $(y-\beta)^2 = r^2 - (x-\alpha)^2 \therefore y - \beta = \pm \sqrt{r^2 - (x-\alpha)^2} \therefore y = \beta \pm \sqrt{r^2 - (x-\alpha)^2}$.

Pour la même abscisse $oP = \alpha$, on à $y = \beta \pm \sqrt{r^2} = \beta \pm r$. Donc on a un maximum $\beta + r$ ou PD et un minimum $\beta - r = BP$.

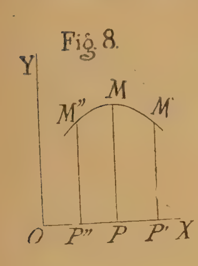
C'est un maximum et un minimum, car pour toute autre valeur de $x$, $(x-\alpha)^2$ est une quantité positive. Donc si $(x-\alpha)^2$ est $< r^2$, on a $y = \beta \pm$ une quantité $< r$ ; donc $y = \beta + < r$ est $< y = \beta + r$ ou PD, et $y = \beta - < r$ est $> y = \alpha - r$ ou BP. Et si $(x-\alpha)^2$ est $> r^2$, on a $y = \beta \pm$ une quantité imaginaire.

57. — Comme nous venons de voir dans l'exemple précédent, quand une fonction $y$ d'une variable $x$ a un maximum ou un minimum, ce maximum ou ce minimum peut être déterminé quand on connaît l'abscisse qui y correspond. Ainsi, dans une courbe dont l'équation est $y = fx$, si on connaît la valeur $a$, de l'abscisse $x$, qui correspond au maximum ou au minimum, il suffit de faire $x = a$ dans l'équation $y = fx$, pour déterminer la valeur de $y$ qui est le maximum ou le minimum cherché.

58. — Soit $y = fx$, une fonction $y$ de la variable $x$ ; soit $h$ un accroissement donné à la variable $x$. L'ordonnée $y$ sera un maximum, lorsque les fonctions $f(x+h)$ et $f(x-h)$ seront en même temps plus petits que $f x$ ; et elle sera un minimum, lorsque ces deux fonctions seront en même

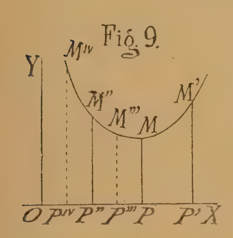
temps plus grandes que f x ; enfin si l'une de ces fonctions est plus grande et l'autre moindre que f x, il n'y aura ni maximum ni minimum.

En effet, soit $y = f x$ une ordonnée P M, fig. 8, qui est arrivée à son maximum. Si l'abscisse $x = o P$ reçoit un accroissement h représenté par PP′, et si cette même abscisse o P diminue de cette quantité h représentée par PP″, on aura pour les conditions que PM soit un maximum, les inégalités :




$$P'M' < PM, \quad P''M'' < PM \text{ ou}$$
$$f(x+h) < f x, \quad f(x-h) < f x.$$

Si, au contraire, PM est arrivé à son minimum correspondant à l'abscisse $x = o P$, fig. 9, en prenant, comme ci-dessus, $PP' = PP'' = h$, nous aurons pour les conditions du minimum :




$$P'M' > PM, \quad P''M'' > PM, \text{ ou}$$
$$f(x+h) > f x, \quad f(x-h) > f x.$$

Enfin, fig. 9, si on a l'ordonnée P″M″ correspondant à l'abscisse $x = o P''$, et si l'on prend $P''P''' = P''P^{IV} = h'$, on peut considérer l'ordonnée P″ M″ comme $y = f x$, et les ordonnées P‴M‴ et $P^{IV}M^{IV}$, respectivement comme $f(x+h')$ et $f(x-h')$.

Si alors on a P‴ M‴ ou $f(x+h) < P''M''$ ou f x ; et $P^{IV}M^{IV}$ ou $f(x-h) > P''M''$ ou f x, il est clair que P″ M″ ou f x n'est ni un maximum, ni un minimum.

59. — Examinons maintenant dans quel cas ces conditions de maximum et de minimum seront remplies.

Nous allons démontrer que pour que fx soit un maximum ou un minimum, il faut, après avoir développé $f(x+h)$ et $f(x-h)$ d'après le théorème de Taylor, art. 41, que $\frac{dy}{dx}$ soit nul ; cela étant, on aura un maximum si $\frac{d^2y}{dx^2}$ est négatif, et un minimum si ce coefficient est positif.

En effet, par le théorème de Taylor, on a

$$f(x+h) = y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{2.3} + \text{etc.}, \quad (90);$$

et si, dans cette formule, on change h en — h, on obtient:

$$f(x-h) = y - \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} - \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{2.3} + \text{etc.}, \quad (91).$$

D'après l'art. 58, pour que $y = fx$ soit un maximum ou un minimum, il faut que ces deux développements soient tous deux plus petits ou tous deux plus grands que y ou f x.

Or, pour que cela soit, il faut que $\frac{dy}{dx}$ soit nul, car, sinon, en donnant une valeur très-petite à h, on pourra toujours, d'après l'art. 54, faire en sorte que $\frac{dy}{dx}h$ surpasse la somme algébrique de tous les termes qui le suivent, et par conséquent, la somme algébrique de tous ces termes, y compris $\frac{dy}{dx}h$, aura le signe de $\frac{dy}{dx}h$, dans les deux développements. Or, dans l'un ce signe est positif, et dans l'autre il est négatif. Donc, dans l'un des développements, f (x + h), par exemple, y serait augmenté d'une quantité, et dans l'autre ou f (x — h), il serait diminué d'une autre quantité. Donc, l'un des développements soit f (x + h) serait plus grand que y ou f x et l'autre serait moindre; par conséquent, il ne pourrait y avoir ni maximum ni minimum si $\frac{dy}{dx}$ n'est pas nul.

Mais si $\frac{dy}{dx} = 0$, alors les développements (90) et (91), se réduisent à ceux-ci :

$$f(x+h) = y + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{2.3} + \text{etc.},$$

$$f(x-h) = y + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2} - \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{2.3} + \text{etc.}$$

Et si, alors, on donne à h une valeur assez petite pour que, d'après l'art. 54, le terme $\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2}$ soit plus grand que la somme algébrique de tous ceux qui le suivent dans les deux développements, comme $\frac{d^2y}{dx^2}$ a le même signe dans les deux développements, il en résultera que si $\frac{d^2y}{dx^2}$

est positif, y ou f x sera augmenté dans les deux développements, et par suite $f(x+h)$ et $f(x-h)$ seront tous deux plus grands que y ou f x, donc il y aura un minimum; si, au contraire, $\frac{d^2y}{dx^2}$ est négatif, y ou f x sera diminué dans les deux développements, et ces développements étant tous deux moindres que f x, il y aura un maximum.

60. — Remarquons que si, outre $\frac{dy}{dx}=0$, on avait également $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, on prouverait de la même manière que ci-dessus, qu'il ne pourrait y avoir maximum ou minimum que si $\frac{d^3y}{dx^3}$ s'annulait; et alors, il y aurait maximum si $\frac{d^4y}{dx^4}$ était négatif, et minimum si ce coefficient était positif. Ainsi de suite.

Donc d'une façon générale pour qu'il y ait maximum ou minimum, il faut que le premier coefficient qui ne s'évanouit pas soit *d'ordre* pair, et alors il y a maximum s'il est négatif et minimum s'il est positif.

61. — Nous donnons ci-après quelques exemples.

1°. — Soit la fonction $a-bx+cx^2$. Faisons $y=a-bx+cx^2$. Différentiant, nous aurons $dy=-bdx+2\,cx\,dx$, d'où $\frac{dy}{dx}=-b+2\,cx$. $\frac{d^2y}{dx^2}=d.(-b+2\,cx):dx=2\,c\,dx:dx=2\,c$. En admettant que $\frac{dy}{dx}$ soit nul, cette valeur positive de $\frac{d^2y}{dx^2}$ nous montre que la fonction a un minimum. Pour déterminer l'abscisse qui répond à ce minimum et par suite la valeur de ce mininum, nous devons donc poser $\frac{dy}{dx}$ ou $-b+2\,cx=0$, d'où $x=\frac{b}{2\,c}$ et en substituant cette valeur dans celle de y, on aura pour le minimum $y=a-bx+cx^2=a-\frac{b^2}{2\,c}+c\frac{b^2}{4\,c^2}=a-\frac{b^2}{2\,c}+\frac{b^2}{4\,c}=a-\frac{b^2}{2\,c}\left(1-\frac{1}{2}\right)=a-\frac{b^2}{4\,c}$.

2°. — Soit maintenant $a+bx-cx^2$. Posons $y=a+bx-cx^2$.

Différentions par analogie avec l'exemple précédent,

nous aurons $\frac{dy}{dx} = b - 2\,cx$ et $\frac{d^2\,y}{dx^2} = -\ 2\ c$. Cette dernière valeur étant négative, la fonction aura un maximum, si l'on fait $\frac{dy}{dx}$ ou $b - 2\,cx = 0$. On tire de cette dernière équation, également, $x = \frac{b}{2\,c}$, et par suite l'ordonnée maximum $y = a + \frac{b^2}{2\,c} - c\,\frac{b^2}{4\,c^2} = a + \frac{b^2}{2\,c} - \frac{b^2}{4\,c} = a + \frac{b^2}{2\,c}$ $\left(1 - \frac{1}{2}\right) = a + \frac{b^2}{4\,c}$.

3°. — Soit encore la fonction $3\,a^4\,x^3 - b^2\,x + c$. On a $y = 3\,a^4\,x^3 - b^2\,x + c$.

Et $\frac{dy}{dx} = 9\,a^4\,x^2 - b^2$ ; $\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = d\,(9\,a^4\,x^2 - b^2) : dx = 2.9\,a^4$ $x\,dx : dx = 18\,a^4\,x$.

En égalant à zéro la valeur de $\frac{dy}{dx}$, nous avons $9\ a^4\,x^2 - b^2 = 0$, d'où $x^2 = \frac{b^2}{9\,a^4}$ et $x = \pm\frac{b}{3\,a^2}$. Remarquons qu'ici nous avons deux valeurs pour x. Si on les met successivement dans la valeur de $\frac{d^2\,y}{dx^2}$, on obtient

$\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = 18\,a^4\,x = 18\,a^4\left(\pm\frac{b}{3\,a^2}\right) = \pm\,\frac{18\,a^4\,b}{3\,a^2}$ ou $\pm 6\,a^2\,b$.

Comme il y deux valeurs de signe contraire pour $\frac{d^2\,y}{d\,x^2}$, il y aura donc un maximum et un minimum ; le minimum correspond à l'abscisse positive $x = \frac{b}{3a^2}$, et le maximum à l'abscisse négative $x = -\ \frac{b}{3a^2}$.

En mettant, successivement, ces valeurs de x dans celle de y, on trouvera : $y = 3\,a^4\,x^3 - b^2\,x + c = 3\,a^4\left(\frac{b^3}{27a^6}\right) - b^2\,\frac{b}{3\,a^2} + c = \frac{b^3}{9\,a^2} - \frac{b^3}{3\,a^2} + c = \frac{b^3}{3\,a^2}\left(\frac{1}{3} - 1\right) + c = -\ \frac{2}{3}$ $\frac{b^3}{3\,a^2} + c = -\,\frac{2\,b^3}{9\,a^2} + c$ pour l'ordonnée minimum.

Et $y = 3\,a^4\left(-\,\frac{b^3}{27\,a^6}\right) - b^2\left(-\,\frac{b}{3\,a^2}\right) + c = -\,\frac{b^3}{9\,a^2} + \frac{b^3}{3\,a^2} +$

$c = \frac{b^3}{3a^2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + c = \frac{2}{3}\frac{b^3}{3a^2} + c = \frac{2b^3}{9a^2} + c$ pour l'ordonnée maximum.

62.—On peut abréger parfois considérablement les opérations que nous avons indiquées pour reconnaître si une fonction est susceptible d'un maximum ou d'un minimum.

Remarquons d'abord que quand une fonction de x est nulle pour une certaine valeur donnée à x, il ne s'ensuit pas qu'en général son coefficient différentiel soit nul également. Ainsi, par exemple, si l'on a la fonction $x^2 - 5x + 6$, qui s'annule pour $x = 2$ ou $x = 3$, le coefficient différentiel, qui est $2x - 5$, ne s'annule pas pour ces valeurs de x.

Supposont maintenant qu'il s'agisse de déterminer le coefficient différentiel de l'équation $\frac{dy}{dx} = XX'$, dans laquelle X et X' sont des fonctions de x, dont la première seule devient nulle pour un certaine valeur donnée à x.

Si nous différentions cette équation, nous aurons, art. 9, en divisant par dx :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = d.(XX') : dx = \frac{Xd.X'}{dx} + \frac{X'd.X}{dx}.$$

Or, par hypothèse, X est nul, en vertu de la valeur donnée à x, ce qui n'entraîne pas pour d.X l'égalité à zéro, d'après ce que nous venons de voir, donc

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{X'd.X}{dx}.$$

Ce qui nous donne cette règle que pour obtenir rapidement $\frac{d^2y}{dx^2}$, il faut multiplier le coefficient différentiel $\frac{d.X}{dx}$ du facteur nul, par l'autre facteur X'.

Par exemple, si l'on avait $\frac{dy}{dx} = \frac{x - a}{\sqrt{x}}$ et qu'on voulut obtenir le coefficient différentiel du second ordre $\frac{d^2y}{dx^2}$ dans l'hypothèse de $x = a$ qui annule le facteur $(x - a)$, on écrirait comme ceci cette équation :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}(x - a)$$

et l'on trouverait, d'après la règle précédente,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d.(x-a)}{dx} \times \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{dx}{dx}\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

*Remarque I.* — La règle que nous venons d'exposer n'est pas sans exception car le coefficient différentiel $\frac{d.X}{dx}$ peut être nul aussi bien que X. Ainsi, si l'on avait l'équation $\frac{dy}{dx} = x^2$ $(x - a)^2$, laquelle renferme des racines égales, le second facteur s'annule pour $x = a$. Le coefficient différentiel $\frac{d.X}{dx}$ est donc $\frac{d.(x-a)^2}{dx} = \frac{2(x-a)\,d.(x-a)}{dx} = \frac{2(x-a)\,dx}{dx} = 2$ $(x - a) = 0$, puisque $x = a$.

Et les deux termes de la valeur de $\frac{d^2 y}{dx^2}$ étant $\frac{X\,d.X'}{dx} + \frac{X'\,d.X}{dx}$, s'annulent également. En effet, le second s'annule puisque $\frac{d\,X}{dx} = 0$ ; et le premier étant $\frac{X\,dX'}{dx}$ ou $\frac{(x-a)^2\,d.x^2}{dx}$ ou $\frac{(x-a)^2\,2\,x\,dx}{dx}$ ou $2\,x\,(x-a)^2$ s'annule aussi puisque $x=a$, donc $(x-a) = 0$.

Donc, dans ce cas et dans les autres qui lui sont analogues, au lieu de supprimer le facteur représenté par $\frac{X\,d.X'}{dx}$, on garderait les deux termes de $\frac{d^2 y}{dx^2}$, et conformément à l'art. 60, on aurait recours aux coefficients différentiels des ordres supérieurs à $\frac{d^2 y}{dx^2}$ pour reconnaître si la fonction considérée est susceptible d'un maximum ou d'un minimum.

*Remarque II.* — Lorsque dans la valeur du coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$, il y a un facteur (quantité constante) positif, on peut le supprimer. Ainsi, si nous avons, par exemple, $\frac{dy}{dx} = A\,\varphi\,x$, on en tire $\frac{d^2 y}{dx^2} = d.(A\,\varphi\,x) : dx = A\,\frac{d.\varphi x}{dx}$.

Cette seconde équation n'ayant d'autre but que de faire connaître le signe de la valeur de $\frac{d^2 y}{dx^2}$, ce signe ne dépendant que de celui qui affecte $\frac{d.\varphi\,x}{dx}$, puisque A est une con-

stante positive; on peut donc supprimer A dans cette équation.

On peut également le supprimer dans l'équation $\frac{dy}{dx} = A \varphi x$, car, puisque nous devons égaler à zéro le second membre de cette équation pour en tirer la valeur de x, l'équation $A \varphi x = 0$, nous donnera $\varphi x = 0$, et c'est de cette dernière équation que nous tirerons la valeur de x, d'où, il résulte que A peut être également supprimé dans l'équation $\frac{dy}{dx} = A \varphi x$.

63. — Comme application de la théorie des maxima et minima que nous venons d'exposer, nous allons donner la solution de quelques problèmes.

*Problème I. — Partager un nombre en deux parties telles que le produit de l'une par l'autre soit le plus grand possible*. Soit a ce nombre, x l'une des parties, l'autre sera $a - x$. Donc $x(a-x)$ est la quantité dont on doit chercher le maximum. Posons $y = x(a-x) = ax - x^2$; et différentions, on aura :

$$dy = d.(ax - x^2) = a\,dx - 2x\,dx, \text{ d'où } \frac{dy}{dx} = a - 2x.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = d.(a - 2x) : dx = -2\,dx : dx = -2.$$

La valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ étant négative, la fonction a réellement un maximum; si cette valeur eût été négative, il y aurait eu un minimum et non un maximum. Pour connaître la valeur de x correspondant à ce maximum, posons $\frac{dy}{dx}$ ou $a - 2x = 0$, on aura $x = \frac{a}{2}$, ce qui nous montre que le nombre a doit être partagé en deux parties égales pour que le produit soit un maximum.

*Problème II. — Partager une droite A B en deux parties A C et C B, de manière que le produit $AC^3 \times CB$ soit un maximum (fig. 10).*

Fig. 10.

A C B

Représentons par a la longueur de la droite A B, et par x la longueur de la partie A C de cette droite. On aura pour l'équation du problème :

$$y = x^3 (a - x) = a x^3 - x^4 .$$

En différentiant, on obtient $dy = d(a x^3 - x^4) = 3 a x^2 dx - 4 x^3 dx$, d'où $\frac{dy}{dx} = 3 a x^2 - 4 x^3$.
$\frac{d^2 y}{dx^2} = d.(3 a x^2 - 4 x^3) : dx = (2 . 3 a x dx - 3 . 4 . x^2 dx) : dx = 6 a x - 12 x^2$.

En posant $\frac{dy}{dx}$ ou $3 a x^2 - 4 x^3 = 0$, on trouve $3 a x^2 = 4 x^3$, d'où $3 a = 4 x$, d'où $x = \frac{3 a}{4}$. Remarquons que $x = 0$ satisfait aussi à l'équation $3 a x^2 - 4 x^3 = 0$ ; mais la valeur $x = \frac{3 a}{4}$ résout seule le problème puisqu'elle donne pour $\frac{d^2 y}{d x^2}$ ou $6 a x - 12 x^2$ la valeur $6 a \frac{3 a}{4} - 12 \frac{9 a^2}{16}$ ou $\frac{18 a^2}{4} - \frac{108 a^2}{16}$ ou $\frac{18 a^2 - 27 a^2}{4}$ ou $-\frac{9 a^2}{4}$, qui étant négative indique que le maximum demandé est possible. $x = 0$ donnerait o pour $\frac{d^2 y}{d x^2}$.

*Problème III. — On veut faire entrer dans un vase cylindrique une certaine quantité d'eau dont le volume est connu ; on demande quelles dimensions il faut donner à ce vase pour que sa surface interne soit aussi petite qu'il est possible.*

Soit v le volume d'eau donné, x le rayon de la base du cylindre. La surface de la base du cylindre sera $\pi x^2$; et le volume du cylindre, en désignant par h sa hauteur, sera $\pi x^2 h$. Ce volume égal v, donc $h = \frac{v}{\pi x^2}$. La circonférence de la base est $2 \pi x$ ; et en multipliant cette circonférence par la hauteur h, on aura la surface convexe du cylindre ; donc on a pour cette surface $2 \pi x \times \frac{v}{\pi x^2} = \frac{2v}{x}$. Si, à cette surface, on ajoute celle de la base du cylindre $\pi x^2$, on obtiendra la surface interne demandée que nous représenterons par y ; on aura donc à différentier :

$$y = \frac{2v}{x} + \pi x^2 ;$$

et à chercher quelle valeur il faut donner à x pour que y soit un minimum. Différentions

$dy = d.(2 v \frac{1}{x} + \pi x^2) = d.(2 v x^{-1} + \pi x^2) = - 2 v x^{-2} dx +$

$2\pi x\, dx$, d'où $\frac{dy}{dx} = -2vx^{-2} + 2\pi x = -\frac{2v}{x^2} + 2\pi x$;
$\frac{d^2y}{dx^2} = d\left(-\frac{2v}{x^2} + 2\pi x\right) : dx = d.(-2vx^{-2} + 2\pi x) : dx =$
$(4vx^{-3}dx - 2\pi dx) : dx = 4vx^{-3} + 2\pi = \frac{4v}{x^3} + 2\pi.$

Reste à savoir si cette valeur est positive et qu'elle est la valeur de x.

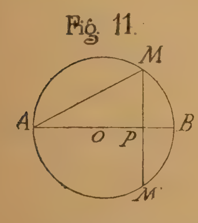
Pour cela égalons à zéro la valeur de $\frac{dy}{dx}$, nous aurons : $-\frac{2v}{x^2} + 2\pi x = 0$, d'où $-2v + 2\pi x^3 = 0$, d'où $x^3 = \frac{2v}{2\pi} = \frac{v}{\pi}$ et $x = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$.

Cette valeur mise dans celle de $\frac{d^2y}{dx^2}$, donne
$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(4v : \frac{v}{\pi}\right) + 2\pi = \frac{4v \times \pi}{v} + 2\pi = 4\pi + 2\pi = 6\pi$;
valeur positive, donc le rayon $x = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$ répond à la question.
La hauteur est $\frac{v}{\pi x^2}$ ou $\frac{v}{\pi} \times \frac{1}{\left(\sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}\right)^2} = \frac{v}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}\right)^2} = \frac{v}{\pi\left(\frac{v^{2/3}}{\pi^{2/3}}\right)} =$

$\frac{v \times \pi^{2/3}}{\pi \times v^{2/3}} = \frac{v^{3/3}\pi^{2/3}}{\pi^{3/3}v^{2/3}} = \frac{v^{1/3}}{\pi^{1/3}} = \frac{\sqrt[3]{v}}{\sqrt[3]{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}.$

*Problème IV. — Entre tous les cônes inscrits dans une sphère, déterminer celui qui a une plus grande surface convexe.*

Supposons, fig. 11, que le demi-cercle AMB fasse une révolution complète autour de l'axe AB, la corde AM engendrera un cône dont PM sera le rayon de la base et AP la hauteur.




La surface convexe ou latérale de ce cône, d'après la géométrie élémentaire, aura pour expression : circonférence $PM \times \frac{1}{2} AM = 2\pi PM \times \frac{1}{2} AM = \pi.$ PM. AM.

Il s'agit donc de déterminer PM et AM, de substituer

leurs valeurs dans la surface convexe du cône et de déterminer la condition du maximum.

A cet effet, soient $AB = 2a$ (quantité connue), $AP = x$, $PB = 2a - x$; PM étant moyenne proportionnelle entre les deux segments AP et PB (géométrie élémentaire), nous avons

$x : PM :: PM : 2a - x$ ; d'où $PM = \sqrt{x(2a-x)} = \sqrt{2ax - x^2}$.

A M étant moyenne proportionnelle entre A P et A B (géom. élém.), nous avons

$$x : AM :: AM : 2a, \text{ d'où } AM = \sqrt{2ax}.$$

Substituons ces valeurs de PM et de AM dans l'expression de la surface du cône, nous aurons

Surface convexe du cône $= \pi\, PM . AM = \pi \sqrt{2ax - x^2} \sqrt{2ax} = \pi \sqrt{(2ax - x^2)\, 2ax} = \pi \sqrt{4a^2x^2 - 2ax^3}$.

L'équation dont on doit trouver le maximum est donc

$$y = \pi \sqrt{4a^2x^2 - 2ax^3}.$$

Différentions nous aurons

$dy = \pi . d. \sqrt{4a^2x^2 - 2ax^3} =$ (d'après la remarque II du nº 62) $= d. \sqrt{4a^2x^2 - 2ax^3} = d. (4a^2x^2 - 2ax^3)^{1/2} = \frac{1}{2}$ $(4a^2x^2 - 2ax^3)^{1/2 - 1 \text{ ou } - 1/2}\, d.(4a^2x^2 - 2ax^3) = \frac{1}{2} \frac{1}{(4a^2x^2 - 2ax^3)^{1/2}}$ $(2.\, 4a^2x\, dx - 3.\, 2ax^2\, dx) = \frac{1}{2\sqrt{4a^2x^2 - 2ax^3}} (8a^2x\,dx -$ $6ax^2\,dx) = \frac{8a^2x\,dx - 6ax^2\,dx}{2\sqrt{4a^2x^2 - 2ax^3}} = \frac{4a^2x\,dx - 3ax^2\,dx}{\sqrt{4a^2x^2 - 2ax^3}}$, donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4a^2x - 3ax^2}{\sqrt{4a^2x^2 - 2ax^3}} = \frac{4a^2 - 3ax}{\sqrt{4a^2 - 2ax}}, \quad (92),$$

en supprimant le facteur commun x.

Egalons à zéro cette valeur de $\frac{dy}{dx}$ nous aurons :

$\frac{4a^2 - 3ax}{\sqrt{4a^2 - 2ax}} = 0$, d'où $4a^2 - 3ax = 0$, d'où $x = \frac{4a^2}{3a} = \frac{4a}{3}$.

Nous devons maintenant voir, pour qu'il y ait maximum, si cette valeur de x rend négative la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$, valeur

que nous devons tirer de l'équation (92), dans l'hypothèse de $x = \frac{4a}{3}$.

En décomposant le numérateur de cette équation (92) en ses facteurs, nous aurons, après avoir restitué le facteur commun x à cette équation :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax(4a - 3x)}{\sqrt{4a^2x^2 - 2ax^3}}.$$

La second membre peut être mis sous la forme $\frac{ax}{\sqrt{4a^2x^2 - 2ax^3}} \times (4a - 3x)$; donc $\frac{dy}{dx} = \frac{ax}{\sqrt{4a^2x^2 - 2ax^3}} \times (4a - 3x) = X'X$.

Mais dans l'hypothèse actuelle de $x = \frac{4a}{3}$, le second facteur $(4a - 3x)$ ou X est nul ; nous avons donc, en vertu de l'art. 62, $\frac{d^2y}{dx^2} = X'\frac{d.X}{dx} = \frac{ax}{\sqrt{4a^2x^2 - 2ax^3}} \times \frac{d.(4a - 3x)}{dx} = \frac{ax}{\sqrt{4a^2x^2 - 2ax^3}} \times \left(-\frac{3dx}{dx} \text{ ou} - 3\right) = -\frac{3ax}{\sqrt{4a^2x^2 - 2ax^3}}$, et en divisant par x les deux termes, $= -\frac{3a}{\sqrt{4a^2 - 2ax}}$.

Mettant dans cette expression la valeur de x ou $\frac{4a}{3}$, nous aurons

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{3a}{\sqrt{4a^2 - 2ax}} = -\frac{3a}{\sqrt{4a^2 - 2a\frac{4a}{3}}} = -\frac{3a}{\sqrt{4a^2 - \frac{8a^2}{3}}} = -\frac{3a}{\sqrt{\frac{4a^2}{3}}},$$

valeur négative ; donc A P ou hauteur du cône ou $x = \frac{4a}{3}$ donne le maximum demandé.

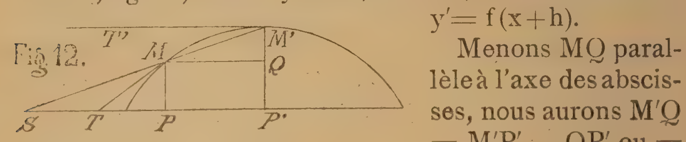
## SIGNIFICATION GÉOMÉTRIQUE DES COEFFICIENTS DIFFÉRENTIELS.

63.—Nous allons démontrer que l'éq. $\frac{dy}{dx} = 0$ signifie que la tangente, à une courbe, menée par le point dont les coordonnées sont x et y, est parallèle à l'axe des abscisses ; et

le point de tangence correspond à un maximum ou à un minimum.

En effet, nous avons vu, art. 51, formule $82^{bis}$, que $\frac{dy'}{dx'}$ ou $\frac{dy}{dx}$ représentait la tangente trigonométrique de l'angle que fait, avec l'axe des abscisses, une tangente menée au point dont les coordonnées sont x' et y' ou x et y. On peut démontrer à priori cette proposition de la manière suivante :

Soient, fig. 12, $PM = y = fx$ ; $PP' = h$, on a donc $M'P' = y' = f(x+h)$.




Menons MQ parallèle à l'axe des abscisses, nous aurons $M'Q = M'P' - QP'$ ou $= M'P' - MP =$ donc $y' - y = f(x+h) - fx$ ou $-y$.

D'après la formule de Taylor, art. 41, on a donc

$$M'Q = f(x+h) - y = \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

Or, d'après la trigonométrie, on a dans le triangle rectange M M' Q, (en remarquant que l'angle M'M Q = l'angle M S P ou angle S) :

$$MQ : M'Q :: \text{rayon ou } 1 : \text{tang } S,$$

donc $\text{tang. } S = \frac{M'Q}{MQ}$.

Et en remplaçant dans cette expression M' Q et M Q par leurs valeurs, on aura

$$\text{tang. } S = \frac{\frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}}{h} = \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h}{1.2} + \text{etc.}$$

En passant à la limite où $h=0$, tangente S se change en tangente T ; donc

$$\text{tangente } T = \frac{dy}{dx}.$$

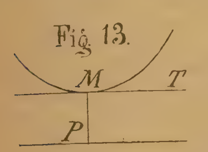
Donc, si par un point d'une courbe, point dont les coordonnées sont x et y, on mène une tangente MT, la tangente trigonométrique de l'angle MTP est égale à $\frac{dy}{dx}$.

Cela étant, lorsque PM devient un maximum P'M', la

tangente TM devant T'M'; et étant alors parallèle à l'axe des abscisses, elle fait un angle nul avec cet axe; et comme la tangente d'un angle nul est égale à zéro, on peut, d'après ce qui précède, poser dans ce cas :

$$\frac{dy}{dx} = o.$$

On démontrerait, de la même manière, que lorsque PM, fig. 13, devient un minimum, la tangente trigonométrique devant également nulle dans ce cas, on devrait avoir $\frac{dy}{dx} = o$.

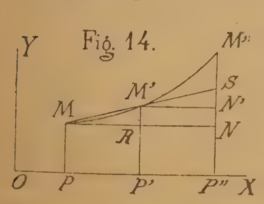



Donc ce coefficient différentiel exprime la condition de parallélisme, de la tangente en M, à l'axe des abscisses.

64. — Nous allons maintenant démontrer que lorsque le coefficient différentiel $\frac{d^2 y}{dx^2}$ est de même signe que l'ordonnée y d'un point considéré de la courbe, cette courbe tourne sa convexité vers l'axe des abscisses en ce point, et lorsqu'il est de signe contraire à l'ordonnée, la courbe tourne sa concavité vers le même axe ; dans le 1er cas il y a un minimum et dans le second un maximum, conformément à l'art. 59.

Pour cela, considérons d'abord le cas où la courbe tourne sa convexité vers l'axe des abscisses, fig. 14.

Soient, fig. 14, $oP = x$, $PM = y$, $PP' = P'P'' = h$, $M'P' = y' = f(x+h)$, $M''P'' = y'' = f(x+2h)$; MM'S une sécante passant par les points MM'; MN et M'N' des parallèles à l'axe des abscisses.




Nous avons $M'R = M'P' - MP = f(x+h) - fx$.

Donc, d'après la formule de Taylor, art. 41, on a

$$M'R = f(x+h) - fx = \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

Or, les triangles semblables MSN, MM'R, nous donnent

$$MR : MN :: M'R : SN, \text{ ou } h : 2h :: M'R : SN,$$

d'où $\frac{M'R}{SN} = \frac{1}{2}$, donc $SN = 2\,M'R$; et en mettant à la place de $M'R$ sa valeur trouvée ci-dessus, on a

$$SN = 2\frac{dy}{dx}h + 2\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.}$$

D'un autre côté $M''P'' = y'' = f(x+2h)$, et en retranchant $NP''$ ou $PM$ ou $y$ ou $fx$, il restera $M''N$, donc en remplaçant dans la formule de Taylor $h$ par $2h.$, on a

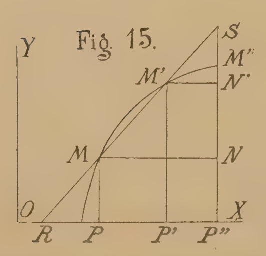
$$M''N = f(x+2h) - fx \text{ ou } - y = \frac{dy}{dx}2h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{4h^2}{1.2} + \text{etc.};$$

et en retranchant de cette valeur de $M''N$ celle de $SN$, il reste $M''S$, donc

$$M''S = \frac{dy}{dx}2h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{4h^2}{1.2} + \ldots \text{etc.} - 2\frac{dy}{dx}h - 2\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} - \text{etc.} = 4\frac{d^2y}{d^2x}\frac{h^2}{1.2} - 2\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \ldots - \ldots \text{etc.}, = 2\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \text{etc.} = \frac{d^2y}{dx^2}h^2 + \text{etc.}, (93).$$

Si nous considérons maintenant le cas où la courbe, fig. 15, tourne sa concavité vers l'axe des abscisses, on voit que pour avoir $M''S$, contrairement à ce qui vient d'avoir lieu, c'est de la valeur de $SN$ qu'il faudra retrancher celle de $M''N$, on aura ainsi :

$$M''S = -\frac{d^2y}{dx^2}h^2 + \text{etc.} (94).$$




Si nous comparons les premiers termes des développements (93) et (94), nous voyons que l'un est précédé du signe + et l'autre du signe —. Or, on peut donner à $h$ une valeur telle que ces termes surpassent respectivement la somme de tous ceux qui les suivent, art. 54. Donc ces premiers termes peuvent décider du signe des développements, et comme $h^2$ est toujours positif, c'est le signe de $\frac{d^2y}{dx^2}$, dans chaque développement, qui décidera du signe du développement.

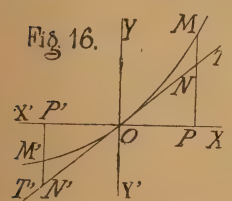
En ne considérant les équations (93) et (94) que par rapport aux signes, on peut donc poser

$$\left.\begin{aligned} M''S &= +\frac{d^2y}{dx^2} \text{ ou } \frac{d^2y}{dx^2} = +M''S, \text{ dans le } 1^{er} \text{ cas ;} \\ M''S &= -\frac{d^2y}{dx^2} \text{ ou } \frac{d^2y}{dx^2} = -M''S, \text{ dans le } 2^{d} \text{ cas.} \end{aligned}\right\} (95).$$

Cela étant, si l'on regarde l'ordonnée y comme une quantité positive, étant située au-dessus de l'axe des abscisses, et si l'on convient de regarder les autres parties de lignes comme étant de même signe ou de signe contraire à y, selon que par rapport à la courbe, elles tombent du même côté que y ou du côté opposé ; on remarquera que, dans la figure 14, la droite $M''S$ tombant du même côté que y, sera aussi positive ; donc la première des équations (95) nous montre que quand la courbe tourne sa convexité vers l'axe des abscisses $\frac{d^2y}{dx^2}$ est positif. Dans la figure 15, au contraire, la droite $M''S$ est située du côté de la courbe opposé à y ; y étant positif, $M''S$ est donc négatif ; donc la seconde des équations (95) nous montre que quand la courbe tourne sa concavité vers l'axe des abscisses, $\frac{d^2y}{dx^2}$ est négatif.

Ce qu'il fallait démontrer.

65. — Dans la démonstration précédente, nous avons supposé le cas particulier où la courbe est située au-dessus de l'axe de abscisses, mais si elle s'étendait au-dessous de l'axe, comme dans la fig. 16, on trouverait encore que $\frac{d^2y}{dx^2}$ est du même signe que y quand la courbe tourne sa convexité vers l'axe des abscisses et est de signe contraire lorsque c'est sa concavité que la courbe tourne vers le même axe.




En effet, d'après ce que nous venons de voir, à l'art. précédent, MN ou $\frac{d^2y}{dx^2}$ est positif et de même signe que y,

la courbe tournant en M sa convexité vers l'axe des abscisses. Mais les droites MN et M'N' tombant du même côté, par rapport à la tangente TT', doivent avoir le même signe; du reste M'P' ou y' est négatif, et tombe, par rapport à la courbe, du côté apposé à celui de M'N'; donc, pour ces raisons, M'N' ou $\frac{d^2 y}{dx^2}$ est positif et de signe contraire à y' qui est négatif ; et, en effet, en M', la courbe tourne sa concavité vers l'axe des abscisses ; ce serait sa convexité qu'elle tournerait si M'N' ou $\frac{d^2 y}{dx^2}$ était de même signe que y'.

Donc, la règle énoncée, art. 64, est générale.

*Remarque I.* — La courbe tournant sa convexité ou sa concavité vers l'axe des abscisses, suivant que l'ordonnée est parvenue à son minimum ou à son maximum, on comprend pourquoi $\frac{d^2 y}{dx^2}$ est positif dans le premier cas, art. 59, et négatif dans le second.

*Remarque II.* — On dit encore qu'il peut y avoir un maximum ou un minimum lorsque $\frac{dy}{dx} = \infty$ ; et la condition nécessaire pour qu'il y ait un maximum ou un minimum dans le sens des abscisses au lieu des ordonnées comme précédemment, est qu'on ait $\frac{dy}{dx} = \infty$.

En effet, soit $y = fx$ l'équation de la courbe MN, fig. 17, Si nous donnons à x une certaine valeur oP, en résolvant l'équation, on déterminera la valeur de l'ordonnée MP. Si l'on résout ensuite l'équation par rapport à x, et qu'on en tire $x = \varphi y$ ; en faisant dans cette équation $y = oP'$ ou MP (valeur précédente de y), on en tirera $x = P'M$ ou oP. Dans ce dernier cas, y sera considéré comme abscisse et x comme l'ordonnée ; et il est évident qu'on construira la même courbe, du moment qu'on porte les abscisses y sur l'axe oY, et les ordonnées x sur l'axe oX.

Fig. 17.


On peut donc ainsi chercher le maximum ou le minimum de la fonction x de y. A cet effet, de l'équation proposée,

on tirera semblablement à ce que nous avons démontré, art. 59, $\frac{dx}{dy}$ égal à une certaine valeur M, que, nous supposerons également nul. Cela étant, l'équation $\frac{dx}{dy} = M$ nous donnant $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{M}$, on voit que quand $M = 0$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{0} = \infty$.

Or, nous savons, par analogie à ce qui a été démontré art. 59, que pour qu'il y ait un maximum ou un minimum dans le sens des abscisses (au lieu des ordonnées), c'est que $\frac{dx}{dy} = 0$, mais dans ce cas $\frac{dy}{dx} = \infty$; donc la condition nécessaire pour qu'il y ait un maximum ou un minimum *dans le sens des abscisses* est que $\frac{dy}{dx} = \infty$.

*Exemple.* — Par exemple, soit l'équation $y^2 = ax - b$. On en tire $2\,y\,dy = a\,dx$, d'où $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2y}$. Si l'on égale à zéro, art. 59, le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$, on en déduit $\frac{a}{2y} = 0$, d'où $y = \infty$; donc la courbe ne peut avoir un maximum dans le sens des ordonnées qu'à une distance infinie de l'axe des x.

Voyons maintenant si elle a une limite (c'est-à-dire un maximum et un minimum) dans le sens des abscisses.

A cet effet, comme nous venons de voir, supposons $\frac{dy}{dx}$ infini ce qui donne $\frac{dy}{dx}$ ou $\frac{a}{2y} = \infty$, d'où $y = 0$. Dans ce cas, la valeur de $\frac{d^2x}{dy^2}$ se réduit à $\frac{2}{a}$, car de $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2y}$ on tire $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{a}$ ou $\frac{2}{a}y$, donc $\frac{d^2x}{dy^2} = d.\frac{2}{a}y : dy = \frac{2}{a}dy : dy = \frac{2}{a}$.

Cette valeur de $\frac{d^2x}{dy^2}$ étant positive, la valeur de $y = 0$, correpond à un minimum de x, art. 59.

Pour déterminer ce minimum, faisons $y = 0$ dans l'équation proposée, nous aurons $0 = ax - b$, d'où $x = \frac{b}{a}$, qui est le minimum cherché; il est représenté par AM dans la fig. 18.

*Remarque III.* — Nous avons vu, art. 51, formule 82^bis et art. 63, que $\frac{dy}{dx}$ représentait la tangente trigonométrique de l'angle que fait, avec l'axe des abscisses, une tangente menée au point dont les coordonnées sont x et y.

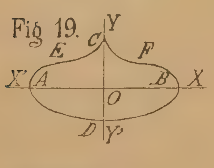
Dans le cas que nous venons de voir $\frac{dy}{dx} = \infty$, donc la tangente MT, au point de la courbe où $y = o$ et $x = \frac{b}{a}$, fait avec l'axe des x un angle dont la tangente trigonométrique est égale à l'infini, donc cet angle est droit, et la tangente MT, à la courbe, est perpendiculaire à l'axe des x.

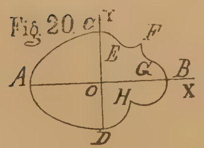
## Points singuliers des courbes planes.

66. — On appelle ainsi, d'une façon générale, les points où une courbe éprouve des changements dans son cours.

Si l'on parvient à reconnaître les endroits où ces points existent, on pourra suivre la courbe dans son développement. Par la théorie des maxima et des minima, nous avons déjà pu déterminer les limites d'une courbe dans le sens des abscisses et dans celui des ordonnées; par la reconnaissance des points singuliers, nous parviendrons à connaître la forme de la courbe.

Le calcul différentiel, qui permet d'arriver à ces résultats, est donc d'une grande utilité pour trouver la forme d'une courbe dont l'équation est donnée.




Par la théorie des maxima et minima, nous pouvons déterminer les limites, des courbes représentées fig. 19 et 20, dans le sens des abscisses et des ordonnées.

Ces limites peuvent être respectivement égales, dans les deux courbes, sans que pour cela ces courbes doivent se ressembler, comme on le voit. Il faut donc déterminer aussi les points singuliers pour arriver à connaître la

forme d'une courbe. Parmi les points singuliers, on distingue les points d'inflexion et les points de rebroussement, les maxima et minima.

On appelle *point d'inflexion*, un point où la courbe de concave devient convexe, ou de convexe devient concave. Ainsi, dans la fig. 19, il y a un point d'inflexion en E et un autre en F ; en partant de gauche à droite, en E, la courbe de concave vers l'axe des abscisses, elle devient convexe ; en F, de convexe vers l'axe, elle devient concave.

On appelle *point de rebroussement*, un point où la courbe suspend tout d'un coup son cours ; ainsi dans la fig. 19, il y a un point de rebroussement en C.

Dans la fig. 20, il y a un point d'inflexion en E et un autre en G ; et un point de rebroussement en F et un autre en H ; on peut donc se faire une idée de la courbe représentée par cette figure, par l'analyse suivante :

En partant du point A, qui est une limite dans le sens des abscisses, la courbe tourne d'abord sa concavité vers l'axe des abscisses, jusqu'en C, qui est une limite dans le sens des ordonnées, elle continue sa concavité jusqu'en E, où il existe un point d'inflexion qui de concave la fait devenir convexe ; arrivée en F, à l'extrémité de la partie convexe E F, elle suspend son cours au point de rebroussement F ; au-delà duquel elle est encore convexe dans la partie FG, pour redevenir concave au point d'inflexion G, et arriver ainsi jusqu'au point B, qui est une limite dans le sens des abscisses ; enfin, à partir de ce point, la courbe reste concave vers l'axe des abscisses jusqu'en A, point de départ, en passant par le point de rebroussement H, et par le point D qui est une limite dans le sens des ordonnées.

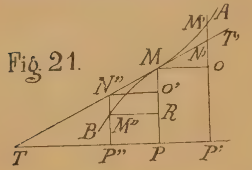
D'après ce qui précède, on voit qu'on saurait se faire une idée d'une courbe, si à l'aide de son équation, on pouvait déterminer les points singuliers. Nous avons déjà appris à reconnaître les maxima et les minima, il nous reste à chercher comment on pourra déterminer les autres points singuliers.

## DES POINTS D'INFLEXION.

67. — Nous allons démontrer comment on peut reconnaître s'il y a des points d'inflexion dans une courbe donnée par son équation.

Pour qu'il puisse y avoir un point d'inflexion dans une courbe, il faut tout d'abord qu'on ait, pour une abscisse déterminée x de ce point, $\frac{d^2 y}{dx^2} = o$, ou bien $\frac{d^2 y}{dx^2} = \infty$.

On s'assurera donc si l'une de ces conditions est remplie, après quoi, on augmentera et on diminuera successivement d'une quantité h très-petite l'abscisse du point qui remplit la condition prescrite ; si alors la valeur de $\frac{d^2 y}{dx^2}$, pour ces valeurs de x, est affectée de signes contraires, on pourra en conclure qu'il existe un point d'inflextion, au point x ; car, nous savons que quand $\frac{d^2 y}{dx^2}$ est positif, la courbe tourne sa convexité vers l'axe des abscisses, tandis que lorsque $\frac{d^2 y}{dx^2}$ est négatif, la courbe tourne sa concavité vers le même axe : or, c'est par ce changement de convexe en concave ou de concave en convexe, que la courbe manifeste son point d'inflexion.




La courbe A B ou M′ M M″, fig. 21, possède en M un point d'inflexion.

En effet, menons en M une tangente T T′ à cette courbe ; cette tangente coupe la courbe, mais elle n'a qu'un point de commun avec elle, c'est comme une tangente commune aux deux parties MA, M B de la courbe. Prenons P P′ = P P″ = h, et menons les ordonnées.

Si nous considérons les diverses ordonnées comprises entre M′P′ et MP, nous voyons que le prolongement M′N′ de l'ordonnée, depuis la tangente jusqu'à la courbe, va en diminuant jusqu'au point M où il s'anéantit.

Si maintenant nous considérons les ordonnées suivantes, le prolongement N″M″ de l'ordonnée, depuis la tangente jusqu'à la courbe, tombera au-dessous de la tangente, et

par suite changera de signe de sorte que si $M'N'$ est positif, $M''N''$ est négatif. Telle est la condition que nous allons exprimer par une équation.

On a évidemment $M'N' = M'P' - N'P'$, or $MP = fx$, donc $M'P' = f(x+h)$, ainsi on a :

$$M'N' = f(x+h) - N'P', (96).$$

Cherchons la valeur analytique de $N'P'$. Nous avons $N'P' = MP + N'O$, et comme $MP = y$, on a :

$$N'P' = y + N'O, (97).$$

Cherchons également la valeur de $N'O$. Pour cela, par la trigonométrie, nous savons que dans le triangle rectangle $N'MO$, on a :

$$N'O = MO \times \text{tang } N'MO.$$

Or, nous avons vu, art. 51, éq. $82^{bis}$, que la tangente trigonométrique d'un angle, soit de $N'MO$, formé par la tangente en M, à une courbe, avec une parallèle à l'axe des abscisses, avait pour expression $\frac{dy}{dx}$.

Remplaçant donc tang. $N'MO$ par $\frac{dy}{dx}$ et $MO$ par h, nous aurons

$$N'O = h.\frac{dy}{dx}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (97), nous aurons

$$N'P' = y + h\frac{dy}{dx}.$$

Mettant cette valeur dans l'équation (96), nous obtiendrons

$$M'N' = f(x+h) - y - \frac{dy}{dx}h, (98).$$

Calculons de même la valeur de $M''N''$, nous avons :

$$M''N'' = N''P'' - M''P'' = N''P'' - f(x-h).$$

$$N''P'' = MP - MO' = y - MO' = y - N'O = y - \frac{dy}{dx}h,$$

donc, $M''N'' = y - \frac{dy}{dx}h - f(x-h)$; et comme $M''N''$ est en-dessous de la tangente, c'est-à-dire de signe contraire à $M'N'$, on a :

$$-M''N'' = y - \frac{dy}{dx}h - f(x-h), \text{ d'où}$$

$$M''N'' = -y + \frac{dy}{dx}h + f(x-h) = f(x-h) - y + \frac{dy}{dx}h. (99).$$

On aurait pu se dispenser de calculer de nouveau $M''N''$,

en déduisant sa valeur de celle de M'N'. En effet, si nous faisons reculer l'ordonnée parallèlement à elle-même, M'N' deviendra N"M" lorsque h se changera en — h ; il suffit donc de faire h = — h dans l'équation (98), et nous obtiendrons comme ci-dessus, (éq. 99) :

$$M''N'' = f(x-h) - y + \frac{dy}{dx} h.$$

Maintenant remplaçons les expressions f(x+h) et f(x—h), par leurs développements, art. 41, nous aurons au lieu de l'éq. (98) :

$$M'N' = \left(y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}.\right) - y - \frac{dy}{dx} h;$$

et en faisant h = — h, dans le développement de f (x+h), nous aurons au lieu de l'équation (99) :

$$M''N'' = \left(y - \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} - \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}\right) - y + \frac{dy}{dx} h.$$

En réduisant les termes semblables, ces équation deviennent.

$$M'N' = \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.} \quad (100).$$

$$M''N'' = \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} - \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.} \quad (101).$$

Cela étant, pour qu'il y ait inflexion en M, il faut nécessairement que lorsqu'on donnera à h une valeur trés-petite, les lignes M'N' et M"N" tombent l'une au-dessus et l'autre au-dessous de la tangente TT', ce qui fait que M'N' et M"N" soient de signes contraires. Or cela n'est possible que lorsque le premier terme $\frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2}$ des séries (100) et (101) est nul ; car si ce terme n'était pas nul, on pourrait, art. 54, donner à h une valeur assez petite pour que le terme $\frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2}$ surpassât la somme algébrique de tous les autres termes qui suivent, dans chaque série. Dans ce cas, le signe de ce terme serait donc celui du résultat de toute la suite, et comme ce terme est le même dans le deux développements, il en résulterait que M'N' et M"N" auraient le même signe, et que par suite, M'N' et M"N" ne seraient pas situés

de part et d'autre de la tangente, et il n'y aurait pas inflexion. Donc pour qu'il y ait inflexion, c'est-à-dire que M'N' et M''N'' soient de signes contraires, il faut que l'on ait d'abord : $\frac{d^2 y}{dx^2} \frac{h^2}{2} = 0$ ou plutôt $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$.

car $h^2$ est toujours positif.

*Remarque I.* — S'il arrivait que la même valeur de x qui fait évanouir $\frac{d^2y}{dx^2}$, fit aussi évanouir $\frac{d^3y}{dx^3}$, il faudrait pour qu'il pût y avoir un point d'inflexion que $\frac{d^4y}{dx^4}$ fût aussi nul. Dans ce cas, si $\frac{d^5y}{dx^5}$ était aussi nul, il faudrait encore que $\frac{d^6y}{dx^6}$ fut également nul ; et ainsi de suite ; de façon que le dernier coefficient différentiel qui serait nul, soit d'ordre pair.

*Remarque II.* — Nous venons de démontrer que pour qu'il puisse y avoir un point d'inflexion, il faut que $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, en ce point, ce qui veut dire, en général, que $\frac{d^2y}{dx^2}$ doit changer de signe au point d'inflexion, ce qui s'accorde avec ce que nous avons dit à l'art. 64; mais $\frac{d^2y}{dx^2}$ peut aussi changer de signe en passant par l'infini. Par exemple, soit

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{b^2}{x-a}.$$

Si l'on substitue successivement à x les valeurs

$x = a - h$, on trouve $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{b^2}{a-h-a} = -\frac{b^2}{h}$;

$x = a$, id. $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{b^2}{a-a} = \frac{b^2}{0} = \infty$ ;

$x = a + h$, id. $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{b^2}{a+h-a} = +\frac{b^2}{h}$;

h, peut être très petit, par conséquent $\frac{d^2 y}{dx^2}$ peut changer de signe en passant par l'infini ; et l'on voit, dans le présent exemple, que c'est le dénominateur de la valeur de $\frac{d^2 y}{dx^2}$,

qui fait changer de signe au coefficient différentiel après le point d'inflexion.

Concluons donc que, si la valeur de x, qui est la même dans les développements (100) et (101), était telle que $\frac{d^2 y}{dx^2}$ fût infini, ces deux développements le seraient aussi, et alors, on ne pourrait rien conclure de la démonstration exposée à l'art. 67, qui repose sur la possibilité de ces développements ; mais alors on doit faire usage de ce que nous venons d'exposer à la présente remarque, en observant que $\frac{d^2 y}{dx^2}$ peut changer de signe en passant par l'infini ; si donc à l'abscisse $x = a$, par exemple, on obtient $\frac{d^2 y}{dx^2} = \infty$, on fera, successivement, $x = a - h$ et $x = a + h$, et si l'on obtient pour $\frac{d^2 y}{dx^2}$ deux valeurs de signes contraires, le point correspondant à l'abscisse $x = a$ sera un point d'inflexion.

68. — *Application.*

1°. — Chercher s'il y a un point d'inflexion dans la courbe représentée par l'équation

$$y = b + 2(x - a)^3 . \quad (102.$$

Différentions, nous aurons :

$dy = 3.2(x-a)^2 \, d.(x-a) = 3.2(x-a)^2 \, dx$, d'ou $\frac{dy}{dx} = 3.2(x-a)^2$ ;

$\frac{d^2 y}{dx^2} = d.[3.2(x-a)^2] : dx = 2.3.2(x-a)\, d(x-a) : dx = 12(x-a)\, dx : dx = 12(x-a)$ ;

$\frac{d^3 y}{dx^3} = d.[12(x-a)] : dx = d.[12x - 12a] : dx = 12\, dx : dx = 12.$

Pour qu'il puisse y avoir un point d'inflexion, il faut donc, art. 67, qu'il existe une valeur de x qui rende nulle la valeur du terme $\frac{d^2 y}{dx^2}$. Or, x étant une quantité variable, déterminons l'une de ses valeurs par la condition qu'on ait $12(x-a) = 0$, d'où $x = a$, valeur qui peut être l'abscisse d'un point d'inflexion.

Pour nous assurer de l'existence de ce point, augmentons d'abord l'abscisse x, du point M, fig. 22, d'une petite quantité h, et substituons donc $a + h$ à x, nous trouverons

que pour le point M′, dont l'abscisse est a+h, on a $\frac{d^2y}{dx^2} = 12(a+h-a) = 12h$. Diminuons ensuite l'abscisse x de h, et substituons donc a—h à x, nous trouverons que pour le point M″ dont l'abscisse est a—h, on a $\frac{d^2y}{dx^2} = 12(a-h-a) = -12h$. Ces deux valeurs de signes contraires de $\frac{d^2y}{dx^2}$ nous montrent qu'il y a un point d'inflexion en M, art. 67.

Fig. 22.

Remarquons que l'hypothèse de $x = a$ fait évanouir le terme $\frac{dy}{dx}$; or, nous avons vu, art. 63, que l'expression $\frac{dy}{dx} = 0$ signifie que la tangente en M, est parallèle à l'axe des abscisses ; donc la tangente au point d'inflexion, dans la présente hypothèse, devrait être parallèle à l'axe des abscisses.

2°. — Il n'est pas toujours possible d'égaler à zéro la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$, et alors, si ce terme ne peut pas être égalé à l'infini, il n'y aura évidemment, d'après l'art. 67, pas de point d'inflexion.

Soit, par exemple, l'équation suivante, $y = b + ax^2$, qui est celle d'une parabole, (géom. analytique), et cherchons si la courbe possède des points d'inflexion.

Différentions, nous aurons :

$$dy = 2\,ax\,dx, \text{ d'où } \frac{dy}{dx} = 2\,ax\,;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = d.(2\,ax) : dx = 2a\,dx : dx = 2a.$$

On voit qu'on ne peut égaler à zéro la valeur 2a, de $\frac{d^2y}{dx^2}$, qui ne renferme aucune indéterminée ; on ne peut pas non plus l'égaler à l'infini, donc la parabole n'a pas de point d'inflexion, ce que nous savions déjà par la géométrie analytique.

La valeur 2a de $\frac{d^2y}{dx^2}$, qui ne varie pas de signe, nous montre seulement, art. 64, que la parabole représentée par l'équation en question, tourne continuellement sa convexité vers l'axe des abscisses.

3°. — Soit l'équation $y^3 = x^5$ ; d'où $y = \sqrt[3]{x^5}$.

D'après l'art. 14, pour différentier, nous ferons $y = x^{5/3}$, et nous aurons :

$$dy = \frac{5}{3} x^{5/3 - 1 \text{ ou } - 3/3} dx \text{ ; d'où } \frac{dy}{dx} = \frac{5}{3} x^{2/3} ;$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = d. \left(\frac{5}{3} x^{2/3}\right) : dx = \frac{2}{3} . \frac{5}{3} x^{2/3 - 3/3} dx : dx = \frac{2}{3} . \frac{5}{3} x^{-1/3} = \frac{2}{3} . \frac{5}{3} \frac{1}{x^{1/3}} = \frac{2}{3} . \frac{5}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} .$$

Si l'on cherchait à déterminer x, comme nous l'avons dit, en égalant à zéro la valeur de $\frac{d^2 y}{dx^2}$, on aurait $\frac{2}{3} . \frac{5}{3} . \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$, ou plus simplement $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$, équation à laquelle on ne peut satisfaire qu'en faisant $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{\infty} = 0$, d'où $x = \infty$, ce qui ne conduirait à rien, car en supposant que cela montre la possibilité de l'existence d'un point d'inflexion situé à une distance infinie de l'axe des ordonnées, nous ne pourrions pas nous assurer de l'existence de ce point en augmentant puis en diminuant d'une petite quantité la valeur de x qui serait infinie.

Mais remarquons que nous avons la faculté d'égaler à l'infini la valeur de $\frac{d^2 y}{dx^2}$, art. 67, et ainsi nous aurons $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \infty$, d'où $x = 0$. Cette valeur nous montre qu'il peut y avoir un point d'inflexion sur l'axe des ordonnées ; et pour nous assurer que ce point existe, nous substituerons successivement à x les valeurs $x = 0 + h$ et $x = 0 - h$, c'est-à-dire $x = h$ et $x = -h$, et pour qu'il y ait inflexion, $\frac{d^2 y}{dx^2}$ devra nous donner, dans ces deux cas, des résultats de signes contraires.

Nous aurons donc, en observant que $\sqrt[3]{-h}$ est une quantité négative :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \pm \frac{2}{3} . \frac{5}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{h}},$$

valeurs de signes contraires, donc il y a inflexion au point

où l'abscisse est zéro, et comme l'équation proposée donne pour $x=o$, $y=o$, l'inflexion a lieu à l'origine o, fig. 23.

Fig. 23

4°. — Soit la courbe MAN représentée fig. 24, qui a pour équation :

$$(y-b)^2 = x^3 .$$

On en tire $y-b = \pm\sqrt{x^3}$, d'où $y=b \pm \sqrt{x^3} = b \pm x^{3/2}$.

$$dy = \pm\frac{3}{2}x^{3/2-1}dx = \pm\frac{3}{2}x^{1/2}dx\,;\ \text{d'où}\ \frac{dy}{dx} = \pm\frac{3}{2}x^{1/2}.$$

Fig. 24

$$\frac{d^2y}{dx^2} = d.\left(\pm\frac{3}{2}x^{1/2}\right) : dx = \pm\frac{1}{2}.\frac{3}{2}x^{1/2-1}dx : dx = \pm\frac{1}{2}.\frac{3}{2}x^{-1/2} = \pm\frac{1}{2}.\frac{3}{2}\frac{1}{x^{1/2}} = \pm\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

En faisant $\frac{d^2y}{dx^2} = o$, on aurait $x = \infty$, ce qui, comme dans l'exemple précédent, ne nous conduirait à rien ; mais on peut faire $\frac{d^2y}{dx^2} = \infty$, d'où $x = o$ ; il peut donc y avoir un point d'inflexion sur l'axe des ordonnées. Pour vérifier si ce point existe réellement, faisons d'abord $x = o + h = h$, et substituons cette valeur dans celle de $\frac{d^2y}{dx^2}$, nous aurons.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{1}{\sqrt{h}};$$

faisons ensuite $x = o - h = -h$, et substituons, la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ devient $\pm\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{1}{\sqrt{-h}}$, valeur imaginaire.

La valeur de y est également imaginaire, pour toute abscisse négative de x, car pour $-h$, par exemple, on a :

$$y=b \pm \sqrt{-h^3}\,.$$

Ceci nous apprend que la courbe n'existe pas pour des abscisses négatives. Pour $x=o$, on a $y=b = OA$, fig. 24.

Concluons donc que, quoique $\frac{d^2y}{dx^2}$ soit infini pour $x=o$, il n'y a point d'inflexion, car on n'obtient pas deux valeurs réelles de signes contraires pour $\frac{d^2y}{dx^2}$, en augmentant puis en diminuant $x=o$ de la petite quantité h, art. 67.

D'après ce que nous allons démontrer à l'art. suivant, on pourra reconnaître que ce coefficient différentiel appartient à une classe de points que l'on a appelés *points de rebroussement.*

## DES POINTS DE REBROUSSEMENT.

69. — On appelle *points de rebroussement*, le point où une courbe s'arrête dans son cours pour revenir sur ses pas.

Fig. 25.

Le rebroussement est dit de la première espèce, lorsque les deux branches se tournent leurs convexités, comme dans la fig. 24, (AM et AN, ou A'M' et A'N'); il est dit de la seconde espèce, quand les concavités sont concentriques, comme dans la fig. 25, (BP et BQ, ou B'P' et B'Q').

70.—Comment peut-on reconnaître un point de rebroussement ? Remarquons d'abord que la courbe s'arrête ainsi, au point de rebroussement, parce qu'au delà de ce point A ou A', B ou B', les valeurs que l'on donnerait à l'abscisse en déterminerait d'imaginaires pour l'ordonnée, ce qui suppose donc que la valeur de $\frac{d^2 y}{dx^2}$, (que l'on doit égaler à o ou à l'infini pour déterminer l'abscisse), renferme un radical.

Maintenant, si, avant que la courbe suspende son cours, $\frac{d^2 y}{dx^2}$ donne deux valeurs, l'une du signe de l'ordonnée y et l'autre d'un signe contraire, on reconnaîtra qu'il y a deux branches de courbe réunis au point A ou A', fig. 24, l'une convexe vers l'axe des abscisses et l'autre concave, art. 64; et par suite qu'il y a en ce point, A ou A', un point de rebroussement de la première espèce. Au contraire, si les deux valeurs que donne $\frac{d^2 y}{dx^2}$ sont de même signe, les deux branches qui se réunissent en B ou B', fig. 25, ne peuvent être que concentriques, toutes deux concaves ou toutes deux convexes, selon le signe, et, par conséquent, le rebroussement en ce cas, sera de la seconde espèce.

71. — Exemples.

1°. Soit la courbe représentée par l'équation $(y-x)^2 = x^9$ ; examinons si elle possède des points de rebroussement.

Cette équation donne

$$y-x = \pm\sqrt{x^9}, \text{ d'où } y = x \pm x^4\sqrt{x}, \ (103).$$

On voit que lorsqu'on fait x négatif dans cette équation, y devient imaginaire, d'où l'on peut conclure que la courbe s'arrête à l'origine où $x=0$ et $y=0$ ; valeurs qui satisfont à l'équation. Mais cela ne prouve pas encore qu'il y ait à l'origine un point de rebroussement ; car il pourrait n'exister en ce point qu'un arc de courbe, toujours concave du même côté, comme cela a lieu au sommet de l'hyperbole. Donc, pour reconnaître si la valeur de $x=0$ correspond à un point de rebroussement, il faut voir ce que devient, près de l'origine, le coefficient différentiel du second ordre. Pour cela, on déduira de l'équation la valeur de ce coefficient différentiel ; on y fera $x=0+h$, c'est-à-dire h, et si l'on obtient deux valeurs de signes contraires, (h étant une petite quantité), on aura, d'aprés ce que nous venons de voir à l'article précédent, un point de rebroussement de la première espèce. C'est ce qui a lieu.

En effet, de l'équation $y - x = \pm\sqrt{x^9}$, on tire $y = x \pm x^{9/2}$ ; d'où $dy = dx \pm \frac{9}{2}x^{9/2-1}dx = dx\left(1 \pm \frac{9}{2}x^{7/2}\right)$, donc $\frac{dy}{dx} = 1 \pm \frac{9}{2}x^{7/2}$ ; et $\frac{d^2y}{dx^2} = d.\left(1 \pm \frac{9}{2}x^{7/2}\right) : dx = \pm\frac{7}{2}.\frac{9}{2}x^{7/2-1}dx : dx = \pm\frac{7}{2}.\frac{9}{2}x^{5/2} = \pm\frac{7}{2}.\frac{9}{2}\sqrt{x^5} = \pm\frac{7}{2}.\frac{9}{2}.x^2\sqrt{x}$.

Dans cette valeur, faisons $x = 0 + h = h$, on aura

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm\frac{7}{2}.\frac{9}{2}h^2\sqrt{h}.$$

Ces deux valeurs de signe contraire indiquent deux branches, l'une qui tourne sa convexité vers l'axe des abscisses et l'autre qui tourne sa concavité vers le même axe ; donc on a un point de rebrousement de la première espèce.

2°. — Soit l'équation $(y - b)^2 = (x - a)^3$, de laquelle on tire

$y - b = \pm \sqrt{(x - a)^3}$, d'où $y = b \pm \sqrt{(x - a)^3}$. (104).

En examinant cette équation, nous voyons que la plus petite valeur que l'on puisse donner à x, est $x=a$, laquelle donne $y=b$. En effet, pour toute autre valeur de x, moindre que a, y est imaginaire ; car si l'on fait $x = a - h$, on trouve $y = b \pm \sqrt{(a-h-a)^3} = b \pm \sqrt{-h^3} = b \pm h\sqrt{-h}$, valeur imaginaire. La courbe suspend donc son cours au point A', fig. 24, dont les coordonnées sont a et b.

(Remarquons en passant que l'équation de la courbe M A N, fig. 24, est, art. 68, 4°, $(y-b)^2 = x^3$ ; et celle de la courbe M' A' N', même fig., est $(y-b)^2 = (x-a)^3$.).

Revenons à la courbe M' A' N' que nous venons de considérer. Pour connaître de quelle manière s'étendent ses branches au-delà du point A', nous substituerons à x la valeur $a + h$, dans celle de $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Cherchons donc d'abord cette dernière valeur.

On a :

$y=b\pm \sqrt{(x-a)^3}$, d'où $y=b\pm (x-a)^{3/2}$.

$dy=\pm \frac{3}{2}(x-a)^{3/2-1}d(x-a)=\pm \frac{3}{2}(x-a)^{1/2}dx$, donc $\frac{dy}{dx}=\pm \frac{3}{2}(x-a)^{1/2}$ ;

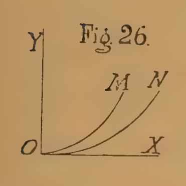
$\frac{d^2y}{dx^2}=d.\left(\pm \frac{3}{2}(x-a)^{1/2}\right) : dx=\pm \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(x-a)^{1/2-1}d(x-a) : dx=\pm \frac{3}{4}(x-a)^{-1/2}dx : dx=\pm \frac{3}{4}\frac{1}{(x-a)^{1/2}}=\pm \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{x-a}}$.

Et en remplaçant x par $a+h$, on a

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\pm \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{a+h-a}}=\pm \frac{3}{4\sqrt{h}}.$$

Nous obtenons donc deux valeurs de signes contraires ; et en vertu des art. 64 et 70, nous reconnaissons que la valeur positive indique la branche A'M', convexe vers l'axe des abscisses, et la valeur négative indique la branche A'N' concave vers le même axe ; donc nous avons en A' un point de rebroussement de la première espèce.

3°. — L'équation $y = ax^2 \pm bx^2\sqrt{x}$, (qui correspond à la courbe représentée par MON, fig. 26, dont les deux




branches tournent leur convexité vers l'axe des x), donne un point de rebroussement de la seconde espèce.

En effet, si dans cette équation on fait $x = o$, on trouve $y = o$ ; mais x négatif, donne y imaginaire ; donc la courbe suspend son cours à l'origine.

Pour savoir comment vont ses branches, nous devons d'abord chercher la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Pour cela, écrivons d'abord l'équation comme ceci : $y = ax^2 \pm b\sqrt{x^5} = ax^2 \pm b\,x^{5/2}$, et l'on a : $dy = 2\,ax\,dx \pm b\,\frac{5}{2}\,x^{5/2-1}\,dx = 2\,ax\,dx \pm \frac{5}{2}b\,x^{3/2}dx$; donc $\frac{dy}{dx} = 2\,ax \pm \frac{5}{2}bx^{3/2}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = d\left(2\,ax \pm \frac{5}{2}\,bx^{3/2}\right) : dx = \left(2\,adx \pm \frac{3}{2}.\frac{5}{2}\,bx^{3/2-1}dx\right) : dx = 2\,a \pm \frac{3}{2}.\frac{5}{2}\,bx^{1/2} = 2\,a \pm \frac{3}{2}.\frac{5}{2}\,b\sqrt{x}$.

Si, dans cette valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$, on donne à x une valeur positive *très petite* représentée par h, on aura

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\,a \pm \frac{3}{2}.\frac{5}{2}\,b\sqrt{h}.$$

Le second terme $\frac{3}{2}\,.\,\frac{5}{2}\,b\sqrt{h}$ du second membre sera moindre que le premier terme $2a$ puisque h est très petit ; donc les deux valeurs de $\frac{d^2y}{dx^2}$ seront du même signe que $2a$, c'est-à-dire positives, et par conséquent, de l'origine, partiront deux branches convexes vers l'axe des x, donc il y a un point de rebroussement de seconde espèce à l'origine, art. 64 et 70.

## Des points multiples.

72. — On appelle ainsi les points où plusieurs branches de courbe se réunissent. Les points de rebroussement appartiennent donc à la classe des points multiples.

Un point multiple est double lorsqu'il est à l'intersection

de deux branches ; il est triple s'il est à l'intersection de trois branches ; ainsi de suite.

73. — On reconnait *qu'il peut* y avoir un point multiple, lorsque l'équation de la courbe ayant été délivrée de ses radicaux, on en obtient, en différentiant, $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$.

Ainsi, soit le point double A, formé par les deux branches de courbe AM, AN, fig. 27. Menons, à ces branches, les deux tangentes AT, AT'.

Fig. 27

Représentons par $F(x, y) = o$ l'équation de la courbe, délivrée des radicaux. La différentielle de cette équation mise sous la forme $P\,dx + Q\,dy = o$ ne renfermera aucun radical, car la différentiation d'une fonction rationnelle n'en introduit point dans cette fonction différentiée ; par conséquent P et Q seront des quantités rationnelles.

Cela étant, l'équation $P\,dx + Q\,dy = o$ donne $\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q}$. Or, nous savons par l'art. 51, que la valeur $\frac{dy}{dx}$ représente la tangente trigonométrique de l'angle formé par la tangente à la courbe avec l'axe des abscisses ; et comme au point A, la courbe a deux tangentes, $\frac{dy}{dx}$ doit avoir deux valeurs Donc, $\frac{P}{Q}$ doit se déterminer de manière que cette condition soit remplie ; et elle le serait si $\frac{P}{Q}$ renfermait un radical, mais cela est impossible puisque nous avons vu que $\frac{P}{Q}$ était rationnel. Il faut donc, pour éviter cette contradiction, que $\frac{P}{Q}$ se présente sous la forme $\frac{o}{o}$, symbole de l'indétermination, c'est-à-dire qu'alors $\frac{P}{Q}$ soit susceptible de plusieurs valeurs.

Soient, en effet, $\alpha$ et $\alpha'$ les deux valeurs de la tangente trigonométrique de la courbe au point multiple, c'est-à-dire donc la tangente trigonométrique des angles TAx, T'Ax, fig. 27. Ces deux valeurs, étant données par $\frac{dy}{dx}$, de-

vront donc satisfaire à l'équation $P + Q\frac{dy}{dx} = o$, tirée de l'équation $P\,dx + Q\,dy = o$. On aura donc, en remplaçant $\frac{dy}{dx}$ respectivement par $\alpha$ et $\alpha'$ :

$$P + Q\,\alpha = o, \qquad P + Q\,\alpha' = o.$$

Et, en retranchant ces équations l'une de l'autre, on aura

$$Q\,(\alpha - \alpha') = o.$$

Or, le facteur $(\alpha - \alpha')$, étant composé de deux quantités inégales, ne peut être nul ; donc $Q = o$, ce qui réduit l'équation $P + Q\,\alpha = o$ à $P = o$. Ces valeurs de P et de Q, réduisent l'équation

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q} \text{ à } \frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$$

Donc, pour qu'il puisse y avoir un point multiple, il faut qu'en tirant $\frac{dy}{dx}$ de l'équation de la courbe, délivrée de ses radicaux, on ait $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$.

Nous disons délivrée de ces radicaux, car si l'on différentiait sans les avoir préliminairement fait disparaître, il se pourrait qu'une équation comportant des points multiples ne donnât pas $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$. Ainsi, par exemple, l'équation (103) art. 71, est dans ce cas : elle à un point double à l'origine, et cependant, si l'on fait $x = o$, l'équation $\frac{dy}{dx} = 1 \pm \frac{9}{2}x^{7/2}$ qu'on a obtenue en différentiant, se réduit à $\frac{dy}{dx} = 1$.

Nous ferons observer également que quoique la condition $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$ soit nécessaire pour qu'il puisse y avoir un point multiple, comme nous l'avons démontré, il n'en résulte pas qu'elle soit une condition suffisante, car la démonstration précédente ne nous dit pas que cette propriété soit exclusive aux points multiples.

Donc, tout ce que l'on doit conclure, c'est que $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$ indique seulement qu'il peut y avoir une point multiple.

Pour savoir ensuite si ce point est réellement multiple, on doit discuter la courbe aux environs de ce point.

De là la règle suivante :

*Règle. — Pour reconnaître s'il existe des points multiples dans une courbe déterminée par une équation, que nous représenterons par u, par exemple, on doit en déduire par la différentiation, $P\,dx + Q\,dy = o$, et l'on examinera si les mêmes valeurs de x et de y satisfont à la fois à la proposée u et aux équations $P=o$, $Q=o$ ; si cela est, ce sera un indice que ces valeurs de x et de y peuvent appartenir à un point multiple ; et en discutant la courbe aux environs de ce point on verra s'il est réellement multiple.*

## DES POINTS CONJUGUÉS.

74. — On a donné le nom de *point isolé* ou *point conjugué* à un point entièrement détaché de la courbe à laquelle il se rapporte et dont les coordonnées sont les deux seules coordonnées réelles qui se trouvent dans la partie où les coordonnées de la courbe sont imaginaires.

75. — On reconnait qu'une courbe représentée, par exemple, par l'équation $y=fx$, *peut avoir* un point conjugué, quand en développant, par la formule de Taylor, art. 41, l'équation $y'=f(x+h)$, on obtient pour le développement une valeur imaginaire quand on y fait x égale à une valeur déterminée a ; ou, plus simplement, quand l'un des coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., du développement, est imaginaire quand on y fait $x=a$.

Remarquons que c'est dans le développement effectué de $f(x+h)$ qu'on doit remplacer x par a. Autrement dit, il faut faire $x = a + h$ dans l'équation primitive $y = fx$, et pour le développement, par la formule de Taylor, on doit avoir une valeur imaginaire.

A la valeur $x=a$, correspond $y=b$ ; a et b sont les coordonnées du point conjugué s'il existe.

On *s'assurera ensuite si ce point conjugué existe réellement*, en augmentant et en diminuant successivement l'abscisse a d'une quantité h plus petite que a. et si, dans

les deux cas, y devient imaginaire, c'est que, réellement, le point a, b, est un point conjugué.

Pour démontrer ce que nous venons de dire, représentons par $y = fx$ l'équation d'une courbe qui a un point conjugué.

Soient a et b les coordonnées de ce point ; puisqu'il est isolé il faut évidemment, qu'au moins, dans ses environs, les coordonnées soient imaginaires ; par conséquent si nous supposons que l'abscisse a s'augmente d'une petite quantité h, l'ordonnée correspondante, représentée par $f(a+h)$, devra être imaginaire. Or le série de Taylor, art. 41, nous donne, en général,

$$f(x+h) = y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Si nous faisons $x=a$, l'ordonnée correspondante sera b, par suite nous changerons dans la série y en b ; et si nous représentons par $\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, etc., ce que deviennent les coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$, etc., dans cette hypothèse, nous aurons

$$f(a+h) = b + \left(\frac{dy}{dx}\right)h + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{h^2}{1.2} + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Et cette série de $f(a+h)$ devra avoir une valeur imaginaire. Or, pour que cela soit, il faut au moins que l'une des expressions $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, etc., soit imaginaire, c'est-à-dire que l'hypothèse de $x = a + h$ rende imaginaire l'un des coefficients différentiels ; (en effet, nous savons que les quantités b, h, $h^2$, etc. sont réelles). Donc, si la courbe a un point conjugué, la condition que nous venons d'énoncer devra être remplie ; et réciproquement, lorsqu'elle est remplie, on pourra conclure que la courbe que représente l'équation *peut avoir* un point conjugué. Mais on n'est pas encore certain que ce point existe, car la condition que nous avons énoncée, ci-dessus, a été démontrée nécessaire, mais pas suffisante. Pour vérifier que ce point existe réellement, on augmentera et l'on diminuera successive-

ment l'abscisse d'une quantité h plus petite que cette abscisse et si, dans les deux cas, y devient imaginaire, c'est que le point est réellement un point conjugé.

Par exemple, si l'on a l'équation $y = \pm (x + b)\sqrt{x}$, qui représente la courbe LMN, fig. 28, et si l'on veut savoir si elle a un point conjugé, nous la différentierons et nous aurons $dy = \pm d[(x+b)\sqrt{x}] = \pm d(\sqrt{x^3} + b\sqrt{x}) = \pm d(x^{3/2} + b x^{1/2}) = \pm\left(\frac{3}{2} x^{3/2-1} dx + \frac{1}{2} b x^{1/2-1} dx\right) = \pm\left(\frac{3}{2} x^{1/2} dx + b \frac{1}{2} x^{-1/2} dx\right) = \pm \left(\frac{3}{2}\sqrt{x} + b\frac{1}{2}\frac{1}{x^{1/2}}\right)dx = \pm\left(\frac{3}{2}\sqrt{x} + b\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ ; donc

Fig. 28.

$$\frac{dy}{dx} = \pm\left(\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{b}{2\sqrt{x}}\right).$$

Si dans l'équation primitive, on fait $x = -b$, on a $y = 0$. La valeur de $x = -b$ rend imaginaire la valeur de $\frac{dy}{dx}$ ci-dessus. Donc, il est à présumer que le point A, fig. 28 dont les coordonnées sont $x = -b$ et $y = 0$ est un point conjugué. Pour nous en assurer, augmentons et diminuons successivement l'abscisse $-b$ d'une quantité plus petite que b, et nous trouverons que, dans les deux cas, y devient imaginaire.

Ainsi, soit $b' < b$, nous aurons $y = \pm [(-b + b') + b]\sqrt{-b+b'} = \pm b'\sqrt{-b''}$, en faisant $b'' =$ différence de $-b + b' =$ une quantité négative $-b''$. La valeur précédente obtenue en augmentant $-b$ de $b'$, est comme on voit imaginaire. Si l'on diminue $-b$ de $b'$, on aura
$y = \pm [(-b-b') + b]\sqrt{-b-b'} = \pm(-b')\sqrt{-b'''}$, en faisant $-b - b' = -b'''$.

Cette valeur étant également imaginaire, on peut conclure que le point A est réellement un point conjugué.

76. — Nous avons appris, à l'art. précédent, quelle est la condition nécessaire pour qu'il puisse y avoir un point

conjugué, et la manière de s'assurer si ce point existe réellement.

En nous appuyant sur cette condition, l'un des coefficients différentiels imaginaire, nous allons démontrer que quand on sait obtenir $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$, il peut y avoir un point conjugué, c'est-à-dire que c'est là une condition nécessaire, De sorte que les points conjugués, comme les points multiples, art. 73, font présumer leur existence en rendant $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$.

En effet, l'équation $y = f\,x$ étant différentiée et pouvant se mettre sous la forme $P\,dx + \underset{\sim}{Q}\,dy = o$, on en déduit $P + \underset{\sim}{Q}\frac{dy}{dx} = o$ ; différentiant de nouveau, on obtient $d\,P + d\left(\underset{\sim}{Q}\frac{dy}{dx}\right) = o$, ou art. 9, $d\,P + \underset{\sim}{Q}\frac{d^2\,y}{dx} + \frac{dy}{dx}.\,d\,\underset{\sim}{Q} = o$ ;

et en divisant par dx, on aura

$$\frac{d\,P}{dx} + \underset{\sim}{Q}\frac{d^2\,y}{dx^2} + \frac{dQ}{dx}\,\frac{dy}{dx} = o.$$

Remarquons que le terme qui est affecté de $\frac{d^2\,y}{dx^2}$ possède $\underset{\sim}{Q}$ comme coefficient.

En différentiant de nouveau, et en divisant par dx, on a

$$\frac{d^2\,P}{dx^2} + \underset{\sim}{Q}\frac{d^3\,y}{dx^3} + \frac{dQ}{d\,x}\frac{d^2\,y}{dx^2} + \frac{d\underset{\sim}{Q}}{d\,x}\frac{d^2\,y}{dx^2} + \frac{d^2\,\underset{\sim}{Q}}{dx^2}\,\frac{dy}{dx} = o,$$

et l'on voit que $\underset{\sim}{Q}$ est encore le coefficiant de $\frac{d^3\,y}{dx^3}$; et ainsi de suite, de telle sorte que quand on sera arrivé au coefficient de l'ordre n, nous aurons une expression de la forme

$$\underset{\sim}{Q}\,\frac{d^n\,y}{dx^n} + K = o, \; (105),$$

en représentant par K tous les termes autres que $\underset{\sim}{Q}\,\frac{d^n\,y}{dx^n}$.

Cela étant, pour qu'il puisse y avoir un point conjugué il faut, avons-nous vu, qu'il y ait au moins l'un des coefficients différentiels pui devienne imaginaire pour une valeur de x, et qui par conséquent contienne un radical ; représentons ce coefficients par $\frac{d^n\,y}{dx^n}$, il s'ensuit donc que la fonction de x que représente cette expression a plus

d'une valeur ; par suite $\underset{\sim}{Q}$ doit égaler zéro, car de l'équation (105) on tire

$$\underset{\sim}{Q}\frac{d^n y}{dx^n} = -K$$

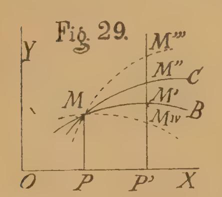
et comme $\frac{d^n y}{dx^n}$ a plusieurs valeurs il faut que $\underset{\sim}{Q}=0$, ainsi que K.

Mais si $\underset{\sim}{Q}=0$, l'équation $P+\underset{\sim}{Q}\frac{dy}{dx}=0$, donne $P=0$, et comme de l'équation $P+\underset{\sim}{Q}\frac{dy}{dx}=0$, on tire $\frac{dy}{dx}=-\frac{P}{\underset{\sim}{Q}}$, on a $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$; ce qu'il faillait démontrer.

Donc $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$ indique *qu'il peut* y avoir un point conjugué, c'est une condition nécessaire.

## Courbes osculatrices.

77. — Soient $y=\varphi x$ et $y=Fx$, les équations de deux courbes MB, MC, qui se rencontrent, fig. 29, au point M, dont les coordonnées sont $OP=x'$, $PM=y'$ ; les coordonnées du point M, devant satisfaire à la fois aux deux équations, on aura :




$y'=\varphi x'$ et $y'=Fx'$, d'où $\varphi x'=Fx'$.

Si maintenant O P ou x' s'accroît d'une quantité P P' ou h; à l'abscisse OP' ou $x'+h$, correspondra l'ordonnée y'' ou M'P' pour la courbe M B et M'' P' pour la courbe MC ; et, en mettant $x'+h$ au lieu de x', dans les équations $y'=\varphi x'$ et $y'=Fx'$, on aura y'' ou $M'P'=\varphi(x'+h)$ et $M''P'=F(x'+h)$, d'où, d'après la formule de Taylor, art. 41, on aura :

$$M'P'=\varphi(x'+h)=\varphi x'+\frac{dy'}{dx'}h+\frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{h^2}{1.2}+\text{etc.};$$

$$M''P'=F(x'+h)=Fx'+\frac{dy'}{dx'}h+\frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{h^2}{1.2}+\text{etc.}$$

Et en observant que $y'=\varphi x'=Fx'$, on a :

$$M'P'=\varphi(x'+h)=\varphi x'+\frac{d.\varphi x'}{dx'}h+\frac{d^2\varphi x'}{dx'^2}\frac{h^2}{1.2}+\text{etc.}\ (106);$$

$$M''P'=F(x'+h)=Fx'+\frac{d.Fx'}{dx'}h+\frac{d^2Fx'}{dx'^2}\frac{h^2}{1.2}+\text{etc.}\ (107).$$

Si tous les termes correspondants de ces développements sont identiquement les mêmes, $M''P' - M'P'$ égalera zéro, et les points $M'$ et $M''$ se confondront, ainsi que les points en M. Les termes, étant identiquement les mêmes dans les deux développements, les points $M'$ et $M''$ sont quelconques ; donc les courbes se confondront.

Si l'on a seulement $Fx' = \varphi x'$, les courbes, comme nous l'avons vu, n'auront de commun que le point M ; si, outre $Fx' = \varphi x'$, on a $\frac{d.\,Fx'}{dx'} = \frac{d.\,\varphi x'}{dx'}$, ces courbes se rapprochent davantage ; et encore plus si, outre ces équations, on a aussi $\frac{d^2 Fx'}{dx'^2} = \frac{d^2 \varphi x'}{dx'^2}$ ; et ainsi de suite ; car il est évident que la différence de $M''P'$ à $M'P'$ sera d'autant moindre, qu'il y aura un plus grand nombre de termes égaux dans leurs développements.

Donc les équations $Fx' = \varphi x'$, $\frac{dFx'}{dx'} = \frac{d.\,\varphi x'}{dx'}$, etc., sont les équations de condition pour que les courbes MB, MC, se rapprochent, et plus elles sont nombreuses, plus le rapprochement est grand. Ces équations de condition peuvent servir à déterminer un nombre égal de constantes a, b, c, etc., de l'équation $y = Fx$. Et si l'on substitue alors la valeur de ces constantes, dans l'équation $y = Fx$, l'équation, qui résultera de cette substitution, représentera une courbe qui se rapprochera de la courbe $y = \varphi x$, et qui s'en rapprochera d'autant plus qu'on aura déterminé un plus grand nombre de constantes de l'équation $y = Fx$, en prenant un plus grand nombre d'équations de condition, c'est-à-dire en faisant égaux chacun à chacun, un plus grand nombre de termes correspondants des deux développements.

La courbe que représente l'équation obtenue en substituant dans l'éq. $y = F\,x$ les valeurs des constantes tirées des équations de condition, est ce qu'on appelle une osculatrice à la courbe réprésentée par l'équation $y = \varphi\,x$.

Elle est dite osculatrice du premier ordre, si on a substitué les valeurs de deux constantes ; elle est dite du deuxiéme ordre si c'est trois constantes qu'on a éliminé de

l'équation $y = F x$, au moyens de trois équations de conditions ; et ainsi de suite.

78. — Remarquons que nous avons supposé que, sans changer la nature de la courbe représentée par l'équation $y = F x$, on pouvait donner des valeurs arbitraires aux constantes a, b, c, etc., qui entrent dans cette équation.

En effet, soit, par exemple, l'équation $y^2 = m x + n x^2$ qui est celle d'une ellipse. Quelles que soient les valeurs que l'on donne aux constantes m et n, *tant qu'elles ne font pas changer de signes et qu'elles ne rendent pas nulles* les constantes, l'équation conservera toujours la même forme et par conséquent représentera toujours une ellipse.

Donc, on peut regarder comme arbitraires les constantes a, b, c, etc., de l'équation $y = F x$, qui entrent dans les équations

$$F x' = \varphi x', \frac{d. F x'}{dx'} = \frac{d. \varphi x'}{dx'}, \frac{d^2 F x'}{dx'^2} = \frac{d^2 \varphi x'}{dx'^2}, \text{ etc.,}$$

et en prenant autant de ces équations qu'il y a de constantes, on déterminera ces constantes par la condition que ces équations soient satisfaites.

Par exemple, si l'équation $y = Fx$ ne contient que trois constantes a, b, c, on posera

$$Fx' = \varphi x' = y', \frac{d.Fx'}{dx'} = \frac{d \varphi x'}{dx'} = \frac{dy'}{dx''}, \frac{d^2 Fx'}{dx'^2} = \frac{d^2 \varphi x'}{dx'^2} = \frac{d^2 y'}{dx'^2}.$$

On tirera, de ces équations, les valeurs de a, de b et de c, en fonction de $x'$, de $y'$, de $\frac{dy'}{dx'}$, etc. ; on les substituera dans l'équation $y = Fx$. Alors, elle jouira de cette propriété que, lorsqu'on y mettra $x' + h$ à la place de x, l'équation (107), qu'on obtiendra à l'aide de la formule de Taylor, aura les trois premiers termes de son second membre respectivement égaux aux trois premiers termes du second membre de l'équation (106). En effet, nous avons vu qu'on déterminait les constantes en supposant que ces termes soient égaux deux à deux dans les deux développements.

Ce que nous disons d'une équation qui ne renferme que trois constantes, peut s'appliquer à une qui en contiendrait un plus grand membre.

79. — Comme application de ce qui précède cherchons, par exemple, l'osculatrice à la courbe $y = \varphi x$ dans le cas où l'équation $y = Fx$ représente celle d'une ligne droite.

Cette équation $y = Fx$ sera donc remplacée par celle-ci, qui est celle d'une ligne droite (géom. analytique) :

$$y = ax + b \ (108).$$

Les équations de condition nécessaires pour l'élimination des constantes a et b seront $\varphi x' = F x' = a x' + b$,

$$\frac{d. \varphi x'}{dx'} = \frac{d. F x'}{dx'} = \frac{d. (a x' + b)}{dx'} = \frac{a\, dx'}{dx'} = a \ (109).$$

Et comme $\varphi x'$ représente l'ordonnée $y'$ du point M de la courbe dont l'équation est $y = \varphi x$, point dont les coordonnées sont $x'$, $y'$, nous pouvons remplacer $\varphi x'$ par $y'$, et les équations (109) deviendront

$$y' = ax' + b, \frac{dy'}{dx'} = a\,;$$

éliminant a, on obtiendra

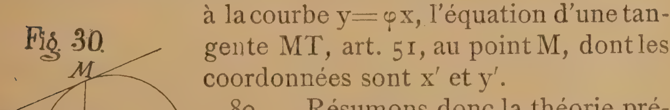
$$y' = \frac{dy'}{dx'} x' + b\,; \text{ d'où } b = y' - \frac{dy'}{dx'} x'.$$

Substituant les valeurs de a et de b, ci-dessus, dans l'équation, (tenant lieu de $y = F x$), de la ligne droite, donc dans $y = ax + b$, on obtiendra

$$y = \frac{dy'}{dx'} x + y' - \frac{dy'}{dx'} x' = \frac{dy'}{dx'} (x - x') + y', \text{ d'où } y - y' = \frac{dy'}{dx'} (x - x').\ (110).$$

Comme nous n'avons dû éliminer que deux constantes, cette équation (110) représente une osculatrice du premier ordre à la courbe représentée par l'équation $y = \varphi x$ (art. 77).

On reconnaît dans cette équation, pour cette osculatrice à la courbe $y = \varphi x$, l'équation d'une tangente MT, art. 51, au point M, dont les coordonnées sont $x'$ et $y'$.




80. — Résumons donc la théorie précédente en disant que si les courbes représentées par les équations $y = \varphi x$ et $y = Fx$ avaient seulement un point commun, en représentant par $x'$ et $y'$ les coordonnées de ce point, on aurait l'équation de condition

$\varphi x' = Fx'$, mais qu'en déterminant deux constantes de l'équation $y = Fx$, par les condition $Fx' = \varphi x'$ et $\frac{d.Fx'}{dx'} = \frac{d.\varphi x'}{dx'}$, les courbes commenceraient à se rapprocher.

Représentons par $y = fx$ ce que devient $y = Fx$ après qu'on y a substitué les valeurs de ces deux constantes, la courbe $y = fx$ sera une osculatrice du premier ordre à la courbe $y = \varphi x$; et si, toujours en vertu des valeurs arbitraires qu'on peut donner aux constantes, on élimine trois des constantes de l'équation $y = Fx$, au moyen des équations suivantes :

$$Fx' = \varphi x', \frac{dFx'}{dx'} = \frac{d\varphi x'}{dx'}, \frac{d^2Fx'}{dx'^2} = \frac{d^2\varphi x'}{dx'^2} \text{ (111)};$$

et qu'on représente par $\psi x$ ce que devient $Fx$, après cette substitution, cette courbe représentée par $y = \psi x$ sera une osculatrice du second ordre à la courbe représentée par l'équation $y = \varphi x$, dont elle approchera encore plus, et ainsi de suite ; de sorte que pour une osculatrice du $n^{ième}$ ordre, nous aurons les équations

$$Fx' = \varphi x', \frac{dFx'}{dx'} = \frac{d.\varphi x'}{dx'}, \frac{d^2Fx'}{dx'^2} = \frac{d^2\varphi x'}{dx'^2}, \dots \frac{d^nFx'}{dx'^n} = \frac{d^n\varphi x'}{dx'^n}. \text{ (112)}.$$

*Remarque.* — On peut donc conclure qu'à une même courbe $y = \varphi x$, il peut y avoir autant d'osculatrices différentes qu'il y a de constantes à déterminer moins une dans l'équation générale $y = Fx$ qui représente la courbe osculatrice, laquelle peut se réduire à une droite ; et que plus on aura déterminé de constantes, plus les osculatrices successives se rapprocheront de la courbe, $y = \varphi x$, à laquelle on mène ces osculatrices.

Le degré ou l'ordre d'une osculatrice est marqué par le nombre de constantes déterminées diminué d'une unité ; par exemple, pour deux constantes déterminées, on aura une osculatrice du premier degré ou ordre ; pour trois constantes, une osculatrice du deuxième degré et ainsi de suite.

81. — De deux osculatrices qu'on a obtenues, comme nous l'avons indiqué, en faisant varier les constantes d'une

même équation, celle de ces osculatrices qui est d'un ordre inférieur ne peut pas passer entre l'autre et la courbe à laquelle on a mené ces osculatrices.

En effet, tout d'abord cela se conçoit puisque nous avons vu que plus on déterminait de constantes, donc plus le degré ou l'ordre de l'osculatrice était élevé, plus celle-ci se rapprochait de la courbe.

Mais nous pouvons le démontrer encore de la manière suivante :

Par exemple, soient MB et MC, fig. 29, la courbe $y=\varphi x$ et son osculatrice du second ordre $y=\psi x$ ; nous devons donc démontrer que l'osculatrice du premier ordre $y=fx$, ne peut passer entre les courbes MB et MC.

Pour celà, en mettant $x'+h$ à la place de $x$, dans les trois équations précédentes, nous trouverons, d'après la formule de Taylor, art. 41 et art. 77, éq. 106 :

$$y' \text{ ou } M'P' \text{ ou } \varphi(x'+h)=\varphi x'+\frac{d.\varphi x'}{dx'}h+\frac{d^2\varphi x'}{dx'^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3\varphi x'}{dx'^3}\frac{h^3}{2.3}+\text{etc.},$$

$$M''P' \text{ ou } \psi(x'+h)=\psi x'+\frac{d.\psi x'}{dx'}h+\frac{d^2\psi x'}{dx'^2}\frac{h^2}{2}+\frac{d^3\psi x'}{dx'^3}\frac{h^3}{2.3}+\text{etc.}$$

$$f(x'+h)=fx'+\frac{d.fx'}{dx'}h+\frac{d^2fx'}{dx'^2}\frac{h^2}{2}+\frac{d^3fx'}{dx'^3}\frac{h^3}{2.3}+\text{etc.}$$

La courbe $y=\psi x$, étant une osculatrice du second ordre à $y=\varphi x$, il faut qu'on ait d'après ce que nous venons de voir :

$$\psi x'=\varphi x',\ \frac{d\psi x'}{dx'}=\frac{d\varphi x'}{dx'},\ \frac{d^2\psi x'}{dx'^2}=\frac{d^2\varphi x'}{dx'^2}.$$

De même, $y=fx$ étant une osculatrice du premier ordre à $y=\varphi x$, on a aussi

$$fx'=\varphi x',\ \frac{dfx'}{dx'}=\frac{d\varphi x'}{dx'};$$

il résulte de là qu'on a :

$$\varphi x'=\psi x'=fx',\frac{d\varphi x'}{dx'}=\frac{d\psi x'}{dx'}=\frac{dfx'}{dx'},$$

mais seulement $\dfrac{d^2\varphi x'}{dx'^2}=\dfrac{d^2\psi x'}{dx'^2}.$

Pour simplifier, faisons

$$\varphi x' + \frac{d\varphi x'}{dx'} h = K \text{ et } \frac{1}{2}\frac{d^2\varphi x'}{dx'^2} = V ;$$

et les trois développements précédents pourront s'écrire ainsi :

$$M'P' \text{ ou } \varphi(x'+h) = K + Vh^2 + \frac{d^3\varphi x'}{dx'^3}\frac{h^3}{2.3} + \text{etc.},$$

$$M''P' \text{ ou } \psi(x'+h) = K + Vh^2 + \frac{d^3\psi x'}{dx'^3}\frac{h^3}{2.3} + \text{etc.},$$

$$f(x'+h) = K + \frac{d^2 fx'}{dx'^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^3 fx'}{dx'^3}\frac{h^3}{2.3} + \text{etc.},$$

et en remarquant que tous les termes, à partir de celui qui est affecté de $h^3$, ont $h^3$ pour facteur commun, puisque pour $h^4$, on a $h^4 = h \times h^3$, $h^5 = h^2 \times h^3$, etc., on peut écrire $\frac{d^3\varphi x'}{dx'^3}\frac{h^3}{2.3} + \ldots \text{etc.} = M h^3$.

Et, en faisant des réductions analogues dans les autres équations, on aura pour les trois développements :

$$\varphi(x'+h) = K + Vh^2 + Mh^3,$$
$$\psi(x'+h) = K + Vh^2 + Nh^3,$$
$$f(x'+h) = K + \frac{1}{2}\frac{d^2 fx'}{dx'^2} h^2 + Ph^3.$$

Les courbes $y = fx$ et $y = \psi x$ étant des osculatrices, l'une du premier ordre et l'autre du second ordre, V est nécessairement différent de la quantité correspondante $\frac{1}{2}\frac{d^2 fx'}{dx'^2}$, car autrement, on aurait, vu la valeur de K et les égalités qui précèdent, les trois premiers termes du développement de $f(x'+h)$ respectivement égaux à ceux correspondants de $\psi(x'+h)$, et par suite les deux osculatrices seraient du second ordre. Donc V diffère de $\frac{1}{2}\frac{d^2 fx'}{dx'^2}$.

On ne peut donc faire que les deux hypothèses suivantes sur V :

$$V < \frac{1}{2}\frac{d^2 fx'}{dx'^2} \text{ ou } V > \frac{1}{2}\frac{d^2 fx'}{dx'^2}.$$

Dans le premier cas, soit z l'excès de $\frac{1}{2}\frac{d^2 fx'}{dx'^2}$ sur V, on aura

$$V + Z = \frac{1}{2}\frac{d^2 fx'}{dx'^2}.$$

Dans le second cas, au contraire, on aura $V - Z = \frac{1}{2}\frac{d^2fx'}{dx'^2}$; c'est-à-dire que Z sera négatif. Donc on a $\frac{1}{2}\frac{d^2fx'}{dx'^2} = V + Z$, Z étant positif ou négatif.

En substituant cette valeur de $\frac{1}{2}\frac{d^2fx'}{dx'^2}$ dans celle de f (x' + h), on aura pour le troisième développement qui précède : $f(x' + h) = K + (V + z)h^2 + Ph^3$.

Et, en remarquant que $h^2$ est un facteur commun aux deux derniers termes des trois développements ci-dessus, nous aurons, en mettant $h^2$ en évidence :

$$\varphi(x' + h) = K + (V + Mh)h^2,$$
$$\psi(x' + h) = K + (V + Nh)h^2,$$
$$f(x' + h) = K + (V + Z + Ph)h^2;$$

Z étant positif ou négatif.

Or, en faisant h suffisamment petit, il est possible de faire en sorte que la quantité Z, indépendante de h, soit plus grande que les expressions Mh et Nh qui tendent vers zéro, quand h devient très-petit. Alors, si Z est positif, $f(x'+h)$ surpassera $\varphi(x'+h)$ et $\psi(x'+h)$ ; dans ce cas, on a donc $f(x'+h)$ ou $M'''P'$, fig. 29, plus grand que $M'P'$, et que $M''P'$, ce qui fait voir que la courbe $y = fx$, représentée par $MM'''$ ne peut passer entre les deux autres représentées par $MM''$ ou MC et $MM'$ ou MB.

Si, au contraire, Z est négatif, on a $f(x'+h)$ ou $M^{IV}P'$, moindre que $\varphi(x'+h)$ ou $M'P'$ et que $\psi(x'+h)$ ou $M''P'$ ; car Ph tend également vers zéro. La courbe $MM^{IV}$ étant alors celle qui s'approche le plus de l'axe des x, ne peut être comprise entre les deux autres.

82. — *Remarque I.* — On voit pourquoi, art. 79, la ligne droite MT, qui avons-nous vu, est une osculatrice du premier ordre à la courbe $y = \varphi x$, est tangente à cette courbe. En effet, d'après ce que nous venons d'exposer, entre cette droite MT et la courbe, on ne peut faire passer aucune autre droite, ce qui est la propriété de la tangente. Nous disons qu'on ne peut faire passer aucune autre osculatrice entre la droite MT et la courbe, en faisant varier les constantes de l'équation de la ligne droite, art. 79, car pour que cela

fut possible, il faudrait que la nouvelle osculatrice soit d'un ordre supérieur au premier, c'est-à-dire qu'il faudrait qu'il y ait plus de deux constantes dans l'équation de la ligne droite, art. 79, ce qui n'est pas.

*Remarque II.* — On dit que la tangente a un contact du premier ordre avec la courbe.

En général, une osculatrice d'un ordre n a un contact de même ordre avec la courbe à laquelle elle est osculatrice ; ainsi, par exemple, quand on a entre deux courbes les équations

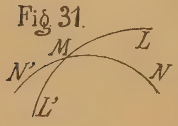
$$\varphi x' = Fx', \quad \frac{d\varphi x'}{dx'} = \frac{dFx'}{dx'}, \quad \frac{d^2\varphi x'}{dx'^2} = \frac{d^2Fx'}{dx'^2},$$

on peut déterminer trois constantes, c'est-à-dire une osculatrice du second ordre, donc les courbes ont un contact du second ordre. Le contact serait du troisième ordre si, outre ces équations, on avait encore celle-ci : $\frac{d^3\varphi x'}{dx'^3} = \frac{d^3Fx'}{dx'^3}$ ; et ainsi de suite.

83. — L'équation du cercle qui est

$$(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = Y^2,$$

renfermant trois constantes, cette courbe (circonférence) pourra devenir une osculatrice du second ordre a une courbe quelconque MN, fig. 31, dont on a l'équation. Ce cercle, qu'on appelle *cercle osculateur*, a donc un contact du second ordre avec la courbe MN ; le rayon de ce cercle s'appelle *rayon de courbure de la courbe MN*.




Nous allons chercher une formule qui nous donne le rayon, (dit rayon de courbure à une courbe MN), de ce cercle, en fonction des coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ de la courbe quelconque MN ; de sorte que pour obtenir le rayon, du cercle osculateur à une courbe donnée par son équation, ou le rayon de courbure à cette courbe, il suffira de déduire de cette équation les valeurs des coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ qu'on substituera dans la formule

que nous allons chercher, et le résultat donnera la valeur du rayon de courbure.

Soient x′ et y′ les coordonnées du point M de la circonférence du cercle donné par l'équation ci-dessus. Ces coordonnées satisfaisant à l'équation du cercle, on a l'équation suivante (tenant lieu de l'équation générale $y' = Fx'$) :

$$(y'-\beta)^2 + (x'-\alpha)^2 = Y^2, \quad (113)$$

de laquelle on peut tirer la valeur de y′, laquelle remplacera Fx′, (car on a $y = Fx$ pour la courbe osculatrice) dans les équations de contact qui sont, d'après ce qui précède :

$$\varphi x' = Fx' = y', \frac{d\varphi x'}{dx'} = \frac{d.Fx'}{dx'} = \frac{dy'}{dx'}, \frac{d^2\varphi x'}{dx'^2} = \frac{d^2 Fx'}{dx'^2} = \frac{d^2 y'}{dx'^2}.$$

Si nous adoptons en même temps x et y pour les coordonnées de la courbe $y = \varphi x$, au point de contact, pour la différentier de celles de la courbe osculatrice $y = Fx$, les équations précédentes deviendront, (x et y coordonnée du point de contact M pour la courbe $y = \varphi x$ et x′, y′, celles du même point, mais pour la courbe (cercle) $y = Fx$):

$$y = y', \frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'}, \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y'}{dx'^2} \quad (114).$$

Il nous foudra donc mettre dans ces équations, les valeurs de y′, de $\frac{dy'}{dx'}$, et de $\frac{d^2 y'}{dx'^2}$, valeurs qu'on tirera de l'équation (113) et de ses deux différentielles successives.

Cherchons d'abord ces deux différentielles successives. On a pour la différentielle première :

différentielle de $[(y'-\beta)^2 + (x'-\alpha)^2 = Y^2] =$ $[2(y'-\beta)\,d.(y'-\beta) + 2(x'-\alpha)\,d.(x'-\alpha) = d.Y^2$ ou constante $= 0]$ ; divisant par 2, et observant que $d(y'-\beta)$ et $d(x'-\alpha)$ égalent dy′ et dx′, on aura $(y'-\beta)\,dy' + (x'-\alpha)\,dx' = 0$, et en divisant par dx′, il viendra enfin

$$(y'-\beta)\frac{dy'}{dx'} + x' - \alpha = 0. \quad (115).$$

Pour la différentielle seconde, on aura (art. 9 et art. 19):

$$d.\left[(y'-\beta)\frac{dy'}{dx'} + x' - \alpha = 0\right] = \left[\left((y'-\beta)\frac{d^2 y'}{dx'} + \frac{dy'}{dx'}\,d.\right.\right.$$

$$\left.(y'-\beta)+dx'\right):dx'=0\Big]=\left((y'-\beta)\frac{d^2y'}{dx'^2}+\frac{dy'}{dx'^2}dy'+\frac{dx'}{dx'}=0\right)=$$
$$\left[(y'-\beta)\frac{d^2y'}{dx'^2}+\frac{dy'^2}{dx'^2}+1=0\right];$$

donc la différentielle seconde est :

$$(y'-\beta)\frac{d^2y'}{dx'^2}+\frac{dy'^2}{dx'^2}+1=0 \ (116).$$

Or, substituer dans les équations (114), les valeurs de y' de $\frac{dy'}{dx'}$ et de $\frac{d^2y'}{dx'^2}$, données par les équations (113), (115) et (116), n'est autre chose qu'éliminer ces quantités entre les équations (113), (114), (115) et (116), ce qui revient à effacer les accents dans les équations (113), (115) et (116), puisque les équations (114) donnent $y=y'$, $\frac{dy}{dx}=\frac{dy'}{dx'}$, et $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y'}{dx'^2}$ et que quand $y=y'$, on a $x=x'$.

Supprimant donc les accents, on aura

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=Y^2 \ (117),$$

$$(y-\beta)\frac{dy}{dx}+x-\alpha=0 \ (118),$$

$$(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy^2}{dx^2}+1=0 \ (119).$$

De cette dernière équation, on tire

$$y-\beta=\left(-1-\frac{dy^2}{dx^2}\right):\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad (120).$$

Substituant cette valeur dans l'équation (118), on obtient

$$-\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}}\frac{dy}{dx}+x-\alpha=0, \text{ d'où } x-\alpha=\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}}\frac{dy}{dx} \ (121).$$

En mettant ces valeurs de $y-\beta$ et de $x-\alpha$ dans l'équation (117), on aura

$$\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}+\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^2\frac{dy^2}{dx^2}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}=Y^2,$$

d'où, en ajoutant les numérateurs après avoir mis le facteur commun $\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^2$ en évidence, on aura

$$\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^2\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}=Y^2\text{, d'où }\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}=Y^2\text{, et en ti-}$$

rant la racine carrée, on obtiendra

$$\pm\frac{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^3}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=Y\text{ ou }\pm\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=Y.\ (122).$$

Le double signe est relatif à la position de la courbe. Si celle-ci tourne sa convexité, vers l'axe des x, alors $\frac{d^2y}{dx^2}$ étant positif, (art. 64), pour que Y se détermine positivement, on devra prendre le signe positif et nous écrirons :

$$Y=\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\ (123).$$

Si, au contraire, la courbe tourne sa concavité vers l'axe des abscisses, alors $\frac{d^2y}{dx^2}$ étant négatif, (art. 64), pour que Y reste positif, nous prendrons le signe négatif et nous aurons :

$$Y=-\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\ (124);$$

car la courbe tournant sa concavité vers l'axe de x, $\frac{d^2y}{dx^2}$ tient lieu d'une quantité négative, qui, substituée dans la valeur de Y, rendra celle-ci positive.

La formule (122), ou les formules (123) et (124), qu'il s'agissait de trouver, donnent la valeur du rayon de courbure Y. Quand on aura l'équation de la courbe quelconque

MN, on en déduira les coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$, on les substituera dans l'une des équations (123) et (124) selon le signe de $\frac{d^2y}{dx^2}$, et l'on obtiendra ainsi la valeur (longueur) du rayon de courbure.

Par exemple, cherchons le rayon de courbure de la parabole MON, fig. 32, dont l'équation est $x^2 = my$.

Fig. 32.

En différentiant, on obtient $2xdx = m\,dy$, d'où $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{m}$, d'où $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{4x^2}{m^2}$; et $\frac{d^2y}{dx^2} = d\left(\frac{dy}{dx}\right) : dx = d.\left(\frac{2x}{m}\right) : dx = 2\frac{dx}{m} : dx = \frac{2}{m}$.

La valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ étant positive, (comme cela doit être puisque la courbe tourne sa convexité vers l'axe de x), nous prendrons la formule (123) et nous y substituerons la valeur des deux coefficients différentiels ci-dessus, nous aurons ainsi pour le rayon de courbure :

$$Y = \frac{\left(1+\frac{4x^2}{m^2}\right)^{3/2}}{\frac{2}{m}} = \frac{\left[\frac{4}{m^2}\left(\frac{m^2}{4}+x^2\right)\right]^{3/2}}{\frac{2}{m}} = \frac{\left(\frac{4}{m^2}\right)^{3/2}\left(\frac{m^2}{4}+x^2\right)^{3/2}}{\frac{2}{m}} =$$

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{4}{m^2}\right)^3}\left(\frac{m^2}{4}+x^2\right)^{3/2}}{\frac{2}{m}} = \frac{\sqrt{\frac{64}{m^6}}\left(\frac{m^2}{4}+x^2\right)^{3/2}}{\frac{2}{m}} = \frac{\frac{8}{m^3}\left(\frac{m^2}{4}+x^2\right)^{3/2}}{\frac{2}{m}} =$$

$$\frac{8\times\left(\frac{m^2}{4}+x^2\right)^{3/2}\times m}{m^3\times 2} = \frac{4\times\left(\frac{m^2}{4}+x^2\right)^{3/2}}{m^2} = \frac{\left(\frac{m^2}{4}+x^2\right)^{3/2}}{\frac{m^2}{4}} \quad (125);$$

telle est la valeur du rayon de courbure à la parabole représentée par l'équation $x^2 = my$.

Or, dans la théorie des courbes, on trouve que la normale à la parabole a pour expression $\left(\frac{m^2}{4} + x^2\right)^{1/2}$; et en comparant cette valeur à la formule (125), nous voyons que

*le rayon de courbure de la parabole est égal au cube de la normale, divisé par le carré du demi-paramètre* $\frac{m}{2}$.

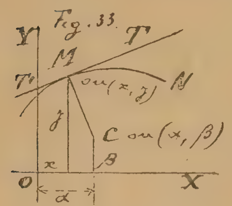
$$\text{En effet} \left[\left(\frac{m^2}{4} + x^2\right)^{1/2}\right]^3 : \left(\frac{m}{2}\right)^2 = \frac{\left(\frac{m^2}{4} + x^2\right)^{3/2}}{\frac{m^2}{4}}.$$

84. — Le cercle osculateur peut servir à mesurer la courbure d'une courbe en un point M, fig. 31. En effet, remarquons d'abord que le rayon de courbure en un point quelconque M, de la courbe MN, ou le rayon du cercle osculateur, peut être regardé comme le rayon d'un arc de la courbe MN, mais d'un arc très-petit passant au point M. Si donc en ce point M, on décrit, avec le rayon de courbure, un arc ML, très-petit, du cercle osculateur, cet arc pourra être considéré comme l'arc même de la courbe, dont il s'écarte très-peu ; or, plus l'arc ML, du cercle, a de courbure, plus son rayon est petit ; d'où il résulte que par le décroissement du rayon de courbure, ou par son accroissement, on pourra connaître si la courbe MN, *augmente* ou *diminue de courbure* ; car en ce point M, le rayon de courbure peut-être considéré comme commun au cercle osculateur et à la courbe MN.

Par exemple, si nous considérons l'équation (125), qui donne le rayon de courbure de la parabole, on voit qu'au sommet o de la courbe,(origine des coordonnées),où $x=o$, fig.32, on a le rayon de courbure $Y = \frac{\left(\frac{m^2}{4}+o\right)^{3/2}}{\frac{m^2}{4}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{m^2}{4}\right)^3}}{\frac{m^2}{4}} = \frac{\sqrt{\frac{m^6}{64}}}{\frac{m^2}{4}} = \frac{\frac{m^3}{8}}{\frac{m^2}{4}} = \frac{m^3}{8} \times \frac{4}{m^2} = \frac{m}{2}$. Mais lorsque x s'accroît successivement, soit positivement, soit négativement, $x^2$ étant toujours positif, le numéateur de la formule (125) augmente également successivement, et par suite le rayon de courbure Y, d'où la courbure de la parabole diminue suc-

cessivement au fur et à mesure qu'on s'écarte du sommet o.

85. — Nous avons vu, art. 51 et 63, que $\frac{dy}{dx}$ exprime la tangente trigonométrique de l'angle que la tangente MT en M, à la courbe MN, fait avec l'axe des x, fig. 33.




Or, la normale à une courbe MN, en un point M dont les coordonnées seraient x′ et y′, aurait pour expression, d'après l'art. 52 :

$$y - y' = -\frac{dx'}{dy'}(x - x').$$

Si cette normale est assujettie à passer par un autre point dont les coordonnées seraient $\alpha$ et $\beta$, ces coordonnées devraient satisfaire à l'équation ci-dessus, de sorte qu'on aura :

$$\beta - y' = -\frac{dx'}{dy'}(\alpha - x').$$

Et en remarquant que dans le cas présent, les coordonnées du point M sont x et y, on a :

$$\beta - y = -\frac{dx}{dy}(\alpha - x),$$

ou en multipliant les deux membres par —1, on a

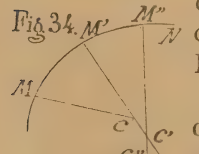
$$y - \beta = -\frac{dx}{dy}(x - \alpha),$$

pour l'équation de la normale à la courbe MN, au point M, cette normale passant par un point dont les coordonnées seraient $\alpha$ et $\beta$.

On tire de cette équation

$$(y - \beta)\frac{dy}{dx} + x - \alpha = 0.$$

Cette équation de la normale étant la même que l'équation (118) du rayon de courbure dans laquelle $\alpha$ et $\beta$ sont les coordonnées du centre du cercle osculateur, on voit que le rayon de ce cercle, ou le rayon de courbure au point M, est normal à la courbe MN en ce point M.




86.— Si, maintenant, par tous le points d'une courbe MM′M″, etc., fig. 34, on mène des rayons de courbure MC, M′C′,

M″C″, etc., les points C, C′, C″, etc., ou centres des cercles oscu lateurs, que nous déterminerons ainsi, seront soumis à une certaine loi, qui est implicitement contenue dans l'équation de la courbe MM′M″. etc, puisque cette courbe étant donnée, la position de ces points en résulte. Etant soumis à une loi, ces points, nous pouvons donner le nom de courbe à leur système; sans pouvoir encore nous prononcer sur la nature de cette courbe.

On lui a donné le nom de *développée de la courbe MM′M″*, etc.

Celle-ci, considérée relativement à la développée, a été appelée la *développante*.

87.— Si l'on passe d'un point à l'autre de la développée, non-seulement x et y varient, x et y points de la courbe (développante) où aboutissent les rayons de courbure, mais encore $\alpha$, $\beta$ et Y varient en même temps; car $\alpha$ et $\beta$ sont, en général, les coordonnées des centres du cercle osculateur, c'est-à-dire du centre de chaque cercle osculateur, et comme la développée est formée par le système de ces centres, il en résulte que $\alpha$ et $\beta$ sont les coordonnées de la développée; coordonnées qui doivent varier évidemment d'un point de la courbe à l'autre. Il en est de même de Y, qui est le rayon du cercle osculateur, et qui représente alors la distance d'un point quelconque ($\alpha$, $\beta$) de la développée à un point M ou (x,y) de la développante d'où est parti Y.

Par conséquent, en différentiant l'équation (118) par rapport à toutes les lettres (considérées comme variables), et en divisant par dx, nous obtiendrons, art. 9 :

$$\left[(y-\beta)\frac{d^2y}{dx}+\frac{dy}{dx}d.(y-\beta)+dx-d\alpha\right]:dx=o,$$

$$\text{ou}\quad (y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\frac{dy}{dx}-\frac{dy}{dx}\frac{d\beta}{dx}+1-\frac{d\alpha}{dx}=o,$$

$$\text{ou}\quad (y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy^2}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\frac{d\beta}{dx}+1-\frac{d\alpha}{dx}=o.$$

Retranchant l'équation (119) de celle-ci, il reste

$$-\frac{dy}{dx}\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dx}=o,$$

d'où l'on tire $-\frac{d\alpha}{dx} = \frac{dy}{dx}\frac{d\beta}{dx}$, d'où $-\frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{d\beta}{dx}} = \frac{dy}{dx}$ ou $-\frac{d\alpha}{dx} \times$ $\frac{1}{\frac{d\beta}{dx}} = \frac{dy}{dx}$. Or, art. 45, $\frac{1}{\frac{d\beta}{dx}} = \frac{dx}{d\beta}$; donc $-\frac{d\alpha}{dx}\frac{dx}{d\beta} = \frac{dy}{dx}$, et par conséquent, art. 17 ; $-\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{dy}{dx}$.

Si l'on substitue cette valeur de $\frac{dy}{dx}$ dans l'équation (118), on obtiendra

$$(y-\beta)\left(-\frac{d\alpha}{d\beta}\right) + x - \alpha = 0$$

d'où

$$y - \beta = (x-\alpha) : \left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right),$$

ou

$$y - \beta = (x-\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{d\beta}{d\alpha}(x-\alpha). \quad (126).$$

Cela étant, nous avons vu, art. 85, que l'équation $y-\beta = -\frac{dx}{dy}(x-\alpha)$, était la même que celle du rayon de courbure qui passait par le point de la courbe M N dont les coordonnées sont x et y. En remplaçant $\frac{dx}{dy}$ par $-\frac{d\beta}{d\alpha}$, valeur trouvée ci-dessus, ce sera toujours l'équation du même rayon, et l'on aura comme à l'équation (126) :

$$y - \beta = \frac{d\beta}{d\alpha}(x-\alpha). \quad (127).$$

Mais l'équation (126) est aussi celle d'une tangente menée au point de la développée, dont les coordonnées sont $\alpha$ et $\beta$ ; car observons, qu'en genéral, $\alpha$ et $\beta$ étant les coordonnées d'un point quelconque de la développée, l'équation de celle-ci sera $\beta = f\alpha$ ; donc $\frac{d\beta}{d\alpha}$ représente, art. 51 et 63, la tangente trigonométrique de l'angle que la tangente à la transformée au point $\alpha$, $\beta$, fait avec l'axe des abscisses ; donc, art. 51, formule (83), l'équation (126) représente la tangente à la transformée au point $\alpha$, $\beta$.

Mais cette équation (126) est la même que l'équation (127) qui est celle du rayon de courbure ; on peut donc conclure que *le rayon de courbure au point $\alpha$, $\beta$, est tangent à la transformée en ce même point.*

*Remarque.* — Dans le cours de la démonstration qui précède nous avons différentier l'équation (118) par rapport à toutes les lettres. Et, en effet, on ne peut pas différentier autrement l'équation (117) soit $(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = Y^2$, et ses dérivées successives (118), etc. Cependant il semble que nous ayons agi autrement, lorsque de l'équation (113), nous avons déduit les équations (115) et (116). Mais observons que, comme nous avions deux constantes arbitraires $\alpha$ et $\beta$, dans l'équation (113), nous les avons déterminées par la condition que les fonctions représentées par les premiers membres des équations (115) et (116) fussent nulles; autrement nous n'aurions pu conclure de ce que l'équation (113) a lieu, que les équations (115) et (116) doivent aussi avoir lieu.

88. — *La différentielle* (*voir art. 3*) *d'un arc S de courbe, en un point M dont les coordonnées sont x et y, est égale à la racine carrée de la somme des différentielles des carrés de ces coordonnées*, de sorte qu'on a

$$d.S = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

En effet, supposons qu'une abscisse $OP = x$, fig. 35, s'accroisse de $PP' = h$ ; menons la parallèle $MQ$ à l'axe des x, nous aurons, par la propriété du carré de l'hypothénuse ; corde $MM' = \sqrt{\overline{MQ}^2 + \overline{M'Q}^2} = \sqrt{h^2 + \overline{M'Q}^2}$ ; or, $M'Q = M'P' - QP' = f(x+h) - fx =$ (art. 41, formule 59) $= \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2} +$ etc. Substituant cette valeur dans l'expression de $MM'$, et représentant par A, par B, etc., les coefficients de $h^3$, de $h^4$, etc., on aura

$$MM' = \sqrt{h^2 + \frac{dy^2}{dx^2}h^2 + A h^3 + B h^4 + \text{etc.}}.$$

ou $$MM' = \sqrt{h^2\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) + A h^3 + B h^4 + \text{etc.}},$$

donc $$\frac{MM'}{h} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + A h + B h^2 + \text{etc.}}.$$

Dans le cas de la limite, la corde se confond avec l'arc que nous représentons par S, de sorte que nous aurous

$$\frac{dS}{dx} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

d'où, en multipliant par dx,

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad (128)..$$

*Remarque I.* — A la théorie des infiniment petits, nous verrons encore ce qu'on entend par différentielle d'un arc.

*Remarque II.* — Pour un arc de la développée, dont les coordonnées, avons-nous vu, sont $\alpha$ et $\beta$, nous aurons pour la différentielle d'un arc de cette courbe

$$dS = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2}, \quad (129).$$

89. — *Le rayon de courbure Y varie par les mêmes différences que la développée, s'est-à-dire que si le rayon de courbure Y augmente, l'arc S de la développeé diminue d'autant.*

Pour démontrer cette proposition, différentions, par rapport à toutes les lettres, l'équation (117), nous aurons :

$$2(y-\beta)\,d(y-\beta) + 2(x-\alpha)\,d(x-\alpha) = 2\,YdY,$$

ou $$(y-\beta)(dy-d\beta)+(x-\alpha)(dx-d\alpha) = YdY.$$

L'équation (118) nous donne

$$(y-\beta)\,dy + (x-\alpha)\,dx = 0.$$

Retranchant cette équation de la précédente, il reste

$$-(y-\beta)\,d\beta - (x-\alpha)\,d\alpha = YdY. \quad (130).$$

Si dans cette équation (130) et dans l'équation (117), nous substituons la valeur de $y-\beta$, donnée par l'équation (126), nous aurons :

$$-\frac{d\beta}{d\alpha}(x-\alpha)\,d\beta - (x-\alpha)\,d\alpha = Y\,dY \text{ ou } -\frac{d\beta^2}{d\alpha}(x-\alpha) - (x-\alpha)\,d\alpha = Y\,dY\,; \text{ et } \frac{d\beta^2}{d\alpha^2}(x-\alpha)^2 + (x-\alpha)^2 = Y^2.$$

Mettant $(x-\alpha)$ en facteur commun, et tirant la racine carrée de la seconde, ces équations deviennent :

$$-(x-\alpha)\left(\frac{d\beta^2}{d\alpha} + d\alpha\right) = YdY, \text{ou} -(x-\alpha)\frac{d\beta^2 + d\alpha^2}{d\alpha} = YdY\,;$$

$$\text{et } \sqrt{(x-\alpha)^2\left(\frac{d\beta^2}{d\alpha^2} + 1\right)} = Y \text{ ou } (x-\alpha)\sqrt{\frac{d\beta^2 + d\alpha^2}{d\alpha^2}} = Y.$$

Divisant la première de ces équations par la seconde, on obtient

$$dY = -\frac{d\beta^2 + d\alpha^2}{d\alpha} : \sqrt{\frac{d\beta^2 + d\alpha^2}{d\alpha^2}} = -(d\beta^2 + d\alpha^2 :)\sqrt{d\beta^2 + d\alpha^2} =$$

$$-\sqrt{d\beta^2 + d\alpha^2}.$$

Or, nous avons vu, (art. 88, remarque II), qu'en appelant S un arc de la développée, on avait

$$dS = \sqrt{d\beta^2 + d\alpha^2}.$$

En comparant cette équation à la précédente, nous en déduirons

$$dY = -dS \text{ ou } dY + dS = 0 \text{ ou } d.(Y + S) = 0.$$

Et comme toute fonction dont la différentielle est nulle est constante, art. 6, 5°, nous aurons donc

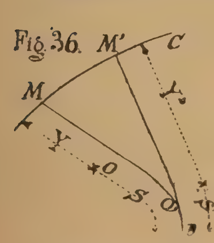
$$Y + S = \text{constante};$$

et par suite si le rayon de courbure Y augmente, il faut que l'arc S diminue d'autant ; ce qu'il fallait démontrer.

90. — Nous avons vu, art. 87, que les rayons de courbure sont tangents à la transformée aux points où ils y aboutissent.

Nous allons démontrer que *la différence de deux rayons de courbure est ègale à l'arc qu'ils comprennent entre eux.*

Soient fig. 36, une courbe MM'C et sa transformée OO'B ; et MO = Y, le rayon de courbure tangente à l'arc de transformée OB = S ; M'O' = Y' le rayon de courbure tangent à l'arc O'B = S' ; nous avons donc pour le rayon de courbure MO, d'après l'art. précédent :




$$Y + S = \text{constante},$$

$$\text{ou } MO + \text{arc } OB = \text{constante}, \quad (131).$$

De même, le rayon de courbure M'O' donne

$$Y' + S' = \text{constante}$$

$$\text{ou } M'O' + \text{arc } O'B = \text{constante}, \quad (132).$$

Les seconds membres des équations (131) et (132) représentant une même constante, puisqu'il s'agit de la même courbe, nous tirerons de ces équations :

$$M'O' + \text{arc } O'B = MO + \text{arc } OB,$$

et par suite,

$$M'O' - MO = \text{arc } OB - \text{arc } O'B = \text{arc } OO',$$

ce qu'il fallait démontrer.

*Remarque.* — Il résulte de ce que nous venons de démontrer que si l'on applique sur la développée OB fig. 36, un fil qui, se terminant tangentiellement, soit fixé au point M de la développante MC, au fur et à mesure qu'on développera la partie de ce fil appliquée sur la courbe, en le laissant constamment tendu en la partie droite, son extrémitè M *décrira dans ce mouvement la développant MC*; car, en supposant que dans son mouvement, le fil développé, droit, soit arrivé dans une position O'M', il se sera accru de OO', et par conséquent égalera en longueur le rayon de cour bure qui passe par le point O'; donc l'extrémité M' de ce fil sera sur la développante.

91. — D'après ce qui précède, *voici de quelle manière on peut trouver l'équation de la développée à une courbe donnée par son équation*. Il faut : 1°, tirer de l'équation donnée de la courbe de laquelle on cherche l'équation de la développée, les *valeurs* de y et des coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc.

2°, Substituer ces *valeurs* dans les équations (118) et (119), ce qui donnera deux nouvelles équations, qui ne seront plus que des fonctions de x ;

3° Eliminer x entre ces équations.

On arrivera ainsi à une équation entre $\alpha$ et $\beta$, laquelle sera celle de la développée.

92. — Exemple. — Soit à chercher la développée de la parabole, dont l'équation est $x^2 = my$. On en tire : $y = \frac{x^2}{m}$; et en différentiant l'équation $x^2 = my$, on obtient successivement ;

$$2x\,dx = mdy, \text{ d'où } \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{m};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = d\left(\frac{2x}{m}\right) : dx = \frac{2}{m}dx : dx = \frac{2}{m}.$$

Substituants ces valeurs de y de $\frac{dy}{dx}$ et de $\frac{d^2y}{dx^2}$ dans les équations (118) et (119), ces équations deviennent

$$\left(\frac{x^2}{m} - \beta\right)\frac{2\,x}{m} + x - \alpha = 0, (133);$$

$$\left(\frac{x^2}{m} - \beta\right)\frac{2}{m} + \frac{4\,x^2}{m^2} + 1 = 0, (134).$$

Retranchant l'équation (133) de l'équation (134) multipliée par x, on obtiendra

$$\left(\frac{x^2}{m} - \beta\right)\frac{2\,x}{m} + \frac{4\,x^3}{m^2} + x - \left(\frac{x^2}{m} - \beta\right)\frac{2\,x}{m} - x + \alpha = 0,$$

ou, en reduisant,

$$\alpha + \frac{4\,x^3}{m^2} = 0, (135).$$

D'autre part, l'équation (134) multipliée par $m^2$ donne

$$\left(\frac{x^2}{m} - \beta\right)\frac{2\,m^2}{m} + 4\,x^2 + m^2 = 0,$$

ou, en réduisant,

$$\left(\frac{x^2}{m} - \beta\right)2\,m + 4\,x^2 + m^2 = 0, \text{ou } 2\,x^2 - 2\,m\beta + 4\,x^2 + m^2 = 0,$$

ou $6\,x^2 - 2\,m\,\beta + m^2 = 0$, d'où

$$\beta = \frac{6\,x^2 + m^2}{2m} = \frac{3\,x^2}{m} + \frac{m}{2}, (136).$$

Et en éliminant x entre les équations (135) et (136), on aura pour l'équation de la développée, après la suite d'opérations suivante :

de l'équation (135), on obtient $m^2\,\alpha + 4\,x^3 = 0$, d'ou $x^3 = -\frac{m^2\,\alpha}{4}$, donc $x = \sqrt[3]{-\frac{m^2\,\alpha}{4}}$;

de l'équation (136), on tire de même la valeur de x, comme il suit

$m\beta = 3\,x^2 + \frac{m^2}{2}$, d'où $3\,x^2 = m\beta - \frac{m^2}{2}$, et $x = \pm\sqrt{\frac{m\beta}{3} - \frac{m^2}{6}}$.

En comparant ces deux valeurs de x, on obtient

$$\pm\sqrt{\frac{m\beta}{3} - \frac{m^2}{6}} = \sqrt[3]{\frac{-m^2\,\alpha}{4}} \text{ ou } \pm\sqrt{\frac{m}{3}\left(\beta - \frac{m}{2}\right)} = \sqrt[3]{\frac{-m^2\,\alpha}{4}}.$$

En élevant les deux membres au carré, on a :

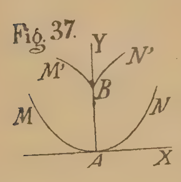
$$\frac{m}{3}\left(\beta - \frac{m}{2}\right) = \sqrt[3]{\frac{m^4\,\alpha^2}{16}};$$

en élevant au cube, on obtient

$\frac{m^3}{27}\left(\beta - \frac{m}{2}\right)^3 = \frac{m^4 \alpha^2}{16}$ ; en divisant par $m^3$, on a $\frac{1}{27}$ $\left(\beta - \frac{m}{2}\right)^3 = \frac{m \alpha^2}{16}$ ; et en multipliant par 27 on obtient

$$\left(\beta - \frac{m}{2}\right)^3 = \frac{27}{16} m \alpha^2, (137).$$

*Telle est l'équation de la développée à la parabole MAN dont l'équation est $x^2 = m y$ et qui est représentée, fig. 37, avec l'origine en A.*




A cette origine A, on a $x = 0$ et par suite les équations (135) et (136) donnent :

$$\beta = 0 \text{ et } \alpha = \frac{m}{2}.$$

Le point B, obtenu en prenant $AB = \frac{m}{2}$ appartient donc à la développée. En donnant ensuite des valeurs positives ou négatives à x, on voit par l'équation (136) que, ($x^2$ étant toujours positif), $\beta$ augmente positivement à mesure que ces valeurs s'accroissent. Et l'équation (135) qui donne $\alpha = -\frac{4x^3}{m^2}$ montre que $\alpha$ augmente également positivement et négativement selon que x est négatif ou positif. Il résulte de là que la développée se compose des branches B M' et B N' l'origine des coordonnées étant en A.

Si nous voulons avoir *l'équation de la développée, avec l'origine en B*; nous aurons pour nouvelle ordonnée $\beta'$, de la développée en fonction de l'ancienne $\beta$ :

$$\beta' = \beta - AB = \beta - \frac{m}{2},$$

car de chaque ordonnée, de la développée, il faudra sustraire AB ou $\frac{m}{2}$, et alors l'équation (137) de la développée, rapportée aux coordonnées $\alpha$ et $\beta'$, devient

$$\beta'^3 = \frac{27}{16} m \alpha^2, (138).$$

Faisons pour abréger, $\frac{27}{16} m = n$, nous aurons

$$\beta'^3 = n \alpha^2, (139).$$

*Remarque.* — On peut facilement prouver que les branches BM′ et BN′ de la développée se tournent leur convexité. En effet, d'aprés l'art. 64, nous devons voir de quel signe est la valeur du coefficient différentiel du second ordre $\frac{d^2 \beta'}{d\alpha^2}$ tirée de l'équation (139). Différentions donc cette équation qui peut se mettre sous la forme suivante en extrayant la racine cubique :

$$\beta' = \sqrt[3]{n\alpha^2}, \text{ ou, art. 14, } \beta' = n^{1/3} \alpha^{2/3} ;$$

nous aurons successivement :

$$\frac{d\beta'}{d\alpha} = \frac{2}{3} n^{1/3} \alpha^{2/3-1} = \frac{2}{3} n^{1/3} \alpha^{-1/3}, \text{ et}$$

$$\frac{d^2\beta'}{d\alpha^2} = d\left(\frac{2}{3} n^{1/3} \alpha^{-1/3}\right) : d\alpha = -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot n^{1/3} \alpha^{-4/3} d\alpha : d\alpha = -\frac{2}{9} n^{1/3} \alpha^{-4/3} = -\frac{2}{9} \sqrt[3]{n} \frac{1}{\alpha^{4/3}} = -\frac{2}{9} \sqrt[3]{n} \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha^4}} = -\frac{2}{9} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{\alpha^4}} = -\frac{2}{9} \sqrt[3]{\frac{n}{\alpha^4}}$$

cette valeur de $\frac{d^2 \beta'}{d\alpha^2}$ étant négative pour $\alpha$ positif comme pour $\alpha$ négatif ($\alpha^4$ étant toujours positif), il en résulte d'après l'art. 64 précité que chaque branche tourne sa concavité vers l'axe des abscisses, et par conséquent se tournent leurs convexités.

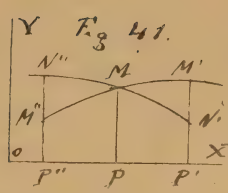
93. — Une osculatrice peut être située de deux manières différentes à l'égard de la courbe avec laquelle elle est en contact ; ainsi : 1°) elle peut avoir ses deux branches toutes deux au-dessus de la courbe, comme dans la figure 38, ou toutes deux au-dessous, comme dans la fig. 39 ; alors l'osculatrice ne fait que toucher la courbe ; 2°) l'osculatrice peut avoir une branche au-dessus de la courbe et l'autre au-dessous, comme dans la fig. 40 ; dans ce cas, l'osculatrice coupera la courbe au point M.

Fig. 38. O S M L N

Fig. 39. L M N O S

Fig. 40. L M S O N

Le cercle osculateur appartient à




la deuxième catégorie, c'est-à-dire qu'il coupe la courbe. En effet, soient pour une même abscisse $x+h$, Y l'ordonnée de la courbe $y=\varphi x$, Y' l'ordonnée de l'osculatrice $y=Fx$.

On a donc, art, 41.

$$\left.\begin{aligned} Y&=\varphi(x+h)=\varphi x+A h+B h^2+Ch^3+D h^4+\text{etc.} \\ Y'&=F(x+h)=Fx+A' h+B' h^2+C' h^3+D' h^4+\text{etc.}\end{aligned}\right\}(140).$$

Or, puisque le cercle est une osculatrice du second ordre (art. 77), les trois premiers termes de ces développements seront les mêmes ; donc la différence des ordonnées, qui correspondent à $x+h$, sera

$$(C-C')h^3+\text{etc.}, (141).$$

Supposons maintenant que l'abscisse devienne $x-h$ ; il faudra changer h en $-h$ dans la différence des ordonnées, qui deviendra

$$-(C-C')h^3+\text{etc.}, (142).$$

Et, comme le premier terme des suites (141) et (142) peut surpasser la somme de tous les autres termes en prenant h assez petit, art. 54, il en résulte que la différence des ordonnées changera de signe, lorsque l'abscisse, au lieu d'être $x+h$, sera $x-h$ ; ainsi, en prenant, fig. 41, $PP''=PP'=h$, si la différence des ordonnées correspondantes à $x+h$ est une quantité positive, c'est-à-dire si l'ordonnée P'M' de la courbe M'' M M' surpasse l'ordonnée P' N' de l'osculatrice N'' M N', l'ordonnée P'' N'' de l'osculatrice surpassera l'ordonnée P'' M'' de la courbe, puisque ces dernières ordonnées correspondent à $x-h$ et que leur différence doit changer de signe. De là, on doit conclure que l'osculatrice est d'un côté au-dessus, de la courbe et de l'autre côté au-dessous, et par suite la coupe.

94. — Ce que nous venons de dire du cercle, qui est une osculatrice du second ordre, peut s'appliquer à toute osculatrice d'ordre pair, en employant un raisonnement semblable à celui qui précède.

95. — Si l'osculatrice était d'un ordre impair, elle toucherait seulement la courbe, au lieu de la couper. Cela est évident d'après ce qui précède.

Par exemple, soit de l'ordre impair trois, alors il y aura quatre termes égaux dans les suites (141) et (142), par suite l'exposant de h serait quatre c'est-à-dire d'ordre pair et par conséquent la puissance paire de h, ici $h^4$, serait toujours positive et la différence des ordonnées serait donc de même signe dans les deux cas de x+h et de x—h.

## Application de la formule de Taylor au développement des fonctions de deux variables qui reçoivent des accroissements.

96. — Lorsque dans une fonctions u, de deux variables indépendantes x et y, soit $u = f(x, y)$, on change x en x+h, et y en y+K, le théorème de Taylor, art. 41, peut nous donner le développement de cette fonction.

En effet, si l'on substitue à x, d'abord la valeur x+h, on aura d'après le théorème de Taylor :

$$f(x+h, y) = u + \frac{du}{dx}h + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{2.3} + \text{etc.}, \quad (143).$$

h étant en évidence dans ce développement, y ne peut être contenu que dans les fonctions $u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^3u}{dx^3}$, etc. Changeant donc y en y+K dans ces fonctions, nous remplacerons, dans l'équation (143), toujours d'après le théorème de Taylor, u par

$$u + \frac{du}{dy}K + \frac{d^2u}{dy^2}\frac{K^2}{2} + \frac{d^3u}{dy^3}\frac{K^3}{2.3} + \text{etc.};$$

$\frac{du}{dx}$ par

$$\frac{du}{dx} + \frac{d.\frac{du}{dx}}{dy}K + \frac{d^2\frac{du}{dx}}{dy^2}\frac{K^2}{2} + \frac{d^3.\frac{du}{dx}}{dy^3}\frac{K^3}{2.3} + \text{etc.};$$

$\frac{d^2u}{dx^2}$ par

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d.\frac{d^2u}{dx^2}}{dy}K + \frac{d.^2\frac{d^2u}{dx^2}}{dy^2}\frac{K^2}{2} + \frac{d.^3\frac{d^2u}{dx^2}}{dx^3}\frac{K^3}{2.3} + \text{etc.};$$

etc. etc. etc. etc.

et formant autant de lignes qu'il y a de termes dans l'équation (143), nous obtiendrons

$$\left.\begin{aligned} f(x+h, y+k) = u + \frac{du}{dy} K + \frac{d^2u}{dy^2} \frac{K^2}{2} + \text{etc.} \\ + \frac{du}{dx} h + \frac{d.\frac{du}{dx}}{dy} hK + \text{etc.} \\ + \frac{d^2u}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{aligned}\right\} (144).$$

97. — Si l'on faisait les substitutions dans l'ordre inverse, on trouverait d'abord en changeant y en y + K ;

$$f(x, y+K) = u + \frac{du}{dy} K + \frac{d^2u}{dy^2} \frac{K^2}{2} + \frac{d^3u}{dy^3} \frac{K^3}{2.3} + \text{ect. ;}$$

et en remplaçant ensuite, dans chaque terme, x par x+h, ou parviendrait au développement suivant :

$$\left.\begin{aligned} f(y+K, x+h) = u + \frac{du}{dx} h + \frac{d^2u}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \text{etc.} \\ + \frac{du}{dy} K + \frac{d.\frac{du}{dy}}{dx} hK + \text{etc.} \\ + \frac{d^2u}{dy^2} \frac{K^2}{2} + \text{etc.} \\ \text{etc.} \end{aligned}\right\} (145)$$

L'ordre dans lequel on fait les substitutions étant arbitraire, puisque devant remplacer partout x par x+h et y par y+k, ces opérations ne peuvent influer l'une sur l'autre; il résulte donc de là que les deux développements (144) et (145) doivent être identiques, et que, par suite, les termes affectés des mêmes produits de h et de K ont les mêmes valeurs. Soient donc, par exemple, les deux termes affectés du produits h K, comme ces deux termes ont même valeur puisque les deux développements sont identiques, nous pouvons poser

$$\frac{d.\frac{du}{dx}}{dy} = \frac{d.\frac{du}{dy}}{dx}.$$

Le premier terme veut dire, commes nous voyons, qu'on doit prendre le coefficient différentiel de u par rapport à x, puis le coefficient différentiel de ce premier

coefficient $\frac{du}{dx}$ par rapport à y; en d'autres termes on doit prendre le coefficient différentiel de u, d'abord par rapport à x, puis par rapport à y, ce qu'on obtient est donc un coefficient différentiel de second ordre, et l'on peut poser,

$$\frac{d.\frac{du}{dx}}{dy} = \frac{d^2u}{dx\,dy}.$$

De même le second terme $\frac{d.\frac{du}{dy}}{dx} = \frac{d^2u}{dy\,dx}$.

On a donc encore l'égalité

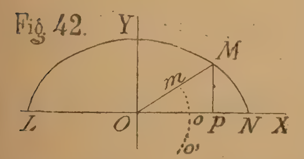
$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = \frac{d^2u}{dy\,dx},$$

ce qui nous montre que pour prendre la différentielle seconde du produit de deux variables, soit $u = f(x,y)$, l'ordre des différentiations est arbitraire ; c'est-à-dire qu'on peut prendre la différentielle seconde de la fonction u, d'abord par rapport à x puis à y ; ou bien d'abord par rapport à y puis à x.

*Remarque.* - On prouverait la même chose pour les coefficients différentiels des ordres supérieurs au second, en égalant entre eux, comme précédemment, les coefficients différentiels des autres termes, pris deux à deux correspondants ; et, en effet, puisque les deux développements, (144) et (145), avons-nous vu, sont identiques.

## TRANSFORMATION DES COORDONNÉES RECTANGULAIRES EN COORDONNÉES POLAIRES.

98. — Soit une courbe LMN, fig, 42, de laquelle on a déterminé la position d'un point M à l'aide des coordonnées rectangulaires OP=x et MP=y.




Ce point sera également déterminé si l'on donne l'angle M O N et le rayon vecteur O M. Mais comme on mesure généralement les angles par les arcs qu'ils interceptent, nous remplacerons l'angle M O N

par l'arc o m, décrit avec un rayon pris pour unité ; alors en représentant par t cet arc o m, et par u le rayon vecteur OM, nous pourrons substituer le système des coordonnées polaires t et u à celui des coordonnées rectangulaires $OP = x$ et $MP = y$.

99. — Remarquons que l'origine des abscisses polaires o m peut être placée ailleurs qu'en o ; car le point M serait également déterminé, si en prenant un point o' pour origine, on donnait l'arc o'm et le rayon vecteur O M.

Dans ce cas, nous pourrions représenter o'm par t', et alors toutes les abscisses polaires comptées à partir de l'origine o différeraient des abscisses comptées de l'origine o', d'une quantité constante o o' ; et il y aurait entr'elles la relation :

$$t = t' - oo'.$$

Mais, au moyen de cette relation, comme on peut toujours changer l'origine de la manière qui convient le mieux à la nature du problème, nous supposerons, dans ce qui va suivre, et pour plus de simplicité, que l'origine est en o.

100. — Soit, par exemple, $F(x, y) = o$, l'équation dans laquelle nous voulons changer les coordonnées rectangulaires $OP = x$ et $MP = y$ en coordonnées polaires $om = t$ et $OM = u$. Cherchons les relations qui existent entre ces coordonnées; nous avons, d'après la trigonométrie rectiligne :

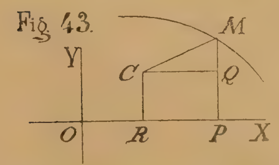
$$OP = OM \cos MOP, \quad MP = OM \sin MOP,$$

ou

$$x = u \cos t, \quad y = u \sin t \quad (146).$$

Et il suffit de substituer ces *valeurs* de x et de y dans l'équation représentée par $F(x, y) = o$, pour avoir l'équation rapportée aux coordonnées polaires t et u.

101. — Lorsque l'origine O des coordonnées rectangulaires x et y n'est pas au centre C de la courbe, comme dans la figure 43, soient x', y', les coordonnées O P, M P, comptées à partir de l'origine O; et a, b, les coordonnées O R et R C du centre C de la courbe ; soient encore x et y les coordonnées CQ et MQ rapportées au centre C pris pour origine, on aura



$$CQ = OP - OR, MQ = MP - CR,$$

ou $x = x' - a, \quad y = y' - b,$

valeurs qu'il faudra substituer dans les formules précédentes, pour que la courbe soit rapportée à son centre C pris pour origine.

### Transformation des coordonnées polaires en coordonnées rectangulaires, et détermination de l'expression différentielle de l'arc dans une courbe polaire.

102. — Soit l'équation représentée par F (t, u) = o, en coordonnées polaires, et supposons qu'on veuille passer de ces coordonnées polaires à des coordonnées rectangulaires.

D'abord, on voit, d'après la fig. 42, qu'on peut remplacer u par sa valeur tirée de l'équation, (carré de l'hypothénuse) :

$$OM^2 = OP^2 + PM^2.$$

ou $u^2 = x^2 + y^2$, d'où $u = \sqrt{x^2 + y^2}$. (147).

Ensuite, pour avoir la valeur de t, en fonction de x, y, divisons, l'une par l'autre, les équations (146), nous aurons

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin t}{\cos t} = \text{tang } t. \text{ (Trigonométrie).}$$

De cette équation, on tire

$$t = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right),$$

c'est-à-dire que t est égal à l'arc dont la tangente égale $\frac{y}{x}$.

Ces valeurs de t et de u étant substituées dans l'équation représentée par F (t, u) = o, on obtiendra l'équation cherchée, en x et en y, savoir :

$$F\left[\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right), \sqrt{x^2 + y^2}\right] = o, (148).$$

103. — Comme on le voit, l'équation précédente contient la transcendante arc $\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right)$, on peut faire disparaître cette transcendante, mais alors l'équation renfermera des différentielles.

A cet effet, on devra différentier l'équation *représentée* par la formule (148) ; ou plutôt on emploiera le moyen suivant pour arriver au même but.

Représentons encore par F (t, u) = o l'équation qu'il faut transformer en une fonction de coordonnées rectangulaires x et y. Nous avons vu, à l'art. précédent, que la valeur de u pouvait s'exprimer en x et en y, sans trancendante, mais qu'il n'en était pas de même de t ; il nous faudra donc d'abord chercher à éliminer t entre l'équation F (t, u) = o et la différentielle de cette équation que nous pouvons représenter par F (t, u, d t, d u) = o. En agissant ainsi, nous introduirons les différentielles dt et du dans le résultat de l'élimination ; mais ensuite nous pourrons exprimer ces différentielles en fonction des variables x, y, dx et dy ; de sorte que l'équation finale sera rapportée aux coordonnées rectangulaires x et y. En effet les équations (146) donnent

$$\cos t = \frac{x}{u}, \quad \sin t = \frac{y}{u}. \ (149).$$

Divisant ces équations l'une par l'autre, on obtient

$$\frac{\sin t}{\cos t} \text{ ou } \operatorname{tang} t = \frac{y}{u} : \frac{x}{u} = \frac{y}{u} \times \frac{u}{x} = \frac{y}{x}.$$

En différentiant cette dernière équation, on a

$$d. \operatorname{tang} t = d. \frac{y}{x} = (\text{art. } 11) = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}.$$

Mais art. 32, $d. \operatorname{tang} t. = \dfrac{dt}{\cos^2 t}$.

Donc, l'équation précédente devient

$$\frac{dt}{\cos^2 t} \text{ ou } dt \frac{1}{\cos^2 t} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}.$$

Or, la première des équations (149) donne

$$\cos^2 t = \frac{x^2}{u^2}, \text{ d'où } \frac{1}{\cos^2 t} = \frac{u^2}{x^2};$$

donc en mettant cette valeur de $\dfrac{1}{\cos^2 t}$ dans l'équation précédente, elle devient

$$dt \frac{u^2}{x^2} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}, \text{ d'où } u^2 dt = x\,dy - y\,dx\,;$$

et par conséquent

$$dt = \frac{x\,dy - y\,dx}{u^2}, \ (150).$$

Et en remplaçant dans cette équation $u^2$ par sa valeur $x^2 + y^2$ trouvée précédemment, on aura

$$dt = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}.\ (150^{bis})$$

Pour obtenir la différentielle de u, remarquons que l'équation (147) donne

$$u = \sqrt{x^2 + y^2},$$

et en différentiant, on aura, art. 14,

$$du = d.(x^2 + y^2)^{1/2} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{1/2-1}\,d.(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1/2}\,d\,(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}}\,d.(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(2x\,dx + 2y\,dy) = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$ donc

$$d\,u = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Nous avons donc les valeurs de u, de dt et de du, en fonction des variables x, y, dx et dy. Il suffira donc de substituer ces valeurs dans l'équation obtenue par l'élimination de t, pour obtenir une équation qui ne contiendra plus que x, y, dx et dy, et qui, par suite, sera rapportée aux coordonnées rectangulaires.

104. Nous avons vu, art. 88, que la différentielle d'un arc S, rapporté à des coordonnées rectangulaires, avait pour expression

$$d\,s = \sqrt{dx^2 + dy^2}\ (151).$$

Si nous voulons avoir l'expression de cette différentielle en coordonnées polaires, nous devons substituer dans l'équation précédente les valeurs de dx et de dy exprimées en fonction des coordonnées polaires t et u. Pour cela, en différentiant les équations (146) nous avons, d'abord, art. 9, pour la première

$$dx = (u \times d.\cos.t) + (du \times \cos t);$$

or, art. 31, $d.\cos t = -dt \sin t$,

donc $$dx = -u.dt.\sin t + du.\cos t.$$

De la seconde, on tire ; art. 9,

$$dy = u.d.\sin t + d.u.\sin t;$$

or, art. 30, $d.\sin t = dt.\cos t$,

donc $$dy = u.dt.\cos t + du.\sin t.$$

Elevant maintenant au carré ces expressions de dx et de dy, nous aurons :
$dx^2 = u^2(dt)^2 \sin^2 t - 2\, u.\, dt.\, \sin t.\, du.\, \cos t + du^2 \cos^2 t$,
et $dy^2 = u^2 dt^2 \cos^2 t + 2\, u.\, dt.\, \cos t.\, du.\, \sin t + du^2 \sin^2 t$ ;
donc $dx^2 + dy^2 = u^2 dt^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + du^2(\cos^2 t + \sin^2 t)$,
et comme $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, (Trigonomètrie), on a

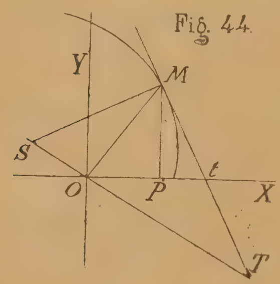
$$dx^2 + dy^2 = u^2 dt^2 + du^2 .$$

Substituant cette valeur de $dx^2 + dy^2$, dans l'équation (151), on aura enfin pour la differentielle de l'arc en fonction des coordonnées polaires :

$$d S = \sqrt{u^2 dt^2 + du^2}, \ (152).$$

### Sous-tangentes, sous-normales, normales et tangentes aux courbes rapportées a des coordonnées polaires.

105. — Dans les courbes à coordonnées rectangulaires, on appelle sous-tangente la ligne Pt, fig. 44, comprise entre le pied P de l'ordonnée du point de tangence M, et le point t où une perpendiculaire O t à cette ordonnée, venant de l'origine O, rencontre la tangente M T.




Dans les courbes polaires, en observant la même définition, comme l'ordonnée n'est plus PM, mais bien le rayon vecteur O M, la sous-tangente sera donc la perpendiculaire O T, à l'ordonnée O M, comprise depuis le point O (pied de la perpendiculaire O M) jusqu'à la rencontre T de la tangente.

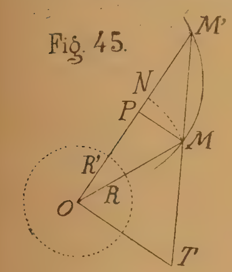
Comme on le voit la sous-tangente aura une position différente selon que l'on aura une courbe représentée en coordonnées rectangulaires, ou une courbe polaire, c'est-à dire représentée en coordonnées polaires.

Dans le premier cas, la sous-tangente est toujours comptée sur l'axe des abscisses O X ; tandis que dans le second cas (courbe polaire) où l'axe des abscisses n'existe

pas, la sous-tangente varie de position à chaque point de la courbe.

106. — Nous avons donné, art. 47, l'expression analytique de la longueur de la sous-tangente aux courbes représentées en coordonnées rectangulaires. Nous allons chercher maintenant cette expression analytique pour la longueur de la sous-tangente aux courbes polaires.

A cet effet, soient, fig. 45, O M et O M′ deux rayons vecteurs ; du point M, menons la perpendiculaire M P sur le rayon vecteur O M′ et à cette perpendiculaire, menons la parallèle O T.




Les triangles semblables O T M′ et P M M′ nous donnent la proportion

$$OM' : OT :: PM' : PM,$$

d'ou $$OT = \frac{OM' \times PM}{PM'}.$$

Et, comme le triangle rectangle PM′M donne $PM' = \sqrt{\overline{MM'}^2 - \overline{PM}^2}$, l'égalité précédente devient ;

$$OT = \frac{OM' \times PM}{\sqrt{\overline{MM'}^2 - \overline{PM}^2}}, \quad (153).$$

Supposons maintenant que le rayon vecteur OM′ se rapproche infiniment du rayon vecteur OM, la sécante M′M tend à devenir tangente à la courbe M′M et elle la devient à la limite du rapprochement c'est-à-dire quand les deux rayons se confondent. La perpendiculaire OT à OM′ devient perpendiculaire à OM à la limite, quand OM′ se confond avec OM ; par suite, d'après la définition précédente, art. 105, à cette limite, la droite OT perpendiculaire au rayon vecteur OM et limitée à la tangente MT, est devenue la sous-tangente ; donc, à la limite où les rayons vecteurs OM′ et OM se confondent, OT devient la sous-tangente. Pour avoir l'équation de celle-ci, il faut donc voir d'abord ce que deviennent, dans le cas de la limite, les éléments composant le second membre de l'équation (153). Quand on connaîtra les valeurs de ces éléments ou lignes pour le cas de la limite, il suffira de substituer ces valeurs

dans l'équation (153) pour avoir celle de la sous-tangente.

Or, à la limite :

1° OM' devient égal à OM, que, conformément à ce qui précède, art. 98, nous représenterons par u ;

2° la droite P M se confond avec l'arc M N, car P N devient d'autant plus petit que le rayon vecteur O M' se rapproche davantage de O M, et à la limite P M et M N se confondent, c'est-à-dire que P M a pour limite M N.

3° la corde M M' a pour limite l'arc M M', car à la limite ces deux lignes se confondent.

D'après cela, on voit qu'il suffit donc d'avoir pour le cas de la limite, les expressions des arcs M'M et M N.

Or, art. 88, l'expression de M' M, à la limite, est la différentielle de l'arc de courbe M'M, donc, d'après l'art. 104, en coordonnées polaires, on a :

$$M' M = \sqrt{u^2 dt^2 + du^2}.$$

En ce qui concerne l'expression de MN, remarquons que les secteurs semblables O R R' et O M N, donnent la proportion :

$$O R : R R' :: O M : M N,$$

ou, en prenant l'unité pour rayon de l'arc R R'.

$$1 : R R' :: u : M N, \text{ d'où } M N = u . R R'$$

Cette valeur de M N, dans le cas de la limite, se ramène à u dt : car art. 98, RR' ou t, à la limite, devient la différentielle dt, (art. 3,) et u est le rayon vecteur O M.

Substituant donc ces valeurs de M'M et de M N dans l'équation (153), nous aurons

$$\text{sous-tangente OT} = \frac{u . u\,dt}{\sqrt{(\sqrt{u^2 dt^2 + du^2})^2 - (udt)^2}} =$$

$$\frac{u^2\,dt}{\sqrt{u^2 dt^2 + du^2 - u^2 dt^2}} = \frac{u^2\,dt}{\sqrt{du^2}} = \frac{u^2\,dt}{du} . \quad (154).$$

Telle est l'expression de la longueur de la sous-tangente aux courbes polaires, c'est-à-dire aux courbes exprimées en coordonnées polaires.

107. — Voyons maintenant quelle est l'expression de la sous-normale aux courbes polaires.

Pour cela, reprenons la fig. 44, et soit SM la normale

perpendiculaire à la tangente MT et limitée à la sous-tangente O T prolongée, laquelle sous-tangente, avons-nous vu, art. 105, est perpendiculaire au rayon vecteur O M.

On a donc un triangle rectangle S M T, dans lequel on a la perpendiculaire M O abaissée du soumet de l'angle droit sur l'hypothénuse ; donc, O M est une moyenne proportionnelle entre la sous-tangente O T et la sous-normale O S, donc nous avons

$$O T : O M :: O M : \text{sous-normale},$$

ou, en remplaçant O T par sa valeur ci-dessus, équation (154), et le rayon vecteur O M par u, art. 98, nous aurons

$$\frac{u^2 dt}{du} : u :: u : \text{sous-normale},$$

donc la longueur de la sous-normale égale

$$u^2 : \frac{u^2 dt}{du}.$$

Et en effectuant les opérations indiquées, nous obtiendrons

$$\text{sous-normale} = \frac{u^2 du}{u^2 dt} = \frac{du}{dt} \quad (155).$$

108.— L'expression de la longueur de la normale aux courbes polaires s'obtiendra en remarquant que dans le triangle rectangle MOS, fig. 44, on a

$$M S \text{ ou normale} = \sqrt{MO^2 + OS^2},$$

et en remplaçant MO par sa valeur u, et OS par sa valeur $\frac{du}{dt}$, nous aurons

$$\text{normale} = \sqrt{u^2 + \frac{du^2}{dt^2}}, \quad (156).$$

109.— De même la longueur MT de la tangente s'obtient en remarquant que dans le triangle rectangle MOT, on a

$$M T \text{ ou longueur tangente} = \sqrt{M O^2 + O T^2},$$

et en remplaçant M O par sa valeur u, et O T par sa valeur trouvée, art 106, on aura : tangente $= \sqrt{u^2 + \frac{u^4 dt^2}{du^2}} =$ $\sqrt{u^2 \left(1 + \frac{u^2 dt^2}{du^2}\right)} = u \sqrt{1 + \frac{u^2 dt^2}{du^2}}$, (157).

110.— L'expression analytique du secteur dans les courbes polaires, c'est-à-dire de l'aire comprise entre deux

rayons vecteurs M O et O M′ et l'arc M M′, fig. 45, s'obtient en remarquant d'abord que le triangle O M′ M donne

$$\text{aire triangle } O\,M'\,M = \frac{O\,M' \times P\,M}{2}.$$

Or, dans le cas de la limite, où O M′ se rapproche de O M et tend à se confondre avec O M, l'aire du triangle O M′ M devient celle d'un secteur élémentaire, c'est-à-dire d'un secteur dans lequel l'angle ou l'arc est infiniment petit; la corde M M′ se confond avec l'arc M M′ ; la perpendiculaire P M peut être remplacée par l'arc M N, et devient égal à u dt, art. 106 ; et O M′ se confondant avec O M est égal à u. Substituant donc ces valeurs dans l'égalité ci-dessus, nous aurons

$$\text{aire du secteur élémentaire} = \frac{u \times u\,dt}{2} = \frac{u^2\,dt}{2}, \quad (158).$$

*Remarque.* — On peut exprimer le secteur élémentaire en fonction des coordondées rectangulaires, en substituant dans l'équation (158), les valeurs de u et de dt en fonction des coordonnées rectangulaires, valeurs données par les équations (147) et (150*bis*), nous aurons ainsi :

$$\text{aire du secteur élémentaire} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\left(\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}\right) =$$
$$\frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx) = \frac{x\,dy - y\,dx}{2}, \quad (159).$$

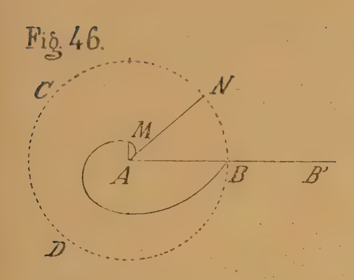
## Courbes transcendantes.

111. — On appelle courbes transcendantes, celles dont les équations contiennent des quantités transcendantes comme des sinus, des logarithmes, etc., et des coefficients différentiels, et en général, les courbes dont on ne peut exprimer les équations par un nombre fini de termes algébriques.

Nous allons, ci-après, examiner quelques-unes de ces courbes parmi les plus remarquables.

## Spirale d'Archimède ou de Conon.

112. — La génération de cette courbe se fait de la manière suivante :




Le rayon A B, fig. 46, décrivant une révolution autour du point A, un point M se mouvant, d'un mouvement uniforme, le long de la droite A B, se transporte du centre A au point B après une révolution entière de la droite A B; celle-ci continuant à se mouvoir, après une seconde révolution, le point M se trouvera en B′, en observant que BB′ = A B ; et ainsi de suite.

Dans ce mouvement, la courbe que décrit le point mobile est appelée la spirale d'Archimède.

Cherchons l'expression analytique de cette courbe.

A cet effet, soient A B = a, arc B N = t, A M = u.

D'après la définition précédente, une distance quelconque A M, parcourue par le point M, à un instant donné, est à la longueur A B, comme l'arc B N, correspondant à la distance A M, est à la circonférence BCDB, révolution entière correspondant à la distance A B parcourue par le point M après cette révolution. On a donc

A M : A N ou A B : : arc N B : circonf. BCDB,

ou, en remplaçant ces termes par leurs valeurs,

$$u : a :: t : 2\pi a,$$

d'où

$$u = \frac{a t}{2 \pi a} = \frac{t}{2 \pi}, (160).$$

Comme on le voit, la courbe n'a pas ses coordonnées rectangulaires.

Quand AB a décrit une révolution entière, l'arc NB équivaut à la circonférence dont le rayon est a, donc alors NB ou t = 2 π a, ce qui réduit l'équation précédente à :

$$u = \frac{2 \pi a}{2 \pi} = a.$$

Lorsque le point M continue à se mouvoir uniformément, le rayon AB décrivant une seconde révolution autour du centre A, le point mobile M arrivera en B′ au bout de

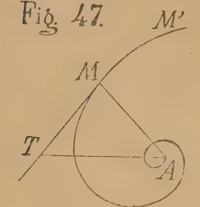
cette seconde révolution ; alors t sera égal à $4\pi a$, c'est-à-dire à deux fois la circonférence BCDB, ce qui donnera

$$u = \frac{4\pi a}{2\pi} = 2a.$$

Et ainsi de suite.

### Spirale logarithmique.

113. — On entend par spirale logarithmique une courbe polaire dans laquelle l'angle A M T, fig. 47, formé par le rayon vecteur A M avec la tangente M T à la courbe, est constant.




Par conséquent, en représentant par a la tangente trigonométrique de l'angle A M T, nous aurons

$$\text{tang. } AMT = a.$$

Or, quand A T sera perpendiculaire à A M, le triangle M A T sera rectangle en A, et A T sera la sous-tangente, (art. 105). On aura donc dans le triangle rectangle M A T, (trigonométrie) :

$$AT = AM \times \text{tang} \frac{AMT}{1 \text{ ou rayon}};$$

d'où

$$\text{tang } AMT = \frac{AT}{AM}.$$

Remplaçant, dans cette expression, le rayon vecteur AM par u, comme précédemment; et la sous-tangente AT par $\frac{u^2\,dt}{du}$, (art. 106), nous aurons :

$$\text{tang } AMT \text{ ou } a = \frac{u^2\,dt}{du} : u = \frac{u\,dt}{du},$$

d'où

$$a\,du = u\,dt \text{ ou } \frac{a\,du}{u} = dt, (161).$$

Mais, art. 28, $\frac{du}{u} = d.\log u$, donc l'équation (161) devient

$$a.\,d.\log u = dt.$$

Et en intégrant, c'est-à-dire en remplaçant les différentielles par les quantités dont elles sont les différentielles, et en ajoutant au second membre une constante, comme on peut le faire d'après le 5° de l'art. 6, ainsi que nous le verrons dans le calcul intégral, nous obtiendrons

$$a.\log u = t + \text{constante}, (162).$$

Telle est l'équation de la spirale logarithmique, le logarithme étant exprimé ici dans le système Népérien, art. 28.

Soit e la base du système Népérien. Si l'on regarde a comme le logarithme de e dans un certain système de tables, et en représentant par L les logarithmes dans ce système, nous aurons :

$$a = L\,e, \quad (163).$$

Or, nous savons par l'Algèbre, que si l'on a l'équation

$$y = a^x$$

x est le logarithme de y dans le système dont la base est a.

Donc, en représentant par e la base du système Népérien, nous aurons évidemment dans ce système :

$$u = e^{\log u}.$$

Et en prenant les logarithmes dans le système indiqué ci-dessus par L, nous aurons aussi

$$L\,u = L\,(e^{\log u}).$$

Et comme le logarithme d'une quantité élevée à une certaine puissance est égal au logarithme de cette quantité multiplié par l'exposant de cette puissance, nous aurons

$$L\,u = L\,(e^{\log u}) = L\,e.\log u, \quad (164);$$

maintenant, dans l'équation (162), remplaçons a par sa valeur donnée par l'équation (163), nous obtiendrons :

$$L\,e.\log u = t + \text{constante},$$

ou, d'après l'équation (164),

$$L\,u = t + \text{constante}, \quad (165).$$

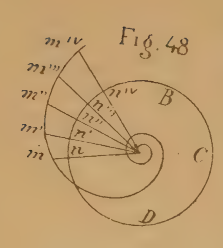
Telle est l'équation de la spirale logarithmique dans un certain système de logarithmes représenté par L.

114. — Soit, fig. 48, une spirale logarithmique A m m′ m″...

Décrivons une circonférence BCD ayant A pour centre, et divisons-la en parties égales n n′, n′ n″, n″ n‴, etc. ; par les points de division menons les rayons A n, A n′, etc., prolongés jusqu'à la spirale en m, m′, m″, etc.

Si les divisions m m′, m′ m″, m″ m‴, etc., sont prises assez petites, on peut les considérer comme des droites et même comme des tangentes à la spirale.

Alors les triangles A m m′, A m′ m″, A m″ m‴, etc., sont




semblables, car ils sont équiangles puisque les angles au centre m A m′, m′ A m″, etc., sont égaux comme interceptant des arcs égaux ; et les angles m m′ A, m′ m″ A, etc., sont également égaux, d'après la propriété de la spirale, les petits arcs m m′, m′ m″, pouvant être, avons-nous vu, considérer comme des tangentes à la courbe.

Ces triangles semblables donnent donc cette suite de proportions :

$$A\,m : A\,m' :: A\,m' : A\,m'',$$
$$A\,m' : A\,m'' :: A\,m'' : A\,m''',$$
etc. etc. etc. etc.,

ce qui nous montre que les ordonnées polaires, A m, A m′, A m″, etc., sont en progression géométrique.

De là, on conclut que :

*Pour construire la spirale logarithmique par points*, il faut décrire une circonférence BCD ayant pour centre le centre A que l'on veut donner à la spirale ; puis on divise la circonférence en parties égales ; on mène des rayons aux points de division et sur ces rayons on prend des longueurs A m, A m′, A m″, etc., telles qu'elles soient en progression géométrique, c'est-à-dire de façon à ce qu'on ait:

$$A\,m : A\,m' :: A\,m' : A\,m'' :: A\,m'' : A\,m''', \text{ etc.},$$

les points m, m′, m″, etc., appartiendront à une spirale logarithmique.

## SPIRALE HYPERBOLIQUE ET SPIRALES COMPRISES DANS L'ÉQUATION $u = at^n$.

115. — La spirale hyperbolique est une courbe polaire dont la propriété est d'avoir une sous-tangente constante.

Si nous représentons cette constante par a, comme l'équation de la sous-tangente dans les courbes polaires est, art. 106, $\frac{u^2\,dt}{du}$, nous aurons l'équation :

$$\frac{u^2\,dt}{du} = -a, \text{ d'où } -\frac{du}{u^2} = \frac{dt}{a} = \frac{1}{a}\,dt.$$

Nous avons pris la constante a négative, pour pouvoir intégrer facilement la dernière équation.

Intégrons donc cette équation, c'est-à dire remplaçons, dans chaque membre, les quantités différentielles par les quantités dont elles sont les différentielles, (comme nous le verrons plus loin au calcul intégral).

Pour cela, le premier membre $-\frac{du}{u^2}$, est, art. 11, la différentielle de la fraction $\frac{1}{u}$, car $d\frac{1}{u}=\frac{u.d1-1.du}{u^2}=\frac{u\times o-du}{u^2}=-\frac{du}{u^2}$; pour intégrer nous remplacerons ce premier membre par $\frac{1}{u}$.

Le second membre intégré donne $\frac{1}{a}t$ + une constante quelconque C qui n'a pas de différentielle, (art. 6, 4° et 5°). En effet la différentielle de $\frac{1}{a}t+C=\frac{1}{a}dt$. Donc le second membre sera remplacé par $\frac{1}{a}t+C$ ou $\frac{t}{a}+C$.

Après intégration, l'équation $-\frac{du}{u^2}=\frac{dt}{a}$, deviendra donc $\frac{1}{u}=\frac{t}{a}+C$.

Et, en remplaçant la quantité indéterminée C par une autre quantité $\frac{C'}{a}$, on aura

$$\frac{1}{u}=\frac{t}{a}+\frac{C'}{a}=\frac{t+C'}{a}=\frac{1}{a}(t+C').$$

Si nous prenons maintenant l'origine de manière que l'abscisse $t+C'$ soit égale à une nouvelle abscisse t, art. 99, l'équation précédente deviendra

$$\frac{1}{u}=\frac{t}{a},\text{ ou plutôt } u=\frac{a}{t}.$$

*Remarque I.* — Cette équation montre que dans la courbe, lorsque $t=o$, $u=\frac{a}{o}=\infty$ ; d'où l'on peut conclure que le rayon vecteur u, qui correspond au point où l'abscisse t devient nulle, est une asymptote à la courbe, (asymptote, voir géom. analytique).

*Remarque II.* — L'équation $u = \frac{a}{t}$ nous montre également que le rayon vecteur u est en raison inverse de l'abscisse t ; c'est-à-dire que quand t diminue u augmente et quand t augmente u diminue.

*Remarque III.* — Si nous faisons successivement $t = 2\pi$, $t = 4\pi$, $t = 6\pi$, etc., nous aurons pour u cette suite de valeurs ; $\frac{a}{2\pi}$, $\frac{a}{4\pi}$, $\frac{a}{6\pi}$, etc., et comme $2\pi$ représente une circonférence ou une révolution, les suites, qui précèdent nous apprennent qu'au bout de deux révolutions où $u = \frac{a}{4\pi} = \frac{1}{2}\frac{a}{2\pi}$, le rayon vecteur est deux fois plus petit ou la moitié de ce qu'il était après une révolution, autrement dit, il est réduit de moitié ; de même, on voit qu'après trois révolutions il est réduit au tiers ; et ainsi de suite.

116. — L'équation de la spirale hyperbolique $u = \frac{a}{t}$ art. 115, et celle $u = \frac{t}{2\pi}$ de la spirale de Conon, art. 112, sont des cas particuliers de l'équation $u = a\,t^n$. En effet, si nous faisons dans cette dernière $n = 1$ et $a = \frac{1}{2\pi}$, c'est-à-dire si nous donnons ces valeurs 1 et $\frac{1}{2\pi}$ à n et à a, nous obtenons pour ce cas particulier, $u = \frac{1}{2\pi}t = \frac{t}{2\pi}$, équation de la spirale de Conon. Si nous faisons seulement $n = -1$ dans $u = at^n$, nous obtenons $u = at^{-1} = a\frac{1}{t^1} = \frac{a}{t}$, ce qui est l'équation de la spirale hyperbolique. Parmi les spirales déterminées par l'équation $u = a\,t^n$, on distingue la spirale parabolique, dont on obtient l'équation en faisant $n = 2$ dans l'équation $u = a\,t^n$.

## LOGARITHMIQUE.

117. — On entend par logarithmique une courbe, à coordonnées rectangulaires, dans laquelle l'abscisse est le logarithme de l'ordonnée ; de sorte qu'on a pour l'équation de cette courbe : $x = \log y$.

Or, nous avons déjà rappelé, art. 113, que quand on a $y = a^x$, x est le logarithme de y dans le système dont la base est a. Pour cette base l'équation ci-dessus de la courbe peut donc se mettre sous la forme :

$$y = a^x.$$

Et par la différentiation, comme à l'art. 26, nous aurons

$$\frac{d.a^x}{dx} \text{ ou } \frac{dy}{dx} = a^x \times \text{le log. Népérien de a.}$$

En représentant donc par log. a, le logarithme de a dans le système Népérien, on aura donc encore pour l'équation de la courbe :

$$\frac{dy}{dx} = a^x \log a.$$

Pour discuter cette équation, faisons $x=0$, nous trouverons

$$\frac{dy}{dx} = a^0 \log a = 1 \times \log a = \log a = \text{constante},$$

donc $$dy = \log a \times dx = \log a \times 0 = 0,$$
car la différentielle de 0 est 0.

Donc la différentielle de y, dans le cas où $x=0$, est 0 ; par conséquent, (art. 6, 5°), y est une constante, mais cette constante est encore indéterminée.

Pour la déterminer, reprenons la première équation $x = \log y$, et faisons $x=0$, nous aurons $0=\log y$, donc, d'après la théorie des logarithmes, $y = 1$.

Concluons donc que quand $x = 0$, $y = 1$.

Si l'on donne ensuite des valeurs croissantes et positives à x, l'équation $x = \log y$, montre que quand x augmente positivement, y ira toujours en croissant, car quand un logarithme croît positivement le nombre auquel il correspond croît également ; de même l'équation $y = a^x$ montre assez cet accroissement.

Mais si l'on donne à x une valeur négative $-n$, on trouvera $y = a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ; et l'on voit que l'ordonnée y diminue d'autant plus que le dénominateur $a^n$ augmente, c'est-à-dire que l'abscisse négative $-n$ augmente négativement ; ce qui revient à dire que l'ordonnée y diminue d'autant plus qu'on s'éloigne de l'origine dans le sens des

abscisses négatives, et qu'enfin la courbe ne pourrait atteindre le prolongement de l'axe des x qu'à l'infini, cas où l'équation $y = \frac{1}{a^n}$ deviendrait $y = \frac{1}{a^\infty} = 0$, c'est-à-dire quand l'abscisse négative est devenue infinie.

On peut donc conclure que le prolongement de l'axe des x négatives est une asymptote à la courbe.

118. — Si à partir de l'origine, on prend des abscisses égales, fig. 49, O P et O P' = n, on trouvera, en vertu de l'équation $y = a^x$ :

$$M P = a^n, \; M' P' = a^{-n} = \frac{1}{a^n},$$

$$\text{donc } M P \times M' P' = 1.$$

119. — La propriété la plus remarquable de la courbe que nous venons d'étudier est que la sous-tangente a une valeur constante. En effet, nous avons vu que l'équation de la logarithmique étant différentiée donne $\frac{dy}{dx} = a^x \log a$, d'où l'on tire $\frac{a^x dx}{dy} = \frac{1}{\log a}$ ou, comme $a^x = y$, $\frac{ydx}{dy} = \frac{1}{\log a}$.

Or, art. 47, le premier membre $\frac{ydx}{dy}$ exprime la longueur de la sous-tangente à la courbe, et le second membre $\frac{1}{\log a}$ est une constante ; donc cette sous-tangente est constante.

## Cycloïde.

120. — Soit un cercle A M B, fig. 50, roulant sur une droite CD. Dans ce mouvement, le point M, pris sur la circonférence de ce cercle, décrit une courbe M'MO qu'on appelle cycloïde ; cette courbe est le lieu de tous les points par où passe le point M.

Il est évident que dans le mouvement, de A vers C, tous les points de l'arc A M viendront successivement s'appliquer sur la droite A O, jusqu'à ce que M, à son tour s'y applique en O ; par suite l'arc A M sera égal à la droite A O.

Prenons le point O, qui appartient à la cycloïde, comme

origine des coordonnées. Abaissons les perpendiculaires M P et M E, respectivement sur la droite C D ou O X, et sur le diamètre AB. Faisons OP $=$ x, MP $=$ y, diamètre AB $= 2$ a, ME $=$ v, arc MA $=$ z, nous aurons :

$$OP = OA - PA, \text{ ou } x = \text{arc } MA - ME,$$

ou $$x = z - v, (166).$$

Il nous faut une équation ne renfermant que les inconnues x et y et leurs différentielles.

Cherchons donc d'abord à éliminer l'arc z. Pour cela, différentions l'équation (166), nous aurons, (art. 15) :

$$dx = dz - d\,v. \ (167).$$

Pour avoir la valeur de dz en fonction de v, remarquons qu'entre v et z nous avons la rélation

$$v = \sin z.$$

En la différentiant, art. 30, remarque, nous trouverons

$$d\,v = dz\,\frac{\cos z}{a}, \text{ d'où } dz = \frac{a.\,d\,v}{\cos z}, \ (168).$$

Remplaçons, dans la dernière équation la valeur de cos z par celle que nous déduirons de cette équation (trigonom.):

$$\sin^2 z + \cos^2 z = a^2,$$

$$v^2 + \cos^2 z = a^2; \text{ d'où } \cos z = \sqrt{a^2 - v^2};$$

donc l'équation (168) devient

$$dz = \frac{a\,d\,v}{\sqrt{a^2 - v^2}}.$$

Substituons cette valeur dans l'équation (167), il viendra

$$dx = \frac{a\,d\,v}{\sqrt{a^2 - v^2}} - dv, \ (169).$$

Il faut encore, maintenant que z est éliminée, exprimer v en fonction de y. A cet effet, observons que, par la propriété du carré de l'hypothénuse, nous avons dans le cercle A B M, c étant le centre :

$$E\,c = \sqrt{M\,c^2 - M\,E^2}, \text{ ou } a - y = \sqrt{a^2 - v^2}.$$

Elevons cette équation au carré et reduisons, nous aurons

$$y^2 - 2\,ay + a^2 = a^2 - v^2 \text{ ou } v^2 = a^2 - y^2 + 2\,ay - a^2,$$

$$\text{d'où } v = \sqrt{2\,ay - y^2}, \ (170).$$

Différentions, nous obtiendrons

$dv = d\sqrt{2ay - y^2} = d(2ay - y^2)^{1/2} = \frac{1}{2}(2ay - y^2)^{1/2 - 1 ou - 1/2}$

$d(2ay - y^2) = \frac{1}{2}\frac{1}{(2ay - y^2)^{1/2}}(2ady - 2ydy) = \frac{2ady - 2ydy}{2\sqrt{2ay - y^2}} =$
$\frac{(a - y)\,dy}{\sqrt{2ay - y^2}}$. (171).

Les équations (170) et (171) transforment l'équation (169) en

$$dx = \frac{a(a-y)\,dy}{\sqrt{2ay - y^2}} : \sqrt{a^2 - 2ay + y^2} - \frac{(a-y)\,dy}{\sqrt{2ay - y^2}} =$$

$\frac{a(a-y)\,dy}{\sqrt{(2ay - y^2)}\sqrt{(a^2 - 2ay + y^2)}} - \frac{(a-y)\,dy}{\sqrt{2ay - y^2}} = \frac{a(a-y)\,dy}{\sqrt{(2ay - y^2)}\sqrt{(a-y)^2}}$ ou

$\frac{a(a-y)\,dy}{\sqrt{(2ay - y^2)}(a-y)} - \frac{(a-y)\,dy}{\sqrt{2ay - y^2}} = \frac{a\,dy}{\sqrt{(2ay - y^2)}} - \frac{(a-y)\,dy}{\sqrt{2ay - y^2}} =$

$\frac{dy\,(a - a + y)}{\sqrt{2ay - y^2}} =$ donc $dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{2ay - y^2}}$. (172).

*Telle est l'équation de la cycloïde.*

121. — Pour obtenir l'équation de la cycloïde en fonction de l'arc, reprenons l'équation $v = \sin z$, et mettons-la sous la forme

$$z = \text{l'arc dont le sinus est } v = \text{arc}\,(\sin = v)\ ;$$

remplaçons v par sa valeur donnée par l'équation (170), nous aurons

$$z = \text{arc}\,(\sin = \sqrt{2ay - y^2})\ ;$$

cette valeur et celle de v étant substituées dans l'équation (166), nous avons

$$x = \text{arc}\,(\sin = \sqrt{2ay - y^2}) - \sqrt{2ay - y^2}\ .(173).$$

Remarque. — Le sinus dans les formules qui précèdent correspond au rayon a, puisque, art. 120, nous avons fait $\sin^2 z + \cos^2 z = a^2$.

Le sinus des tables dont on fait usage ayant l'unité pour rayon, sera obtenu par la proportion

$$a : 1 :: \sqrt{2ay - y^2} : \text{sinus cherché},$$

d'où le sinus de l'arc z, l'unité étant prise pour rayon, sera $\frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a}$.

En effet, la proportion précédente exprime cette propriété que pour un même arc, les sinus sont entr'eux comme les rayons correspondants. Remplaçons donc dans l'équation (173), la valeur de sin z correspondant au rayon a par celle correspondante au rayon 1, ou $\sqrt{2ay-y^2}$ par $\frac{\sqrt{2ay-y^2}}{a}$, et nous aurons pour la formule de la cycloïde en fonction de l'arc et en considérant l'unité pour rayon :

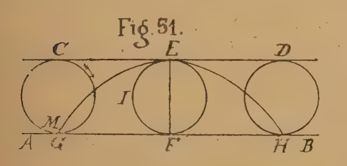
$$x = \text{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{2ay-y^2}}{a}\right) - \sqrt{2ay-y^2} \text{ . (174).}$$

122. — Discutons l'équation (173).

Nous remarquons d'abord que y ne peut être négatif ni plus grand que 2a. En effet, si nous supposons y négatif, faisons donc $y = -y'$ dans l'équation (173), l'expression arc $(\sin = \sqrt{2ay-y^2})$ devient arc$(\sin = \sqrt{-2ay'-y'^2})$ valeur imaginaire ; donc y ne peut être négatif.

Il ne peut être plus grand que 2a, car si nous faisons $y = 2a + \delta$, l'expression arc $(\sin = \sqrt{2ay-y^2}$ devient arc $(\sin = \sqrt{4a^2 + 2a\delta - (2a+\delta)^2}$ ou arc$(\sin = \sqrt{4a^2 + 2a\delta - 4a^2 - 4a\delta - \delta^2}$ ou arc $(\sin = \sqrt{-2a\delta - \delta^2})$, valeur également imaginaire.

Donc, si à une distance EF = 2a de l'axe des x, on mène une droite CD parallèle à la droite AB, fig. 51, la courbe sera comprise entre ces deux parallèles.



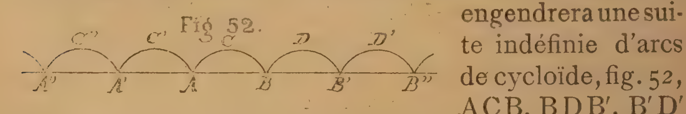

La plus grande valeur que puisse atteindre y est 2a, comme nous l'avons démontré. On le constate encore en considérant la figure 51.

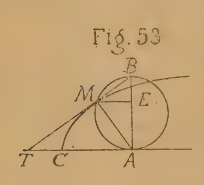
En effet, si l'on fait rouler le cercle générateur de G en H, le point M, qui était d'abord en G, s'élèvera successivement jusqu'à ce qu'il arrive en E, à l'extrémité du diamètre EF, alors l'abscisse G F sera égale à EIF, c'est-à-dire à la demi-circonférence du cercle générateur. L'équation (173) sert à confirmer ce résultat, car, si dans cette équation, on fait $y = 2a$, on trouve $x = \text{arc}(\sin = \sqrt{4a^2 - 4a^2}) - \sqrt{4a^2 - 4a^2} = \text{arc} (\sin = 0)$. Or, nous savons que l'arc dont

le sinus est nul, doit être de o degré, de 180° degrés, de 2 fois 180° degrés, de 3 fois 180° degrés, etc ; ou o, ou FIE, ou 2 FIE, ou 3 FIE, etc., et dans le cas présent, on voit que cet arc est FIE.

Le point M étant parvenu en E, ayant décrit l'arc GE, si le cercle continue à rouler, vers le même sens, le point M décrira le second arc EH, semblable au premier.

Le cercle continuant toujours à se mouvoir, le point M engendrera une suite indéfinie d'arcs de cycloïde, fig. 52, ACB, BDB′, B′D′ B″, .... etc., le cercle se mouvant vers la droite. Comme il peut aussi rouler vers la gauche, on aura également la suite d'arcs AC′A′, A′C″A″, ... etc. L'ensemble de tous ces arcs, dans le sens le plus général, constitue la cycloïde.




123. — Nous avons vu, art. 50, que la longueur de la normale à une courbe $y = fx$, au point M dont les coordonnées sont $x'$ et $y'$, est exprimée par la formule

$$\text{normale} = y'\sqrt{\frac{dy'^2}{dx'^2} + 1}$$

et d'une façon générale la normale au point x et $y = y\sqrt{\frac{dy^2}{dx^2} + 1}$.

Cette équation est générale. Pour l'appliquer au cas particulier de la cycloïde, il faut tirer de l'équation de celle-ci, (équation 172), la valeur du coefficient differentiel $\frac{dy}{dx}$ et la substituer dans l'équation générale ci-dessus. On aura donc d'abord, par l'équation (172) :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{y} \text{ et } \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{2ay - y^2}{y^2}.$$

Substituant cette dernière valeur dans l'équation générale ci-dessus, nous aurons pour *l'équation de la normale à la cycloïde :*

$$\text{normale} = y\sqrt{\frac{2ay - y^2}{y^2} + 1} = y\sqrt{\frac{2a}{y} - 1 + 1} = \sqrt{y^2\,\frac{2a}{y}} = \sqrt{2ay}. \quad (175).$$

124. — Si nous voulons construire cette valeur, dans le triangle rectangle inscrit BMA, fig. 53, abaissons la perpendiculaire ME sur l'hypothénuse, nous avons, par la géométrie élémentaire :

AE : MA : : MA : AB, ou y : MA : : MA : 2a ;

donc la corde $MA = \sqrt{2ay}$,

ce qui est la normale (éq. 175).

Mais, puisque le triangle inscrit BMA est rectangle en M, la corde BM est perpendiculaire sur la normale MA à la cycloïde, au point M ; et comme la tangente à la cycloïde en ce point, est également perpendiculaire à la normale, il en résulte que la corde BM prolongée est tangente à la cycloïde au point M.

On voit donc qu'on pourrait construire la tangente, à la cycloïde, au point M, en décrivant le demi-cercle générateur BMA, cercle passant par le point M et tangent à l'axe des x, puis en prolongeant la corde B M. Mais pour ne pas devoir construire de cercle générateur à chaque point de la courbe, il suffirait de construire le cercle générateur à la plus grande ordonnée BA de la cycloïde, fig. 54, et, par le point donné M, de mener la perpendiculaire MD sur B A, puis tracer la corde BC.

Fig. 54.

La parallèle MT à cette corde sera la tangente cherchée ; car, d'après ce qui précède, cette corde BC, perpendiculaire à AC, se confondrait avec la tangente MT à la cycloïde, si on reculait le cercle vers la gauche, jusqu'à ce que le point C, glissant sur la droite MD, vienne coïncider avec le point M.

125. — Cherchons maintenant l'expression du rayon de courbure à la cycloïde,

Nous savons, art. 83, que l'expression générale du rayon de courbure est

$$Y = -\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

Donc, pour avoir l'expression du rayon de courbure, dans le cas particulier de la cycloïde, il faudra déduire, de l'équation de cette courbe, les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et de $\frac{d^2y}{dx^2}$, que l'on substituera dans l'équation générale ci-dessus, et dans laquelle nous avons adopté le signe négatif, parce que nous savons que la courbe tourne sa concavité vers l'axe des x, art. 83, équation (124).

L'équation (172) de la cycloïde nous donne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{y}, \ (176).$$

Faisons $\frac{dy}{dx} = p$, nous aurons $p = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{y} = \sqrt{\frac{2ay - y^2}{y^2}} = \sqrt{\frac{2a}{y} - 1}$.

En différentiant cette dernière expression, art. 14 et 11, nous obtiendrons

$$dp = d.\left(\frac{2a}{y} - 1\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{y} - 1\right)^{1/2-1 \text{ ou } -1/2} d\left(\frac{2a}{y} - 1\right) = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(\frac{2a}{y} - 1\right)^{1/2}} d\left(\frac{2a}{y} - 1\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2a}{y} - 1}}\left(\frac{y.d\,2a - 2a.dy}{y^2}\right) = -\frac{\frac{2a\,dy}{y^2}}{2\sqrt{\frac{2a}{y} - 1}} = -\frac{a\,dy}{y^2\sqrt{\frac{2a}{y} - 1}} = -\frac{a\,dy}{y\sqrt{\frac{2ay^2}{y} - y^2}} = -\frac{a\,dy}{y\sqrt{2ay - y^2}},$$

donc

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{a}{y\sqrt{2ay - y^2}}.$$

Multipliant cette équation par l'équation (176), nous aurons ;

$$\frac{dp}{dy} \times \frac{dy}{dx} = -\frac{a}{y\sqrt{2ay - y^2}} \times \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{y},$$

ou, art. 17, éq. 20,

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{a}{y^2}, \text{ ou } d.\left(\frac{dy}{dx}\right) : dx = -\frac{a}{y^2},$$

ou

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{y^2}. \ (177).$$

Substituant donc ces valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et de $\frac{d^2y}{dx^2}$, (éq. 176 et 177), dans l'équation générale du rayon de courbure, *nous aurons pour le rayon de courbure de la cycloïde.*

$$Y = -\frac{\left(1+\frac{2ay-y^2}{y^2}\right)^{3/2}}{-\frac{a}{y^2}} = \frac{\left(\frac{y^2+2ay-y^2}{y^2}\right)^{3/2}}{\frac{a}{y^2}} = \frac{\left(\frac{2a}{y}\right)^{3/2}}{\frac{a}{y^2}} =$$

$$\frac{(2a)^{3/2}}{y^{3/2}\frac{a}{y^2}} = \frac{(2a)^{3/2}}{\left(\sqrt{y}\right)^3\frac{a}{y^2}} = \frac{(2a)^{3/2}}{\sqrt{y}\left(\sqrt{y}\right)^2\frac{a}{y^2}} = \frac{(2a)^{3/2}}{\sqrt{y}\,y\frac{a}{y^2}} = \frac{(2a)^{3/2}}{\frac{a}{y}\sqrt{y}} =$$

$$\frac{2^{3/2}\sqrt{a^3}}{a\frac{\sqrt{y}}{y}} = 2^{3/2}\frac{a\sqrt{a}}{a\frac{\sqrt{y}}{y}} = \frac{2^{3/2}\sqrt{a}}{\frac{\sqrt{y}}{y}} = \frac{2^{3/2}a^{1/2}}{y^{1/2}:y \text{ ou } y^{-1/2}} = 2^{3/2}a^{1/2}$$

$\frac{1}{y^{-1/2}} = 2^{3/2}a^{1/2}y^{1/2}$ (en nous rappelant (algèbre) que $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ ou $a^m = \frac{1}{a^{-m}}$) $= 2^{2/2}\ 2^{1/2}\ a^{1/2}y^{1/2} = 2\ (2^{1/2}a^{1/2}\ y^{1/2}) = 2\sqrt{2ay}$ (178).

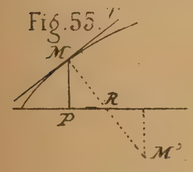
Cette expression du rayon de courbure de la cycloïde

$$Y = 2\sqrt{2\,a\,y},$$

et celle de la normale, (équation 175) ou

$$\text{normale} = \sqrt{2\,a\,y},$$

nous montrent que le rayon de courbure MM′ de la cycloïde, fig. 55, est double de la normale MR.




126. — *Cherchons maintenant l'équation de la développée à la cycloïde.*

Nous avons vu, art. 83, équations (120) et (121), qu'entre les coordonnées $\alpha$ et $\beta$ de la développée à une courbe, on a les relations

$$y-\beta = -\frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \text{ et } x-\alpha = \frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = -(y-\beta)\frac{dy}{dx}.$$

Substituons, art. 91, dans ces expressions, les valeurs de

$\frac{dy}{dx}$ et de $\frac{d^2y}{dx^2}$ tirées de l'équation de la cycloïde (équations (176) et (177), et nous aurons

$$y-\beta=-\frac{1+\frac{2ay-y^2}{y^2}}{-\frac{a}{y^2}}=\frac{1+\frac{2a}{y}-1}{\frac{a}{y^2}}=\frac{2a}{y}:\frac{a}{y^2}=\frac{2ay^2}{ay}=2y;$$

$$x-\alpha=\frac{\left(1+\frac{2ay-y^2}{y^2}\right)\frac{\sqrt{2ay-y^2}}{y}}{-\frac{a}{y^2}}=\frac{\left(1+\frac{2a}{y}-1\right)\frac{\sqrt{2ay-y^2}}{y}}{-\frac{a}{y^2}}=-$$

$$\left[\frac{2a}{y^2}\sqrt{2ay-y^2}:\frac{a}{y^2}\right]=-\left[\frac{2a}{y^2}\times\frac{y^2}{a}\sqrt{2ay-y^2}\right]=-2\sqrt{2ay-y^2};$$

donc de $y-\beta=2y$ on tire $y=-\beta$;

et de $x-\alpha=-2\sqrt{2ay-y^2}$ on tire $x=\alpha-2\sqrt{2ay-y^2}$;

et en remplaçant dans cette dernière équation y par $-\beta$, on aura

$$x=\alpha-2\sqrt{-2a\beta-\beta^2}.$$

Substituant ces valeurs de y et de x dans l'équation (172) de la cycloïde, art. 120, on obtiendra

$$d.(\alpha-2\sqrt{-2a\beta-\beta^2})=\frac{-\beta\, d.(-\beta)}{\sqrt{-2a\beta-\beta^2}}$$

ou $$d\alpha-2d(-2a\beta-\beta^2)^{1/2}=\frac{\beta\, d\beta}{\sqrt{-2a\beta-\beta^2}},$$

ou $$d\alpha-2\left[\frac{1}{2}(-2a\beta-\beta^2)^{-1/2}d.(-2a\beta-\beta^2)\right]=\frac{\beta\, d\beta}{\sqrt{-2a\beta-\beta^2}},$$

ou $$d\alpha-\left[\frac{1}{(-2a\beta-\beta^2)^{1/2}}\times(-2ad\beta-2\beta d\beta)\right]=\frac{\beta\, d\beta}{\sqrt{-2a\beta-\beta^2}},$$

ou $$d\alpha-\frac{-2ad\beta-2\beta\, d\beta}{\sqrt{-2a\beta-\beta^2}}=\frac{\beta\, d\beta}{\sqrt{-2a\beta-\beta^2}},$$

ou $d\alpha\sqrt{-2a\beta-\beta^2}-(-2a\,d\beta-2\beta\, d\beta)=\beta\, d\beta$,

ou $d\alpha\sqrt{-2a\beta-\beta^2}+2ad\beta+2\beta\, d\beta=\beta\, d\beta$,

ou $d\alpha\sqrt{-2a\beta-\beta^2}+2a\,d\beta+\beta\, d\beta=0$,

ou $d\alpha\sqrt{-2a\beta-\beta^2}+(2a+\beta)\,d\beta=0$. (179).

*Telle est l'équation de la développée à la cycloïde* représentée par l'équation (172), dont le diamètre du cercle

générateur est $2a$ et l'origine des coordonnées en o, fig. 50.

127. — Si l'on veut avoir l'équation de cette développée en fonction de l'arc, le tout étant comme à la fig. 50, prenons, fig. 56, $AQ = AP = ME =$ (art. 120) $= \sqrt{2ay - y^2}$.

Fig. 56.



D'où $OQ = OP + 2ME = x + 2\sqrt{2ay - y^2} = \alpha$ d'après ce qui précède.

Prenons $QM' = -MP = -y = \beta$, également valeur trouvée ci-dessus.

Donc le point M', ayant pour coordonnées les valeurs de $\alpha$ et de $\beta$, trouvées ci-dessus, appartient à la transformée.

Mais, nous avons vu, art. 120, que $OP + AP$ ou $x + \sqrt{2ay - y^2} =$ l'arc MA ; donc la valeur de $\alpha$ trouvée ci-dessus peut se mettre sous la forme

$$\alpha = \text{arc } MA + \sqrt{2ay - y^2} = \text{arc } MA + ME. \quad (180).$$

Prolongeons BA et prenons $AL = BA = 2a$, et sur AL décrivons la demi-circonférence AM'L ; cette demi-circonférence passera par le point M', à cause des cordes égales MA et M'A prises sur deux circonférence de même diamètre. Ces cordes sont égales comme hypothénuses de triangles rectangles égaux. On a donc arc MA = arc M'A et ME = M'E'.

Substituant ces valeurs dans l'équation (180), on aura

$$\alpha = \text{arc } M'A + M'E'.$$

Or, M'E' est une moyenne proportionnelle (géométrie élémentaire) entre les deux segments AE' et E'L du diamètre ou entre $\beta$ et $2a - \beta$.

On a donc $M'E' = \sqrt{\beta(2a - \beta)} = \sqrt{2a\beta - \beta^2}$ ; et en mettant cette valeur dans l'équation précédente, on trouvera

$$\alpha = \text{arc } M'A + \sqrt{2a\beta - \beta^2}. \quad (181).$$

*Telle est la relation qui existe entre les coordonnées $OQ = \alpha$ et $QM' = \beta$ d'un point M' de la développée ; telle est donc l'équation de la développée en fonction de l'arc, l'origine étant en o.*

Si nous voulons avoir cette équation avec l'origine transportée de O en O', fig. 56, prolongeons l'ordonnée $B'D =$

BA $= 2a$, d'une quantité DO' égale également à $2a$, et par le point O' menons la parallèle O'D' à OD ; soient $O'Q' = \alpha'$, $Q'M' = \beta'$, les coordonnées du point M', avec l'origine en O' ; nous avons pour l'abscisse $\alpha'$, $O'Q' = OD - OQ$,

ou $\alpha' = \frac{1}{2}$ circonférence génératrice $- OQ$,

ou $\alpha' = \pi a - \alpha$.

Pour l'ordonnée $\beta'$, nous avons

$$M'Q' = O'D - Q M', \text{ ou } \beta' = 2a - \beta.$$

On tire de ces équations

$$\alpha = \pi a - \alpha' \text{ et } \beta = 2a - \beta'.$$

Ces valeurs transforment l'équation (181) en

$\pi a - \alpha' = \text{arc } M'A + \sqrt{2a(2a - \beta') - (2a - \beta')^2} = \text{arc } M'A + \sqrt{4a^2 - 2a\beta' - 4a^2 + 4a\beta' - \beta'^2} = \text{arc } M'A + \sqrt{2a\beta' - \beta'^2}$

ou $\pi a - \alpha' = \text{arc } AM'L - \text{arc } M'L + \sqrt{2a\beta' - \beta'^2} = \pi a - \text{arc } M'L + \sqrt{2a\beta' - \beta'^2}$,

et par suite

$\alpha' = \pi a - \pi a + \text{arc } M'L - \sqrt{2a\beta' - \beta'^2} = \text{arc } M'L - \sqrt{2a\beta' - \beta'^2}$. (182).

*Telle est l'équation de la développée en fonction des coordonnées $\alpha'$ et $\beta'$ et de l'arc M'L, c'est-à-dire avec l'origine en O'.*

*Remarque.* — Cette équation est celle d'une cycloïde, art. 121 ; donc la développée d'une cycloïde est une autre cycloïde.

128. — On peut encore démontrer de la manière suivante que la développée OM'O', fig. 56, est une cycloïde. En effet, nous avons

$$\text{arc } LM' + \text{arc } M'A = \frac{1}{2} \text{ circonf.} = \pi a,$$

donc $\text{arc } LM' = \pi a - \text{arc } M'A$.

D'un autre côté,

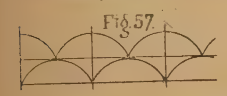
$$\text{arc } M'A = \text{arc } AM = OA, \text{ (art. 120 et 127)}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation précédente et remarquant que $\pi a = OD$, en admettant que DB' soit au milieu de l'arc de cycloïde, (plus grande ordonnée), on aura

$$\text{arc } LM' = \pi a - OA = OD - OA = AD = LO'.$$

Mais l'égalité arc $LM' = LO'$, indique la propriété de la cycloïde, art. 120 ; donc la développée $OM'O'$ est une cycloïde.

*Remarque.* — On peut donc résumer ce que nous venons d'exposer en disant que la cycloïde $OMB'$, fig. 56, (dont le cercle générateur $AMB$ a pour diamètre $BA$), a pour développée une autre cycloïde $OM'O'$ (dont le cercle générateur $AM'L$ a pour diamètre $AL$ égal à $BA$). On voit aussi que $OD$ est la ligne sur laquelle roule le cercle générateur de la cycloïde, tandis que $D'O'$ est celle sur laquelle roule le cercle générateur de la développée ; on voit encore que le point o, où commence la cycloïde, est le point correspondant à l'ordonnée la plus élevée (milieu d'un arc) de la développée ; on a donc, fig. 57, la série supérieure d'arcs, appartenant à la cycloïde et la série inférieure à sa développée.




## 2°. — Méthode des infiniment petits.

129. — Nous avons étudié le calcul différentiel par la méthode des limites ; nous allons examiner maintenant la méthode des infiniment petits.

Les notions que nous avons de l'infini se réduisent à cette proposition : *Une quantité n'est pas infinie quand elle est susceptible d'augmentation*. Par conséquent, si l'on a l'expression $x + a$, et que $x$ devienne infini, il faut supprimer $a$, autrement ce serait supposer que $x$ peut encore s'augmenter de $a$, ce qui est contre la définition ci-dessus.

130. — Cette proposition étant fondamentale, nous allons la démontrer d'une manière plus satisfaisante. Soit donc l'équation

$$x + a = y \ldots (183),$$

dans laquelle $a$ est une quantité constante. Nous pouvons au moyen d'une indéterminée $m$, représenter par $ma$ le rapport des variables $y$ et $x$, ou, ce qui revient au même, supposer

$$\frac{y}{x} = ma \text{ ou } max = y \ (184).$$

Substituant cette valeur dans l'équation (183), on a

$$x + a = max \ (185) ;$$

divisant les deux membres de l'équation (185) par ax, il vient

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{x} = m \ (186).$$

Lorsque x devient infini, la fraction $\frac{1}{x}$ atteignant son dernier degré de décroissement, se réduit évidemment à zéro ; alors l'équation (186) devient

$$\frac{1}{a} = m.$$

Cette valeur étant substituée dans l'équation (185), on a

$$x + a = \frac{1}{a} a x = x,$$

ce qui montre que quand x est infini, x+a se réduit à x ; donc alors on peut supprimer a, (art. 129).

131. — La quantité a, à l'égard de laquelle x est infini, est ce qu'on appelle un *infiniment petit*, par rapport à x.

On dit aussi qu'un *infiniment petit* est une quantité variable qui a zéro pour limite ; on peut le concevoir plus petit que toute quantité donnée.

132. — Comme nous ne considérons ici que les rapports des quantités, la démonstration de l'art. 130, a lieu lors même que x a une valeur finie, c'est-à-dire lorsqu'on donne une valeur déterminée à x, pourvu seulement que a soit infiniment petit par rapport à cette valeur de x.

Par la théorie des fractions nous pouvons encore rendre sensible cette vérité. En effet, si l'on compare la quantité finie a, per exemple, à la fraction $\frac{a}{x}$, il est certain que plus le dénominateur x augmentera, plus la fraction diminuera; de sorte que quand x deviendra infini, cette fraction deviendra absolument nulle, et, comme telle, devra être supprimée devant a qui alors sera infini à l'égard de $\frac{a}{x}$; car une quantité finie quelconque a peut être considérée comme infinie vis-à-vis d'une quantité infiniment petite ou zéro, obtenue en divisant cette quantité a en un nombre infini de parties et en prenant l'une de ces parties comme terme de comparaison avec l'ensemble a de cette infinité de parties

133. — Quoique deux quantités soient infiniment petites il ne s'ensuit pas que leur rapport soit nul ; car

$$\frac{a}{\infty} : \frac{b}{\infty} :: a : b,$$

puisqu'une fraction $\frac{a}{b}$ ne change pas quand on divise ses deux termes par un même nombre, soit $\infty$.

On conçoit du reste que deux quantités infiniment petites peuvent se contenir comme deux quantités très-grandes ; ainsi, en réprésentant deux quantités infiniment petites par dy et par dx, art. 3, il résulte de ce qui précède que leur rapport $\frac{dy}{dx}$ ne sera pas nul ; résultat conforme à celui que nous montré, art. 3 et 5, par la considération des limites. Donc, deux quantités *infiniment petites* comme deux quantités infinies peuvent avoir un rapport fini.

134. — Quand une quantité x est infiniment petite par rapport à une grandeur finie a, que nous ferons d'abord égale à l'unité, le carré $x^2$ est infiniment petit par rapport à x, car la proportion

$$1 : x :: x : x^2,$$

qui est vraie puisque le produit des extrèmes est égal à celui des moyens, nous prouve que $x^2$ est renfermé dans x autant de fois que x l'est dans l'unité, c'est-à-dire un nombre infini de fois.

Or, si cela est vrai quand a est l'unité, il n'en est pas moins ainsi quand a égal plusieurs fois l'unité ou est une autre quantité finie.

En effet si x est infiniment petit par rapport à a, la proportion

$$a : x :: ax : x^2,$$

qui est vraie, montre que $x^2$ est infiniment petit par rapport à ax, (a étant une quantité finie) ; donc en divisant par a les deux termes du second rapport, on aura $a : x :: x : \frac{1}{a}x^2$, donc $\frac{1}{a}x^2$ sera infiniment petit par rapport à x. Mais puisque $\frac{1}{a}x^2$ est infiniment petit par rapport à x, on peut représenter $\frac{1}{a}x^2$ par $\frac{b}{\infty}$, donc on aura $\frac{1}{a}x^2 = \frac{b}{\infty}$, d'où $x^2 =$

$\frac{ab}{\infty} =$ un infiniment petit ; donc si $\frac{1}{a}x^2$ est infiniment petit, $x^2$ l'est aussi, et l'on a

$$a : x :: x : x^2.$$

On démontrerait de même, à l'aide de la proportion

$$x : x^2 :: x^2 : x^3,$$

que $x^2$ étant infiniment petit par rapport à x, le terme $x^3$ doit être infiniment petit par rapport à $x^2$ ; et ainsi de suite.

Pour cette raison, on a divisé les infiniment petits en différents ordres : ainsi, dans les exemples précédents, x est un infiniment petit du premier ordre par rapport à a; $x^2$ est un infiniment petit du second ordre par rapport à a et du premier ordre par rapport à x ; $x^3$ est un infiniment petit du troisième ordre par rapport à a, du second ordre par rapport à x, du premier ordre par rapport à $x^2$ ; ainsi de suite.

135. — Si x est infiniment petit par rapport à a, il en sera de même de x multiplié par une quantité finie b. En effet, x peut être considéré comme une fraction dont le dénominateur serait infini, et ainsi peut être représenté par $\frac{c}{\infty}$ ; or, que l'on ait $\frac{c}{\infty}$ ou $\frac{bc}{\infty}$, ces quantités n'en sont pas moins nulles par rapport à a.

136. — Nous avons vu, art. 130, qu'on peut supprimer une quantité finie qui est à ajouter à une quantité infinie. De même, on peut supprimer un infiniment petit du premier ordre x par rapport à une quantité finie a, lorsque cet infiniment petit x est à ajouter à la quantité finie a, qu'il ne peut augmenter puisqu'il est plus petit que toute quantité donnée. Pour la même raison, on doit effacer un infiniment petit du second ordre qui serait à ajouter à un infiniment petit du premier ordre ; ainsi de suite.

Par exemple, si l'on a l'expression

$$a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4,$$

et que y (ou by art, 135) soit un infiniment petit du premier ordre, $cy^2$ en sera un du second, (art. 134 et 135) ; $dy^3$ en sera un du troisième et $ey^4$ du quatrième. On doit donc effacer $ey^4$ parce que ce terme ne peut augmenter $dy^3$ ;

de même on doit effacer $dy^3$ parce que ce terme ne peut augmenter le terme $cy^2$ ; et celui-ci doit être effacé à son tour parce qu'il ne peut augmenter $by$ ; enfin ce dernier disparaîtra également parce qu'il ne peut augmenter la quantité finie $a$ ; il restera donc $a$.

137. — Deux quantités infiniment petites du premier ordre $x$ et $y$ donnent pour produit un infiniment petit du second ordre. En effet, du produit $x \times y$, on tire la proportion

$$1 : y :: x : xy,$$

le produit des extrêmes étant égal à celui des moyens.

Cette proportion nous montre que puisque $y$ est un infiniment petit du premier ordre par rapport à la quantité finie $1$, $x\,y$ sera infiniment petit par rapport à $x$ puisque le second rapport est égal au premier dans toute proportion ; $x\,y$ sera donc un infiniment petit du second ordre par rapport à la quantité finie $1$ et du premier ordre par rapport à $x$.

De même, on prouverait que le produit de trois infiniment petits du premier ordre donne un infiniment petit du troisième ordre ; ainsi de suite.

138. — Le principe fondamental de l'emploi des *infinis* ou des *infiniment petits*, en analyse, est de ne conserver, dans une équation où entrent des quantités de divers ordres, que les termes de l'ordre de grandeur le plus élevé, art. 130 et art. 136.

Le *calcul infinitésimal* n'est autre chose que l'application systématique des infiniment petits. Mais, en géométrie élémentaire, on en fait usage, soit directement, soit indirectement, dans la *méthode des limites*.

Par exemple, la proportionnalité des circonférences de cercle à leurs rayons se déduit de la proportionnalité des périmètres des polygones réguliers d'un même nombre de côtés à leurs apothèmes ; etc. Il est vrai qu'un cercle n'est pas un polygone et ne se confondra jamais avec un polygone inscrit quelque grand que puisse être le nombre de ses côtés; mais la différence entre les périmètres tend vers zéro à mesure que le nombre des côtés du polygone augmente ; et il en est de même de la différence entre les sur-

faces ou entre les apothèmes. Ces différences sont donc des infiniment petits ; si on les supprime en présence des quantités finies, conformément au principe fondamental de la méthode infinitésimale, cela revient à opérer comme si le cercle était un polygone régulier à côtés infiniment petits.

Le calcul infinitésimal ou analyse infinitésimale comprend le calcul différentiel, démontré par la méthode des infiniment petits ; le calcul intégral, et s'applique du reste par ses principes généraux à toutes les formes diverses de l'analyse mathématique.

### Théorie de la différentiation d'après la méthode des infiniment petits.

139. — Si l'on suppose que dans une fonction de x, la variable x prenne un accroissement infiniment petit que nous représenterons par dx, de sorte que x dans f(x) devienne x + dx et la fonction f (x + dx), la différence du nouvel état au premier ou f (x + dx) — f x est ce qu'on appelle la différentielle de la fonction f x.

Par exemple, soit à trouver la différentielle de ax, comme cette fonction devient a (x + dx) ou ax + a dx, en retranchant ax, on aura a dx pour la différentielle cherchée ; résultat que nous avons déjà trouvé, art. 6, nº 4, par la méthode des limites.

140. — Soit maintenant à trouver la différentielle de $ax^3$. Faisons dans cette expression x = x + dx, et nous aurons $a(x + dx)^3$ ou $a(x^3 + 3x^2\,dx + 3x\,dx^2 + dx^3)$ ou $ax^3 + 3ax^2\,dx + 3ax\,dx^2 + a\,dx^3$. Retranchons de cette expression $ax^3$ et il restera

$$3ax^2\,dx + 3ax\,dx^2 + a\,dx^3.$$

Cela étant, $a\,dx^3$ étant un infiniment petit du troisième ordre, (d'après ce que nous avons vu, art. 134 et 135, puisque dx est infiniment petit), $adx^3$ ne peut donc augmenter $3ax\,dx^2$ et par conséquent nous pourrons l'effacer, art. 136. De même $3ax\,dx^2$, qui est un infiniment petit du second ordre ne peut augmenter $3ax^2\,dx$ qui est un infiniment petit du premier ordre, on effacera donc aussi 3ax

$dx^2$ et il restera $3ax^2\,dx$ pour la différentielle, comme on l'aurait trouvé aussi par la méthode des limites.

141. — D'après le même principe, on différentiera toute autre fonction de x, en ayant soin de supprimer les infiniment petits des ordres supérieurs, ce qui se ramène à ne conserver que le premier terme du développement, comme on le fait par la méthode des limites.

Par exemple, pour trouver la différentielle de f x, au lieu d'écrire, comme à l'art. 7, équation ($7^{tiers}$) :

$$\frac{f(x+h) - f x}{h} = A + B h + C h^2 + \text{etc.},$$

équation qui, dans le cas de la limite où $h = 0$, donne

$$\frac{d.\, f x}{dx} dx = A\, dx$$

pour la différentielle,

on aurait, par la méthode des infiniment petits

$$f(x + dx) = f x + A dx + B(dx)^2 + C(dx)^3 + \text{etc},,$$

(d'après la formule du binôme et où A, B, C, etc., représentent des fonctions de x).

Retranchant de cette équation la fonction primitive, art. 139, il reste

$$A\, dx + B\, dx^2 + C\, dx^3 + \text{etc.},$$

et en supprimant les infiniment petits des ordres supérieurs, dx étant infiniment petit, art. 140, il resterait seulement le terme A dx qui serait la différentielle cherchée, résultat conforme à celui obtenu ci-dessus par la méthode des limites.

142. — La différentielle du produit de deux variables x et y s'obtient en supposant que quand x devient $x+dx$, y devienne $y + dy$ ; dx et dy étant des infiniment petits. Le produit $x \times y$ sera donc alors

$$(x + dx)(y + dy) \text{ ou } x y + ydx + x dy + dx dy ;$$

et en retranchant x y, art. 139, il reste

$$y dx + x dy + dx dy.$$

Le dernier terme de ce résultat étant un infiniment petit du second ordre, art. 137, peut être supprimé, et l'on a enfin pour la différentielle de $x \times y$ :

$$y\,dx + x\,dy,$$

résultat obtenu déjà par la méthode des limites.

De cette différentielle, on déduira celle du produit d'un plus grand nombre de variables et ensuite celle de $x^m$, par les mêmes procédés que ceux que nous avons employés dans la méthode des limites.

143. — Pour obtenir la différentielle de $a^x$, on cherchera d'abord le développement de $a^{x+dx}$, dx étant un infiniment petit, ce développement, analogue à celui de $a^{x+h}$, art. 24, sera

$$a^{x+dx} = a^x + A\,a^x\,dx + a^x\,(\text{termes en } dx^2, \text{ en } dx^3, \text{etc.}).$$

On retranchera de ce développement $a^x$, et il restera

$$a^{x+dx} - a^x = A\,a^x\,dx + a^x\,(\text{termes en } dx^2, \text{ en } dx^3, \text{etc.}).$$

On supprimera ensuite tous les termes d'ordres supérieurs au premier, et il ne restera que le premier terme $A\,a^x\,dx$ qui sera la différentielle cherchée, comme celle obtenue par la méthode des limites, art. 24, éq. 31.

De la différentielle de $a^x$, on déduira, comme nous l'avons fait par la méthode des limites, art. 28, la différentielle de log x.

144. — Pour trouver la différentielle de sin x, on posera d'abord, d'après la trigonométrie, $\sin(x+dx) - \sin x = \sin x \cos dx + \sin dx \cos x - \sin x$.

L'arc dx étant infiniment petit, on a, (trigonométrie) : $\cos dx$ ou $\cos 0 = R = 1$, et $\sin dx$ ou $\sin 0 = 0 = dx$.

Ces valeurs substituées dans l'équation précédente donnent

$$\sin(x+dx) - \sin x = \sin x \times 1 + dx \cos x - \sin x = dx \cos x,$$

donc

$$d.\sin x = dx \cos x,$$

comme avec la méthode des limites, art. 30.

145. — Le problème des tangentes a donné en quelque sorte naissance au calcul différentiel. Pour résoudre ce problème par la méthode des infiniment petits nous opérerons de la manière suivante :

Fig. 58.

Soient, fig. 58, MP et M'P' deux ordonnées, de la courbe OMM', infiniment proches, PP' est donc un infiniment petit. Soit ME une parallèle à l'axe des x ; la tangente

MT, au point M, peut être considérée comme le prolongement de l'élément MM' de la courbe, parce que cet élément ou arc étant très-petit, peut-être considéré comme étant en ligne droite.

Faisons $OP = x$ ; $MP = y$ ; $PP' = dx$, l'accroissement infiniment petit de x ; et $M'E = dy$, l'accroissement infiniment petit de y.

Le triangle infiniment petit M'ME étant semblable au triangle MTP, on a

$$M'E : ME :: MP : TP, \text{ ou } dy : dx :: y : TP ;$$

donc la *sous-tangente* $TP = y\frac{dx}{dy}$,

comme par la méthode des limites, art. 47.

La longueur de la *normale*, de la *tangente* et les équations de ces lignes se trouveront ensuite comme dans les articles 50, 49, 51 et 52 de la méthode des limites.

146. — Pour obtenir la différentielle d'un arc $f(x, y)$, on considérera comme une ligne droite l'arc compris entre les coordonnées infiniment proches MP et M'P', fig. 58, ou coordonnées $y$ et $y + dy$ ; alors en désignant par S l'arc total jusqu'au point M, et par dS l'accroissement infiniment petit MM' de cet arc, on aura, dans le triangle rectangle M'ME dont les côtés sont $M'E = dy$, $ME = dx$ et $MM' = dS$, par la propriété du carré de l'hypoténuse :

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

ce qui est la différentielle de l'arc S, laquelle est la même que celle obtenue par la méthode des limites, art. 88.

### 3°. — Méthode de Lagrange pour démontrer les principes du calcul différentiel, indépendemment de la considération des limites, des infiniment petits, ou de toute quantité évanouissante.

147. — Nous avons étudié la différentiation par la méthode des limites et par celle des infiniment petits. Nous allons maintenant démontrer le théorème de Taylor sans faire usage de calcul différentiel, en employant seulement des procédés analytiques pour trouver le développement

des différentes sortes de fonctions que l'algèbre peut nous offrir. Une fois le théorème de Taylor connu, on peut en déduire avec facilité les principes de la différentiation.

Ce théorème de Taylor, qui est aussi d'une si grande utilité, avons-nous vu, pour développer des fonctions en séries, peut s'obtenir donc de la manière suivante :

Soit $y = f(x+h)$. On conçoit parfaitement que si, dans cette fonction, on fait $h = o$, l'expression $f(x+h)$ se réduira à $fx$ ; et c'est ce qui aura lieu si, dans le développement de cette fonction, la partie qui contient $h$ est un multiple de $h$. Représentons-la donc par $Ph$ ; nous aurons

$$f(x+h) = fx + Ph ;$$

$P$ pouvant être une fonction de $h$ et pouvant aussi avoir des termes indépendants de $h$.

Si, maintenant, nous représentons par $p$ ce que devient $P$ lorsqu'on fait $h = o$, et par $Qh$ la partie de $P$ qui dépend de $h$ et qui s'évanouit quand $h = o$, nous aurons encore

$$P = p + Qh.$$

En continuant ce raisonnement, nous obtiendrons cette suite d'équations :

$$y = fx + Ph,$$
$$P = p + Qh,$$
$$Q = q + Rh,$$
$$\text{etc. etc. etc.}$$

Remplaçant, dans la première de ces équations, $P$ par sa valeur tirée de la seconde, nous aurons

$$y = fx + (p + Qh)h = fx + ph + Qh^2.$$

De même, en mettant dans ce résultat la valeur de $Q$, donnée par la troisième, il viendra

$$y = fx + ph + qh^2 + Rh^3.$$

En continuant ainsi, et en mettant $f(x+h)$ à la place de $y$, nous aurons, en général

$$f(x+h) = fx + ph + qh^2 + rh^3 + sh^4 + th^5 + \text{etc.} \quad (187).$$

148. — L'expression $f(x+h)$ représente, en général, la fonction qui n'est pas encore réduite en séries. Si on veut la réduire en séries en changeant $x$ en $x+i$, on obtiendra le même résultat que si l'on changeait $h$ en $h+i$. En effet, cette fonction ne pouvant renfermer $x$ sans que cette

variable ne soit suivie immédiatement de h, puisque partout on remplace x par $x+h$, un terme quelconque, tel que $A(x+h)^m$, par exemple, quand on aura changé x en $x+i$, deviendra $A(x+i+h)^m$, quantité qui est la même que $A(x+h+i)^m$ qui résulterait de la substitution de $h+i$ à la place de h, dans la fonction $A(x+h)^m$.

Ce que nous venons de dire de ce terme devant s'appliquer à tous les autres, il en résulte que, dans les deux hypothèses, le premier membre de l'équation (187) donnera lieu à des résultats identiques ; donc le développement $fx+ph+qh^2+$ etc., donnera le même résultat en y remplaçant x par $x+i$, ou h par $h+i$.

149. — En substituant d'abord $h+i$ à h dans $fx+ph+qh^2+$ etc., on aura

$f(x+h+i)=fx+p(h+i)+q(h+i)^2+r(h+i)^3+$ etc.(188) ;

développant les termes en h de ces binômes, il viendra

$f(x+h+i)=fx+ph\ldots+qh^2+2qhi\ldots+rh^3+3rh^2i+3rhi^2+$ etc., $+pi+qi^2+$ etc..)... (189).

Pour obtenir ensuite le résultat de la substitution de x à $x+i$, dans l'expression $fx+ph+qh^2+rh^3+$ etc., remarquons que dans cette série, tous les h étant en évidence, cet accroissement n'entre pas dans fx ni dans les coefficients p, q, r, s, etc., quantités qui ne pouvant donc renfermer que x, en doivent être regardées comme des fonctions ; et puisque l'équation (187) a lieu pour toute fonction de x, la substitution de $x+i$ à la place de x changera, d'après l'équation (187) :

$$\begin{array}{l}
fx \text{ en } fx+pi+qi^2+ri^3+si^4+\text{etc.},\\
p \text{ en } p+p'i+p''i^2+p'''i^3+p^{IV}i^4+\text{etc.},\\
q \text{ en } q+q'i+q''i^2+q'''i^3+q^{IV}i^4+\text{etc.},\\
r \text{ en } r+r'i+r''i^2+r'''i^3+r^{IV}i^4+\text{etc.},\\
s \text{ en } s+s'i+s''i^2+s'''i^3+s^{IV}i^4+\text{etc.},\\
\quad\text{etc.}\quad\text{etc.}\quad\text{etc.}\quad\text{etc.}\quad\text{etc.};
\end{array}$$

les lettres accentuées, représentant les coefficients des différentes puissances de i dans ces développements.

En substituant ces valeurs de fx, de p, de q, de r, de s, etc., dans la suite, (éq. 187), $fx+ph+qh^2+rh^3+$ etc.,

nous obtiendrons : $f(x+i+h)$ ou, art. 148, $f(x+h+i)=fx+pi+qi^2+ri^3+\text{etc.}+(p+p'i+p''i^2+\text{etc.})h+(q+q'i+q''i^2+\text{etc.})h^2+(r+r'i+r''i^2+\text{etc.})h^3+\text{etc.}$ (190).

150. — Ce développement du second membre devant être identique, art. 148, à celui qui est donné par l'équation (189), il faut que les termes qui y contiennent les mêmes puissances de h soient égaux. (1) Nous aurons donc

$$p+p'i+p''i^2+\text{etc.}=p+2qi+\text{etc.};$$
$$q+q'i+q''i^2+\text{etc.}=q+3ri+\text{etc.};$$
$$r+r'i+r''i^2+\text{etc.}=r+4si+\text{etc.}$$

---

(1) Lorsqu'une équation, telle que

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}\ldots+Dx+E=0\ldots(1),$$

a lieu quel que soit x, il faut nécessairement que chacun des coefficients A, B, C, D, E, soit nul. En effet, puisque x peut avoir une valeur quelconque, faisons $x=0$, l'équation (1) se réduira à $E=0$ ; et comme E est indépendant de x, ce terme sera donc encore nul lorsque x n'égalera pas zéro ; d'où il suit que l'équation (1) se réduira à

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots+Dx=0;$$

supprimant le facteur commun x, il restera

$$Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\ldots+D=0.$$

Appliquant à cette équation le même raisonnement que nous avons employé à l'égard de l'équation (1), nous prouverons que D est nul ; et en continuant ainsi, noustrouverons successivement que les autres coefficients le sont également.

Cela étant, comme les seconds membres des équations (189) et (190) sont identiques, art. 148, on a

$fx+ph+\ldots+qh^2+2qhi+\ldots+rh^3+3rh^2i+3rhi^2+\text{etc.}+pi+qi^2+\text{etc.}=fx+pi+qi^2+\text{etc.}+(p+p'i+p''i^2+\text{etc.})h+(q+q'i+\text{etc.})h^2+(r+r'i+r''i^2+\text{etc.})h^3+\text{etc.}$

En retranchant le second membre du premier, mettant $h, h^2$, etc., en évidence, on aura :

$fx-fx+pi+qi^2+\text{etc.}-pi-qi^2-\text{etc.}+[(p+2qi+3ri^2+\text{etc.})-(p+p'i+p''i^2+\text{etc.})]h+[(q+3ri+\text{etc.})-(q+q'i+\text{etc.})]h^2+\text{etc.}=0,$

ou

$[(p+2qi+3ri^2+\text{etc})-(p+p'i+p''i^2+\text{etc.})]h+[(q+ri+\text{etc.}-(q+q'i+\text{etc.})]h^2+\text{etc.}=0.$

Or, pour que cela ait lieu quel que soit h, il faut d'après ce que nous venons de dire au commencement, que chacun des coefficients de h, de $h^2$, etc., soient nuls ; et comme ces coefficients sont formés respectivement de la différence des coefficients de h, de $h^2$, etc., des seconds membres des équations (189) et (190), il faut pour que cette différence soit nulle, que ces coefficients soient égaux deux à deux ; donc que les termes qui dans ces équations contiennent les mêmes puissances de h soient égaux. C. Q. F. D.

Ce que nous disons de h pouvant s'appliquer à i, en égalant les termes affectés des mêmes puissances de i, nous trouverons

$$p' = 2q, \quad q' = 3r, \quad r' = 4s, \text{ etc. } (191);$$

ce qui revient à égaler les termes affectés de hi, de $h^2i$, de $h^3i$, etc., des équations (189) et (190).

151. — Nous avons vu, art. 149, que p était en général une fonction de x ; représentons donc p par f'x, et appelons f″x le terme qui multiplie h dans le développement de f'(x+h) ; nommons de même f‴x le coefficient de h dans le développement de f″(x+h) ; et ainsi de suite, nous aurons les équations, art. 147,

$$\left.\begin{array}{l} f(x+h) = fx + hf'x + \text{termes en } h^2, \text{ en } h^3, \text{ ect.} \\ f'(x+h) = f'x + hf''x + \text{termes en } h^2, \text{ en } h^3, \text{ etc.} \\ f''(x+h) = f''x + hf'''x + \text{termes en } h^2, \text{ en } h^3, \text{ etc.} \\ \quad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{ect.} \end{array}\right\} (192).$$

152. — Nous venons de voir, article précédent, que p=f'x, par hypothèse. Donc, si dans cette équation, on fait x=x+h, nous aurons, semblablement à la valeur de de p, art. 149 :

$$f'(x+h) = p + p'h + p''h^2 + p'''h^3 + \text{etc. } (193).$$

Remplaçant, dans cette équation, f'(x+h) par sa valeur donnée par la seconde des équations (192), nous aurons

$$p + p'h + p''h^2 + \text{etc} = f'x + hf''x + \text{termes en } h^2, \text{ en } h^3. \text{ etc.}$$

Cette équation ayant lieu, quelque soit h, il faut que les termes des mêmes puissances de h soient égaux ; donc

$$p' = f''x;$$

cette valeur de p′ changera la première des équations (191) en $f''x = 2q$ ; d'où nous tirerons

$$q = \frac{1}{2} f''x.$$

Si dans cette équation, nous changeons x en x+h, nous aurons, (comme à l'art. 149, développement de q où h est remplacé par i) :

$$q + q'h + q''h^2 + \text{etc.} = \frac{1}{2} f''(x+h);$$

remplaçant f″(x+h) par son développement donné par la troisième des équations (192), nous obtiendrons.

$q+q'h+q''h^2+\text{etc.}=\frac{1}{2}$ ($f''x + hf'''x$ + termes en $h^2$, en $h^3$, etc.).

Comparant les termes qui multiplient la première puissance de h, nous aurons $q'=\frac{1}{2}f'''x$, valeur qui étant mise dans la seconde des équations (191) la changera en $\frac{1}{2}f'''x= 3r$, d'où nous tirerons

$$r=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot f'''x.$$

En continuant ainsi, nous trouverons successivement tous les autres coefficients de l'équation (187) ; substituant dans cette équation les valeurs de p, de q, de r, etc., nous aurons

$$f(x+h)=fx+hf'x+\frac{h^2}{1.2}f''x+\frac{h^3}{2.3}f'''x+\text{etc.} \quad (194).$$

153. — Si nous considérons maintenant la première des équations (192), nous verrons que $f'x$ étant le coefficient de h dans le développement de $f(x+h)$, est ce que nous avons désigné, dans la méthode des limites par $\frac{d.fx}{dx}$ ou $\frac{dy}{dx}$ ; par la même raison, en considérant la seconde des équations (192), nous reconnaîtrons que le coefficient $f''x$ de la première puissance de h, dans le développement de $f'(x+h)$, doit être représenté par $\frac{df'x}{dx}$, c'est-à-dire par $\frac{d.\frac{dy}{dx}}{dx}$ ou $\frac{d^2y}{dx^2}$ ; et ainsi de suite ; par conséquent, en mettant ces valeurs de $fx$, de $f'x$, de $f''x$, etc., dans l'équation (194), nous trouverons

$$f(x+h)=fx+\frac{dy}{dx}h+\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{2.3}+\text{etc.}\dots \quad (195) ;$$

ce qui est la formule de Taylor que nous avons obtenue par la méthode des limites.

Mais pour ne pas emprunter à la méthode des limites et ne pas faire usage de calcul différentiel pour obtenir cette formule, l'expression $\frac{dy}{dx}$ qui entre dans cette formule sera considérée ici comme le signe de l'opération algébrique par laquelle on obtient le coefficient de h dans le développement de $f(x+h)$ ; ce coefficient une fois trouvé,

les expressions $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc., nous indiquent que la même opération répétée nous fera connaître les coefficients des autres puissances de h ; de sorte que pour ne pas faire usage de calcul différentiel, nous n'avons besoin que de connaître, par des moyens tirés de l'algèbre, ce que doit être l'opération représentée par le signe $\frac{dy}{dx}$ pour chaque fonction.

Ainsi, par exemple, si nous voulons savoir quel est $\frac{dy}{dx}$ pour la fonction $x^m$, nous devrons développer $(x + h)^m$ par la formule du binôme, (algèbre), qui donnerait $x^m + m\,x^{m-1}h + \text{etc}$ ; et comme $\frac{dy}{dx}$ doit indiquer le coefficient de la première puissance de h, dans ce développement, nous aurons $\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$. Ainsi, tout se ramène à pouvoir trouver, par des procédés analytiques, le développement des différentes sortes de fonctions que l'algèbre peut présenter ; ces procédés ne sont pas différents de ceux que nous avons fait connaître pour développer les diverses fonctions, qui, par leur combinaison, donnent toutes les autres ; c'est ainsi que uous avons donné, par exemple, le développement de $a^{x+h}$, art. 24.

154. — Nous avons donc ici une troisième méthode, qui nous permet de démontrer les principes du calcul différentiel indépendemment de toute considération de limites, d'infiniment petits, ou de quantités évanouissantes ; en effet algébriquement nous pouvons obtenir la formule de Taylor et en déduire les principes de la différentiation.

Mais cette méthode ne peut exclure les deux autres, parce que quand on arrive aux applications et qu'on veut, par exemple, déterminer les volumes ou les surfaces, rectifier les courbes, ou obtenir les expressions des sous-tangentes, etc., on est toujours obligés de recourir aux limites ou aux infiniment petits.

155. — Si nous considérons les développements des diverses fonctions $(x+h)^m$, $a^{x+h}$, $\log(x+h)$, $\sin(x+h)$, etc., que l'algèbre nous présente ; ces fonctions étant en nombre

très limité, il est facile de reconnaître que, dans leurs développements, le coefficient de la première puissance de h n'est ni nul ni infini, du moins tant que x conserve sa valeur indéterminée ; c'est du reste ce qui résulte de la démonstration précédente. En effet, supposons qu'on eût p=o dans l'équation

$$f(x+h)=fx+ph+qh^2+rh^3+\text{etc.},$$

il pourrait se présenter deux cas : ou la valeur de x, que renferme p ou f'x devrait être donnée par une équation f'x, qui serait identique ou qui ne le serait pas. Or, nous allons démontrer : 1°, que si cette équation n'est pas identique la valeur de x n'a plus une valeur quelconque, ce qui est contre l'hypothèse ci-dessus ; et 2°, si cette équation f'x=o était une équation identique alors on aurait l'équation fx qui serait ou identique ou constante, ce qui est également contre l'hypothèse. Donc p ne peut égaler zéro.

En effet, dans le cas où p=o représente une équation qui n'est pas identique, elle est alors d'un certain degré, et elle ne donne ainsi qu'un nombre limité de valeurs de x, ce qui est contre l'hypothèse qui admet pour x une valeur quelconque.

Et si p ou f' x = o était une équation identique en x, (1) en faisant x = x + h, on aurait encore f' (x + h) = o ; et comme h entrerait partout où entre x, cette équation, considérée par rapport à h, serait encore identiquement nulle, c'est-à-dire que cette équation aurait lieu quelque soit h ; il en serait donc de même de son développement, qui, d'après l'équation (193), est

$$p + p'h + p''h^2 + p'''h^3 + \text{etc.} = o\,;$$

mais lorsqu'une équation de ce genre est nulle, indépendemment de h, il faut que les coefficients des différentes puissances de h soient séparément nuls, page 170, et par conséquent que l'on ait

$$p' = o,\ p'' = o,\ p''' = o,\ \text{etc.}$$

---

(1) Le cas où p ne contient pas x est compris dans celui-ci ; car si la valeur de p, qui est nulle, est représentée par a —a, par exemple, on peut la considérer comme a — x — (a — x).

En substituant ces valeurs dans les équations

$$p' = 2q,\ p'' = 3\,r,\ p''' = 4\,s, \text{ etc.},$$

qui résultent de l'identité des termes affectés des mêmes puissances de i h, de $i^2$ h, de $i^3$ h, etc., dans les suites (189) et (190), on obtiendrait

$$q = 0,\ r = 0,\ s = 0, \text{ etc.}\ ;$$

et, comme en outre $p=0$, l'équation (192) se réduirait à

$$f(x+h) = fx.$$

Il faudrait donc que $x+h$, mis à la place de x, ne changeât pas la fonction, ce qui exigerait que cette fonction fût identique ou constante ; car on sait que si fx était, par exemple, de cette forme, $x^2 - x^2$, ou de celle-ci, $c + x^2 - x^2$, la substitution de $x+h$ à la place de x donnerait toujours le même résultat ; et l'on voit que dans le premier cas, la fonction serait identique, et dans le second, se réduirait à une constante c.

Donc, on peut conclure de ce qui précède, que p ne peut être nul, c'est-à-dire que le coefficient de la première puissance de h, dans le développement général de $f(x+h)$, ne peut être nul.

Nous allons maintenant démontrer que ce coefficient ne peut être infini, sans que la fonction proposée fx le soit également, ce qui est contre l'hypothèse.

En effet, si p était infini, le second membre de l'équation (187) devenant infini, le premier membre le serait aussi, c'est-à-dire qu'on aurait $f(x+h) = \infty$ ; et comme $f(x+h)$ est composé en $x+h$, comme fx l'est en x, le terme qui, dans $f(x+h)$, rendrait cette expression infinie, devrait aussi rendre infini fx. Par exemple, si $f(x+h)$ renfermait un terme tel que $\frac{A}{(x+h)-(x+h)}$, qui est infini, il est évident qu'on devrait avoir dans fx, le terme $\frac{A}{x-x}$, qui serait également infini ; et par conséquent la fonction proposée serait infinie ; ce qui est contre l'hypothèse.

Donc le coefficient de la première puissance de h, ne peut être ni nul ni infini, tant que x conserve sa valeur indéterminée.

156. — Lagrange appelle la *fonction prime*, la *fonction seconde*, la *fonction tierce*, etc., de fx, les expressions f'x, f''x, f'''x, etc., ces fonctions sont, en général, les fonctions dérivées, art. 157, de fx.

Lagrange indique également, d'une autre manière, les fonctions dérivées en remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par y', $\frac{d^2y}{dx^2}$ par y'', $\frac{d^3y}{dx^3}$ par y''', et ainsi de suite.

DES DÉRIVÉES.

157. — On appelle *dérivée* d'une fonction $y = fx$, relativement à la variable x dont cette fonction dépend, la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement correspondant de la variable.

Représentons par $\Delta x$ l'accroissement donné à x ; par $\Delta y$ celui qui en résulte pour y, de telle sorte que l'on ait $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$, et par suite, $\Delta y = f(x + \Delta x) - fx$, et $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - fx}{\Delta x}$.

Si, dans cette fonction, qui est le rapport des accroissements finis de y et de x, on suppose que $\Delta x$ décroisse indéfiniment, ce rapport tend, en général, vers une certaine limite qu'on nomme la *dérivée* de la fonction. On la désigne par l'une des notations y' ou f' (x). Donc, par définition :

$$y' = \lim. \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim. \frac{f(x + \Delta x) - fx}{\Delta x} = f'(x).$$

Dans le calcul différentiel, cette dérivée est représentée par $\frac{dy}{dx}$, c'est-à-dire par le quotient des deux différentielles dy et dx.

Les accroissements correspondants $\Delta x$ et $\Delta y$ de la variable indépendante x et de la fonction y peuvent être positifs ou négatifs ; on leur donne cependant toujours le nom d'accroissement, mais l'on doit se rappeler que ce mot est pris dans un sens algébrique et peut signifier diminution.

Soit la fonction algébrique rationnelle et entière :

$$y = Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Px + Q.$$

Remplaçons x par x + $\Delta x$, calculons l'accroissement de y, et divisons par $\Delta$ x, nous aurons :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A\,(m\,x^{m-1} + \ldots) + B\,((m-1)\,x^{m-2} + \ldots) + \ldots + \ldots + P;$$

expression où tous les termes représentés par des points contiennent $\Delta$ x en facteur ; il en résulte qu'à la limite, pour $\Delta x = 0$, ces termes disparaissent et nous trouverons simplement

$$y' = m\,A\,x^{m-1} + (m-1)\,B\,x^{m-2} + \ldots + P.$$

Remarquons que ce nouveau polynôme, qui est la dérivée du polynôme proposé, s'obtient en multipliant chaque terme par l'exposant de x dans ce terme, et diminuant l'exposant d'une unité.

Comme cas particulier, la dérivée de x est 1.

On définit quelquefois en algèbre le polynôme dérivé comme étant le coefficient de la première puissance de h dans le développement du polynôme où l'on remplacerait x par x + h. Il est facile de reconnaître que cela a lieu effectivement.

La définition de la dérivée, donnée plus haut, n'est donc pas contradictoire avec celle qu'on donne en algèbre, mais elle est beaucoup plus générale et s'applique à une fonction quelconque.

Une dérivée étant connue, on peut se proposer de retrouver la *fonction primitive*, c'est-à-dire la fonction dont elle est la dérivée; cette recherche, qui est l'objet du *calcul intégral*, n'est pas susceptible d'une solution générale, tandis que, quelle que soit une fonction donnée, on peut toujours en obtenir la dérivée.

## Des séries.

158. — On appelle *série* une suite indéfinie de termes procédant suivant une loi déterminée.

Si les termes d'une série sont désignés par $u_1$, $u_2$, ... $u_n$, le terme général $u_n$ est fonction de n.

Représentons par Sn la somme des n premiers termes d'une série, savoir :

$$Sn = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Cette somme, de même que $u_n$, sont des fonctions de n. Cela posé, trois cas peuvent se présenter :

1° — Si la somme Sn des n premiers termes tend vers une limite finie et déterminée S, lorsque le nombre n croît indéfiniment, la série est dite convergente.

2° — Dans le cas contraire, c'est-à-dire quand la somme Sn peut croître (en valeur absolue) ou delà de toute limite, la série est dite divergente.

3° — Enfin, s'il arrive que la somme Sn, sans croître au-delà de toute limite, n'ait pas de limite déterminée, la série n'est ni convergente ni divergente ; on l'appelle, dans ce cas, série indéterminée.

Note 1. — Pour ne pas sortir du cadre que nous nous sommes tracé, nous nous contenterons de ces quelques notions sur les dérivées et sur les séries, notions que nous avons crû utile de donner.

2. — Dans ce qui va suivre, nous indiquerons les articles en faisant suivre leurs n[os] des lettres C.D. pour le calcul différentiel, et C.I. pour le calcul intégral.

# CALCUL INTÉGRAL.

1. — Le calcul intégral est l'inverse du calcul différentiel ; son objet est de remonter d'une dérivée ou d'une différentielle donnée à la fonction d'où elle a pu être déduite.

Soit, par exemple, $u = F(x)$ une fonction de la variable $x$ et $f(x)\,dx$ sa différentielle ; par définition, on a $du = f(x)\,dx$. La fonction $u$ est appelée *l'intégrale* de $f(x)\,dx$, et on la représente par le signe $\int f(x)\,dx$.

Une différentielle a une infinité d'intégrales, lesquelles ne diffèrent que par une constante. Si, par exemple, $F(x)$ a pour différentielle $f(x)\,dx$, $F(x) +$ constante sera l'expression la plus générale qui possède cette différentielle. C'est *l'intégrale générale*, ainsi appelée parce que la constante n'est pas déterminée. Ainsi, par exemple,

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + C^{te}.$$

En effet, comme nous avons vu, 5° art. 6, calcul diff., une constante n'a pas de différentielle ou, si l'on veut, a pour différentielle zéro ; donc en intégrant une différentielle on peut ajouter une constante quelconque ; donc une différentielle a une infinité d'intégrales différant par la constante seulement.

Les *intégrales particulières* sont celles qui se déduisent de l'intégrale générale pour une valeur particulière attribuée à la *constante arbitraire*.

On sait toujours différentier une fonction $f(x)$ exprimée au moyen des signes ordinaires de l'analyse. Au contraire, on ne sait que rarement intégrer une différentielle $f(x)\,dx$ prise au hazard. Toutefois, on conçoit que l'intégrale existe toujours, et on peut se proposer ou de la trouver ou d'en connaître les propriétés.

### Intégration des différentielles monomes.

2. — Nous commencerons par le cas le plus simple ; et, à cet effet, nous allons examiner comment on peut trouver l'intégrale de l'expression $x^m dx$. Voici la règle :

*Pour intégrer l'expression $x^m dx$, il faut augmenter l'exposant d'une unité, et diviser par cet exposant ainsi augmenté et par la différentielle.* Ainsi, on aura pour l'intégrale cherchée : $\frac{x^{m+1}}{m+1}$.

En effet, différentions l'expression $x^{m+1}$, nous trouverons, art. 12, calcul différentiel :

$$d.\, x^{m+1} = (m+1)\, x^m\, dx,$$

d'où nous tirerons

$$\frac{d.\, x^{m+1}}{m+1} = x^m\, dx\,;$$

et puisque la constante $m+1$ n'influe pas sur la différentiation, nous pourrons écrire ainsi l'équation précédente

$$d.\, \frac{x^{m+1}}{m+1} = x^m dx\,;$$

donc, la quantité qui, par la différentiation, a donné $x^m\, dx$, est $\frac{x^{m+1}}{m+1}$; C. Q. F. D.

On indique cette opération en plaçant, avant la différentielle, la caractéristique $\int$, qui signifie *somme* ou *intégrale*, de sorte que nous aurons

$$\int x^m\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}. \quad (1).$$

Comme second exemple, soit à intégrer l'expression $\frac{a\, dx}{x^3}$, nous aurons :

$$\int \frac{adx}{x^3} = \int a\, dx\, x^{-3} = \frac{ax^{-3+1}}{-3+1} = \frac{ax^{-2}}{-2} = \frac{a}{-2x^2} = -\frac{a}{2x^2}.$$

Pour troisième exemple, soit à intégrer $\sqrt[3]{x^2}\, dx$, nous aurons

$$\int \sqrt[3]{x^2}\, dx = \int x^{2/3}\, dx = \frac{x^{2/3+1}}{\frac{2}{3}+1} = \frac{x^{5/3}}{\frac{5}{3}} = \frac{3\, x^{5/3}}{5} = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}.$$

3. — Si maintenant nous différentions $a + x^m$, nous obtiendrons $m\,x^{m-1}\,dx$, comme si nous n'eussions différentié que $x^m$, puisqu'une constante n'a pas de différentielle ; par suite, en intégrant, nous devrons restituer une constante à l'intégrale, art. 1. Ainsi, dans les exemples précédents, nous écrirons

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C ; \int \frac{a\,dx}{x^3} = -\frac{a}{2x^2} + C ; \int \sqrt[3]{x^2}\,dx = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + C. \quad (2).$$

Cette constante C, qui disparaît par la différentiation, est quelconque, à moins que la nature du problème ne la détermine, comme dans le cas suivant, par exemple. Soit à intégrer l'expression $a\,dx$ ; on aura

$$\int a\,dx = ax + C,$$

qui est l'intégrale générale, et qui représente une infinité de droites parallèles MN, M'N', M''N'', etc., fig. 59.

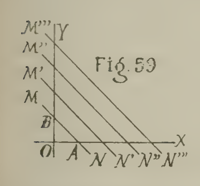


Fig. 59

Mais si dans le problème, l'on n'envisage que la droite MN, déterminée de position, parce qu'elle passe par le point B dont les coordonnées sont $x = o$ et $y = oB = b$, on aura en portant ces coordonnées de B dans l'intégrale générale

$y = ax + C$: $\qquad b = a \times o + C,$

d'où $\qquad C = b$ ;

donc, à la droite AB correspondra l'intégrale particulière

$$y = ax + b ;$$

dans laquelle la constante est déterminée.

4. — Si la nature du problème ne détermine pas la constante, on peut déterminer celle-ci en l'assujettissant à certaines conditions. Ainsi, soit par exemple, la différentielle $adx$ dont l'intégrale générale est

$$y = ax + C.$$

On peut déterminer C de manière que quand $y = o$, $x = b$ ; on fera donc dans l'équation

$$O = a\,b + C, \text{ d'où } C = -ab ;$$

et l'intégrale particulière sera, en substituant cette valeur de C dans l'équation générale :

$$y = ax - ab = a\,(x - b).$$

Et, en effet, les coordonnées $y=0, x=b$, satisfont à cette équation.

5. — Remarque. — La règle exposée à l'art. 2 admet une exception lorsqu'il s'agit d'intégrer $dy=x^m dx$, c'est lorsque dans cette expression on a $m=-1$. En effet, alors la règle conduit à ce résultat

$$y=\frac{x^{-1+1}}{-1+1}+C=\frac{x^0}{0}+C=\frac{1}{0}+C=\infty+C.$$

Donc la règle n'est pas applicable dans ce cas.

Mais alors, on peut recourir à ce procédé : on remarquera que $x^{-1}dx=\frac{1}{x}dx=\frac{dx}{x}$. Or, cette expression est la différentielle de $\log x$, (art. 28. cal. diff.) ; donc, nous aurons

$$\int x^{-1}dx=\int\frac{dx}{x}=\log x+C. \quad (3).$$

### Intégration des différentielles polynomes, ainsi que des différentielles complexes dont l'intégration peut s'effectuer par la règle exposée à l'article 2.

6. — De même que la différentielle d'un polynôme est composée de la somme des différentielles de ses termes, art. 15, C. D, de même *l'intégrale d'un polynôme est égale à la somme des intégrales des termes qui le composent.*

Par exemple,

$$\int\left(x^m dx+\frac{adx}{x^3}-dx.\sqrt[3]{x^2}\right)=\int x^m dx+\int\frac{adx}{x^3}-\int dx\times\sqrt[3]{x^2}+C=(\text{article } 2.)=\frac{x^{m+1}}{m+1}+\left(-\frac{a}{2x^2}\right)-\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+C.$$

Remarquons que nous n'avons mis ici qu'une constante, quoique chaque terme donne une constante à l'intégration ; mais la lettre C représente ici la somme de ces constantes partielles.

7. — *Tout polynôme, tel que $(a+bx-cx^2+dx^3\ldots$ etc.$)^m dx$, peut s'intégrer par la même règle, lorsque m est un nombre entier positif.* A cet effet, il suffit d'élever le polynôme à la puissance m et nous retombons sur la règle précédente, c'est-à-dire qu'il faudra ensuite intégrer chaque terme séparément.

Ainsi, par exemple, si l'on veut integrer $(a + bx)^2 dx$, nous aurons

$$\int (a+bx)^2 dx = \int (a^2 + 2abx + b^2x^2) dx = \int (a^2 dx + 2abx\,dx + b^2x^2\,dx) = a^2x + abx^2 + \frac{b^2x^3}{3} + C.$$

8. — *Lorsque la différentielle à intégrer est sous la forme $(Fx)^m d.Fx$, c'est-à-dire lorsqu'elle est composée de deux facteurs dont l'un est la différentielle de la partie Fx qui est comprise entre parenthèses, on posera $Fx=z$, et par suite $d.Fx=dz$ ; on substituera ces valeurs dans l'expression de la différentielle et l'on intégrera par la règle ordinaire, art. 2, on remplacera ensuite dans le résultat z et dz par leurs valeurs.*

Ainsi, l'on aura donc :

$$(Fx)^m d.Fx = z^m dz,$$

$$\int (Fx)^m d.Fx = \int z^m dz = \frac{z^{m+1}}{m+1} + C = \frac{(Fx)^{m+1}}{m+1} + C \; ; \quad (4).$$

*Exemple.* — Soit à intégrer $(a+bx-cx^2)^2 (bdx-2cxdx)$. On voit que $bdx-2cx\,dx$ est la différentielle de $a+bx-cx^2$ car la constante a n'a pas de différentielle. Conformément à la rêgle précédente, on fera donc

$$a + bx - cx^2 = z, \text{ d'où } bdx - 2cx\,dx = dz \; ;$$

et l'expression donnée deviendra

$$z^2\,dz.$$

En intégrant on aura

$$\int z^2\,dz = \frac{z^3}{3} + C.$$

Et en remplaçant z et dz par leurs valeurs, il viendra $\int (a + bx - cx^2)^2 d(a + bx - cx^2)$, ou, en effectuant la différentiation dans le second facteur,

$$\int (a + bx - cx^2)^2 (bdx - 2cx\,dx) = \frac{(a+bx-cx^2)^3}{3} + C.$$

9. — *De même, si l'un des facteurs est la différentielle de l'autre, à une constante près, l'on emploie le même procédé que ci-dessus.*

Ainsi, par exemple, soit à intégrer

$$(a - cx^2)^{1/2}.\ 3\,x\,dx.$$

La diffèrentielle de F (x) ou de $(a-cx^2)$ étant $-2\,cxdx$,

on voit que cette différentielle diffère de 3 x dx par la constante qui est — 2 c au lieu d'être 3.

Néanmoins, nous poserons, comme à l'art. précédent, $a-cx^2=z$ et par suite $-2\,cx\,dx=dz$, d'où nous tirerons $xdx=-\frac{dz}{2c}$.

Substituant ensuite ces valeurs dans l'expression donnée, nous aurons

$$(a-cx^2)^{1/2}.3\,x\,dx=z^{1/2}.\,3.\left(-\frac{dz}{2c}\right)=-\frac{3}{2c}z^{1/2}\,dz;$$

et en intégrant, l'on aura

$$\int(a-cx^2)^{1/2}.\,3\,x\,dx=\int\left(-\frac{3}{2c}z^{1/2}dz\right)=-\frac{3}{2c}\frac{z^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=-\frac{3}{2c}\frac{z^{3/2}}{\frac{3}{2}}+C=-\frac{3}{2c}\times\frac{2}{3}\times z^{3/2}+C=-\frac{1}{c}z^{3/2}+C.$$

Et en remplaçant z par sa valeur, on aura enfin

$$\int(a-cx^2)^{1/2}\,3\,x\,dx=-\frac{1}{c}(a-c\,x^2)^{3/2}+C.$$

10. — *Le même procédé pourrait s'appliquer pour rapporter l'intégrale de certaines différentielles à des logarithmes.*

Ainsi, par exemple, si l'on avait à intégrer $\frac{dx}{a+bx}$, et qu'on voulut que l'intégrale se rapportât à des logarithmes, on ferait $a+bx=z$, d'où $bdx=dz$, donc $dx=\frac{dz}{b}$.

Substituant ces valeurs dans l'expression ci-dessus, on aurait

$$\int\frac{dx}{a+bx}=\int\frac{dz}{b}:z=\int\frac{1}{b}\frac{dz}{z}=\text{art. }28=\int\frac{1}{b}d.\ \log z.=\frac{1}{b}\log z+C=\frac{1}{b}\log(a+bx)+C,\ (5).$$

### Intégration par arcs de cercle.

11. — On a d'abord

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\text{arc}\,(\sin=x),\ (6),$$

c'est-à-dire égale l'arc dont le sinus est x.

En effet, soient, fig. 60, l'arc $BC = z$ et son sinus $CE = x$, sinus rapporté au rayon pris comme unité.

Nous avons donc, par hypothèse, $x = \sin z$. En différentiant cette expression, nous aurons d'après l'art. 30, formule 42, C.D.

$$dx \text{ ou } d \sin z = \cos z \, dz, \text{ d'où } dz = \frac{dx}{\cos z}.$$

Or, d'après la trigonométrie, nous avons $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, d'où

$$\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Substituant cette valeur dans celle de $dz$, nous aurons

$$dz = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Donc, en intégrant, nous trouverons

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int dz = z + \text{Constante} = z + C. \quad (7).$$

Si nous voulons déterminer cette constante, nous remarquerons que quand $x = 0$, on peut poser

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

et arc $BC$ ou $z = 0$;

substituant ces valeurs particulières dans l'équation (7) laquelle doit être vérifiée, nous aurons

$$0 = 0 + C \text{ ; d'où } C = 0.$$

Donc la constante est nulle dans ce cas particulier et par conséquent aussi dans la formule générale, et l'on a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = z + 0 = z \text{ ;}$$

et comme $x = \sin z$, ou par suite, $z =$ l'arc dont le sinus égal $x$, on a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc}\,(\sin = x). \quad (8).$$

*Remarque*, — Dans la démonstration précédente, nous avons pris le rayon égal à l'unité ; si ce rayon est pris égal à $a$, soit $x'$ le sinus correspondant à ce rayon $a$ et au même arc $z$ ; par la trigonométrie, nous savons que pour un même nombre de degrés, les sinus sont entr'eux comme les rayons correspondants ; nous avons donc

$$x : x' :: 1 : a, \text{ d'où } x = \frac{x'}{a}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (8), nous obtiendrons pour le premier membre

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{d.\frac{x'}{a}}{\sqrt{1-\frac{x'^2}{a^2}}} = \int \frac{d.\frac{1}{a}x'}{\sqrt{\frac{a^2-x'^2}{a^2}}} = \int \frac{\frac{1}{a}dx'}{\frac{\sqrt{a^2-x'^2}}{a}},$$

(art. 6, 4°) $= \int \frac{dx'}{\sqrt{a^2-x'^2}}$;

et pour le second nombre on aura arc $\left(\sin = \frac{x'}{a}\right)$.

Par conséquent en égalant les deux membres ainsi transformés, on obtient

$$\int \frac{dx'}{\sqrt{a^2-x'^2}} = \text{arc}\left(\sin = \frac{x'}{a}\right).$$

Et, en représentant par x le sinus dont le rayon est a, nous pourrons supprimer l'accent de x dans l'équation précédente qui deviendra

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{arc}\left(\sin = \frac{x}{a}\right).(9).$$

12. — On a aussi :

$$\int - \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc}\,(\cos = x).\ (10).$$

En effet, soit z' l'arc CD, dont le cosinus AF est égal à x, le rayon étant pris pour unité, fig. 60, nous aurons ainsi

$$x = \cos z',$$

et, en différentiant, art. 31, calc. diff., nous obtiendrons

$$dx = d \cos z' = - dz' \sin z',$$

d'où,

$$dz' = - \frac{dx}{\sin z'};$$

et, en remplaçant dans cette expression sin z' par sa valeur $\sqrt{1-\cos^2 z'}$ tirée de l'équation $\sin^2 z' + \cos^2 z' = 1$, nous aurons

$$dz' = - \frac{dx}{\sqrt{1-\cos^2 z'}},$$

ou, puisque $\cos z' = x$, voir ci-dessus, nous obtiendrons

$$d\,z' = - \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

et, en intégrant, il vieudra

$$\int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int dz' = z' + C = \text{l'arc dont le cos égale}$$

x, + C = arc (cos = x) + C. (11).

Déterminons la constante C ; pour cela, prenons le cas particulier où, (fig. 60), le cosinus C E = x se réduit à zéro au point B ; alors l'arc CD ou z' qui est représenté par l'expression générale

$$\int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

devient alors DB $= \frac{\text{circonférence}}{4} = \frac{1}{2}\pi$.

Faisons donc $\int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\pi$ et $x = 0$ dans l'équation (11), il viendra

$$\frac{1}{2}\pi = \text{arc}\ (\cos = 0) + C.\ (12).$$

Mais l'arc dont le cosinus est zéro est égal à $\frac{1}{2}\pi$, donc C doit égaler zéro d'après cette équation (12). Mettant cette valeur dans l'équation générale (11), nous aurons enfin

$$\int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc}\ (\cos = x)\ (13).$$

*Remarque.* — Dans le cas où le rayon au lieu d'être l'unité, serait a, le cosinus x serait $\frac{x}{a}$, et en remplaçant partout x par $\frac{x}{a}$ dans l'équation (13), comme à la remarque de l'article précédent, nous aurons dans le cas où le rayon est a :

$$\int -\frac{d\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \text{ ou } \int -\frac{dx}{a\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}}} \text{ ou } \int -\frac{dx}{\frac{a\sqrt{a^2-x^2}}{a}} \text{ ou}$$

$$\int -\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{arc}\left(\cos = \frac{x}{a}\right)\ (14).$$

13. — On a également

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc dont la tang. est } x\ .\ (15).$$

En effet, on sait, art. 32, C.D., qu'on a

$$d. \tang x = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Posons x = tang. d'un arc z, nous aurons,

$$dx = d \tang z = (\text{art. } 32) = \frac{dz}{\cos^2 z}.$$

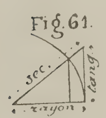
d'où $$dz = dx \times \cos^2 z. \quad (16).$$

Or, la trigonométrie nous donne

$$\cos z : 1 :: 1 : \text{séc. } z,$$

d'où $\cos z = \dfrac{1}{\text{séc. } z}$, ou $\cos^2 z = \dfrac{1}{\text{séc}^2 z} = \dfrac{1}{1 + \tang^2 z}$ comme l'indique la fig. 61, le rayon étant l'unité.

Mais $\tang^2 z = x^2$ comme nous avons vu, donc




$$\cos^2 z = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (16), nous aurons

$$dz = dx \times \frac{1}{1 + x^2} = \frac{dx}{1 + x^2},$$

et en intégrant, il viendra

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \int dz = z + C. \quad (17).$$

Pour déterminer la constante C, supposons le cas où x = tang z = 0, d'où z = 0, alors l'intégrale s'évanouit et l'on a $0 = 0 + C$ ; d'où $C = 0$,

donc, enfin, la formule (17) devient

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = z + 0 = z = \text{arc dont la tang est } x. \quad (18).$$

*Remarque.* — Le rayon a été pris pour unité dans la démonstration précédente, s'il était égal à a, il faudrait remplacer partout x par $\frac{x}{a}$ dans l'équation (18) comme dans la remarque de l'art. 11, C. I., on aurait ainsi,

$$\int \frac{d. \frac{x}{a}}{1 + \frac{x^2}{a^2}} \text{ ou } \int \frac{d.x}{a\left(\dfrac{a^2 + x^2}{a^2}\right)} \text{ ou } \int \frac{dx}{\dfrac{a^2 + x^2}{a}} \text{ ou } \int a \frac{dx}{a^2 + x^2} =$$

arc dont la tang est $\frac{x}{a}$ ; ou $a \int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \text{arc}\left(\tang = \dfrac{x}{a}\right)$

comme une constante a peut-être mise en dehors de l'intégrale ; ou $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x}{a}\right)$. (19)

14. — On sait qu'on appelle sinus verse d'un arc CD ou z', par exemple, fig. 60, la partie DF du rayon, partie comprise entre le pied F du sinus CF et l'origine D de l'arc ou extrémité de ce rayon ; il équivaut au rayon diminué du cosinus.

Cela étant, on a la formule

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \text{arc (sinus verse} = x). \ (20).$$

En effet, soit x le sinus verse DF. Comme le sinus verse augmenté du cosinus donne pour somme le rayon, on a

$$x+\cos z' = 1,$$

d'où $dx+d\cos z'=d.\,1=0$ ; donc $dx=-d\cos z'$ ;
et comme, art. 31, $-d\cos z' = dz' \sin z'$, il vient :

$$dx = dz' \sin z',$$

d'où

$$dz' = \frac{dx}{\sin z'}. \ (21).$$

Mais de $\sin^2 z' + \cos^2 z' = 1$, (trig.), on tire

$\sin z' = \sqrt{1-\cos^2 z'} = \sqrt{(1-\cos z')(1+\cos z')}$. (22).

Or, nous avons vu que $x+\cos z'=1$, donc $1-\cos z'=x$ ; de l'équation précédente on tire $\cos z'=1-x$, donc $1+\cos z'=1+1-x=2-x$ ; substituant ces valeurs de $1-\cos z'$ et de $1+\cos z'$ dans l'équation (22), il vient

$$\sin z' = \sqrt{x(2-x)} = \sqrt{2x-x^2}.$$

Substituant maintenant cette valeur de sin z' dans l'équation (21), nous obtiendrons

$$dz' = \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}},$$

et en intégrant, nous aurons

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int dz' = z' = \text{l'arc dont le sinus verse est } x ;$$

donc plus simplement

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \text{arc (sin verse} = x) + C. \ (23).$$

Pour déterminer la constante C, remarquons que dans le cas ou l'intégrale s'évanouit quand le sinus verse x est nul, l'arc z' est aussi nul, et par suite on a

$$o = o + C, \text{ d'où } C = o.$$

Mettant cette valeur dans l'équation (23), nous aurons enfin

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = \text{arc (sin verse} = x). \ (24).$$

*Remarque.* — Le rayon a été pris pour unité ; dans le cas où il serait a, il faudrait, dans la formule (24), remplacer partout x par $\frac{x}{a}$, remarque art. 11, et l'on aurait :

$$\int \frac{d\frac{x}{a}}{\sqrt{2\frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2}}} \text{ ou } \int \frac{d.\frac{x}{a}}{\frac{\sqrt{2ax - x^2}}{a}} \text{ ou } \int \frac{d.\frac{1}{a}x}{\frac{\sqrt{2ax - x^2}}{a}} \text{ ou}$$

$$\int \frac{\frac{1}{a}dx}{\frac{\sqrt{2ax - x^2}}{a}} \text{ ou } \int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = \text{arc}\left(\text{sin verse} = \frac{x}{a}\right).$$

Donc l'équation (24) devient dans le cas du rayon = a,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = \text{arc}\left(\text{sin verse} = \frac{x}{a}\right). \ (25).$$

15. — Voici comment on pourrait calculer la valeur d'une intégrale, par exemple celle de $\frac{dx}{1 + x^2}$, art. 13, C. I., lorsque l'on donne à x une valeur déterminée. Soit, par exemple, x = 7, le rayon étant l'unité, la tangente qui est x sera donc 7 ; et puisque les tables des lignes trigonométriques sont construites avec un rayon de dix milliards de parties, la tangente relative à ce rayon sera dix milliards de fois plus grande ; par suite cette tangente vaudra 7 × 10 milliards.

Le logarithme de la tangente tabulaire aura donc pour expression

log 10 milliards + log 7 = 10 + log 7 = 10 + 0,845098 = 10,845098.

Si nous cherchons ce logarithme dans les tables des tangentes, nous verrons qu'il correspond à un arc de

$90^\circ 96'$ division décimale, c'est-à-dire avec la circonférence divisée en 400 degrés ; le degré
ou de en 100 minutes, etc.
$81^\circ 52'$ division sexagésimale, ou circonf. divisée en 360 degrés, le degré en 60 minutes, etc.

Pour trouver la valeur numérique de cet arc, dans l'hypothèse du rayon égal à l'unité, nous remarquerons d'abord que dans cette hypothèse, la circonférence égale 6,283.... ; par suite, nous aurons

$400^\circ : 90^\circ 96' :: 6,283... :$ arc cherché, d'où arc $= 1,42....$ ;
ou
$360^\circ : 81^\circ 52' :: 6,283... :$ arc cherché, d'où arc $= 1,42....$

## Méthodes d'intégration.

Nous exposerons quatre méthodes d'intégration, savoir : intégration par parties ; intégration par les séries, (art. 158, C. D) ; intégration des fractions rationnelles, et intégration des fractions irrationnelles.

### 1°. — Intégration par parties.

16. — Les différentielles que l'on veut intégrer par parties sont rapportées à la formule

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (26) ;$$

que l'on obtient en prenant la différentielle du produit des deux variables u et v par le procédé indiqué à l'article 9, C.D., puis en intégrant et transposant ; donc on fait

$$d. u v = u dv + v du. ;$$

$$\int duv = \int udv + \int vdu, \text{ ou } uv = \int udv + \int vdu ;$$

d'où $\int udv = uv - \int vdu.$ C.Q.F,D.

17. — *Exemple 1.* — Soit à chercher l'intégrale de $x^m dx$. Faisons $x^m = u$, $dx = dv \therefore x = v$ ; on a

$$uv = x^m \times x = x^{m+1},$$

$$v\,du = x\,d.x^m = x \times mx^{m-1}\,dx.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (26), nous aurons

$$\int x^m dx = x^{m+1} - \int x . mx^{m-1} dx = x^{m+1} - m \int x^m dx ;$$

et en réunissant les intégrales affectées de $x^m dx$, il viendra

$$\int x^m dx + m \int x^m dx = x^{m+1} \text{ ou } (m+1) \int x^m dx = x^{m+1} ;$$

d'où

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$$

*Exemple II.* — Soit à trouver l'intégrale suivante :

$$\int dx \log. x.$$

Faisons $\log x = u$ ; $dx = dv \therefore x = v$ ; et $uv = x \log x$.

On aura d'après la formule (26),

$\int \log x\, dx$ ou $\int dx \log x = x \log x - \int x\, d. \log x = x \log x - \int x \frac{dx}{x}$, art. 28, $= x \log x - \int dx = x \log x - x + C = x(\log x - 1) + C$ ; ce qui est l'intégrale cherchée.

*Exemple III.* — Soit encore à trouver l'intégrale de $dx \sqrt{a^2 - x^2}$.

Faisons $\sqrt{a^2 - x^2} = u$ ; $dx = dv \therefore x = v$ ; $uv = x\sqrt{a^2 - x^2}$, nous aurons donc, d'après la formule (26) :

$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ ou $\int dx \sqrt{a^2 - x^2} = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int x\, d\sqrt{a^2 - x^2} = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int x d(a^2 - x^2)^{1/2} = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int x \left[\left(\frac{1}{2}(a^2 - x^2)^{-1/2} d(a^2 - x^2)\right)\right] = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int x \left[\frac{1}{2} \frac{d.(a^2 - x^2)}{(a^2 - x^2)^{1/2}}\right] = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{x\, d(a^2 - x^2)}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{x(-2xdx)}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{-2x^2 dx}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int - \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. (27).

Cherchons maintenant une autre valeur de $\int dx \sqrt{a^2 - x^2}$.

Pour cela multipliant cette expression par $\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, ce qui ne la changera pas de valeur car ce facteur est égal à l'unité ; nous aurons l'équation identique

$$\int dx \sqrt{a^2 - x^2} = \int \frac{dx \sqrt{a^2 - x^2}\, \sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{dx(a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{dx\, a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \frac{dx\, x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

en effectuant la première des intégrations indiquées dans le second membre, nous aurons art. 11, remarque :

$$\int dx\sqrt{a^2-x^2} = a^2 \text{arc}\left(\sin = \frac{x}{a}\right) - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Ajoutant cette équation à l'équation (27), nous aurons :

$$2\int dx\sqrt{a^2-x^2} = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \text{ arc}\left(\sin = \frac{x}{a}\right);$$

donc enfin

$$\int dx\sqrt{a^2-x^2} = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2}a^2 \text{arc}\left(\sin = \frac{x}{a}\right) + C.$$

18. — *Remarque.* — Ces trois exemples nous montrent que lorsqu'en général on a une expression telle que $\int$ vdu, l'intégration par parties, fait dépendre cette intégrale de celle de $\int$ udv, et que, par suite, cette méthode d'intégration n'est pas toujours applicable.

## 2°. Intégration par les séries, (art. 158, C. D.)

19. — Soit une différentielle représentée par l'expression générale X dx, expression dans laquelle X représente une fonction de x. Développons X et représentons ce développement par la suite

$$Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + Dx^\delta + Ex^\varepsilon + \text{etc.},$$

ordonnée par rapport aux expressions $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, etc.

D'après les articles 2 et 6, nous aurons

$$\int X\,dx = \int (Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + Dx^\delta + Ex^\varepsilon + \text{etc.})\,dx =$$

$$\frac{Ax^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{Bx^{\beta+1}}{\beta+1} + \frac{Cx^{\gamma+1}}{\gamma+1} + \frac{Dx^{\delta+1}}{\delta+1} + \frac{Ex^{\varepsilon+1}}{\varepsilon+1} + \text{etc.} + C. (28).$$

C'est de cette manière, que par la méthode d'intégration par les séries, on cherche l'intégrale d'une différentielle donnée, en la mettant sous la forme X dx, en faisant le développement de l'expresion représentée par X, en multipliant par dx, puis en intégrant chaque terme en particulier.

*Remarque.* — Si l'un des exposants $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, etc., était égal à $-1$, on intégrerait par logarithmes, voir art. 5, C.I., le terme qui en serait affecté.

20. — Comme application de cette méthode, cherchons l'intégrale de $\frac{dx}{a+x}$, expression qui d'après l'art. 28, C. D., est la différentielle de $\log(a+x)$ ; car $d.\log(a+x) = \frac{d(a+x)}{a+x} = \frac{dx}{a+x}$.

Conformément à la méthode, écrivons donc l'expression donnée sous la forme $\frac{1}{a+x} \times dx$, et il faudra d'abord trouver le développement de $\frac{1}{a+x}$, ce que l'on pourrait obtenir au moyen de la division ; mais nous pouvons aussi le déduire de la formule suivante, facile à retenir, et dont le développement s'obtient par la division de 1 par $1-z$ :

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \text{etc.}\dots (29).$$

Si nous changons z en $-\frac{x}{a}$ dans cette équation, nous aurons :

$$\frac{1}{1+\frac{x}{a}} = 1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^3}{a^3} + \text{etc.}$$

Multiplions les deux termes du premier membre de cette équation par a, et divisons ensuite toute l'équation par a, nous aurons pour le développement cherché :

$$\frac{a}{a+x} : a \text{ ou } \frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \text{etc.}\dots (30).$$

Par conséquent

$$\int \frac{1}{a+x}dx \text{ ou } \int \frac{dx}{a+x} = \int \left(\frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \text{etc.}\right) dx ;$$

et, en intégrant chaque terme en particulier, nous obtiendrons, en observant que $\int \frac{1}{a}dx = \frac{1}{a}x = \frac{x}{a}$ et que $\int \frac{x^m dx}{a^n} = \int \frac{1}{a^n} x^m dx = \frac{1}{a^n} \frac{x^{m+1}}{m+1} = \frac{x^{m+1}}{(m+1)a^n}$ donc

$$\int \frac{dx}{a+x} = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \text{etc.}\dots + C. (31).$$

Remplaçons le premier membre de cette équation par $\log(a+x)$, intégrale trouvée en faisant $b=1$, dans la formule générale de l'article 10, C.I., nous aurons la série :

$$\log(a+x) = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \text{etc}\ldots + C. (32).$$

Pour déterminer la constante, remarquons que dans le cas particulier où $x=0$, cette équation se réduit à $\log a = 0 + C$, donc $C = \log a$.

Substituant cette valeur de C dans l'équation (32), nous obtiendrons enfin

$$\log(a+x) = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \text{etc}\ldots + \log a. (33).$$

*Remarque.* — En déterminant la constante comme nous venons de le faire, nous ne la regardons plus comme arbitraire, attendu qu'elle est nécessairement égale au logarithme de a, dans le cas particulier où l'on fait $x=0$, dans l'équation (32). Cette constante a pris une valeur déterminée lorsqu'au lieu de $\int \frac{dx}{a+x}$, nous avons mis $\log(a+x)$, en prenant le cas particulier où $b=1$ dans la formule générale de l'art. 10. Et, en effet, l'équation (31) montre que $\frac{dx}{a+x}$ est, en général, la différentielle de $\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \text{etc.} + C$; or la suite $\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \text{etc.} + \log a$, éq. (33), qui est le développement de $\log(a+x)$, est un cas particulier de la suite (32), c'est celui où $x=0$ et par suite où $C = \log a$. Par conséquent, lorsque nous avons mis $\log(x+a)$ à la place de $\int \frac{dx}{a+x}$, c'est comme si nous eussions pris parmi toutes les suites qui sont l'intégrale de $\frac{dx}{a+x}$, celle où la constante est égale à log. a.

Cette remarque est applicable aux autres expressions que nous allons intégrer par les séries

21. — Cherchons encore l'intégrale de $\frac{dx}{1+x^2}$.

Pour cela, mettons cette différentielle sous la forme $\frac{1}{1+x^2} \times dx$, conformément à l'art. 19, C.I. Nous devons trouver maintenant, même art., le développement de $\frac{1}{1+x^2}$. A cet effet, posons $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-z}$, expression dont nous

avons déjà le développement, éq. (29), art. 20. C.I. Nous avons donc $z = -x^2$. Substituant cette valeur dans l'équation (29), nous aurons pour le développement de $\frac{1}{1+x^2}$.

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \text{etc. (34).}$$

Par suite

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int (1 - x^2 + x^4 - \text{etc.})\, dx = \int (dx - x^2 dx + x^4 dx - \text{etc.}) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \text{etc...} + C. \text{ (35).}$$

Or, art. 13, éq. (18), CI, nous savons que $\int \frac{dx}{1+x^2} =$ arc (tang $= x$), et en substituant cette valeur dans le premier membre de l'équation (35), nous aurons

$$\text{arc (tang} = x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \text{... etc...} + C. \text{ (36).}$$

Dans le cas particulier où $x = 0$, l'arc devenant nul, nous avons $0 = 0 + C$ ; donc, la constante $C = 0$.

Si la tangente x est plus grande que l'unité, les termes de cette série allant en augmentant, nous ne pourrons donner une valeur approchée de l'arc. Mais, dans ce cas, nous obtiendrons une série descendante en faisant $x = \frac{1}{x}$ dans l'équation (34), ce qui la changera en celle-ci :

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^6} + \text{etc. ;}$$

multipliant ensuite les deux termes du premier membre par $x^2$, nous aurons

$$\frac{x^2}{x^2 + 1} = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^6} + \text{etc. ;}$$

divisant les deux membres par $x^2$, il viendra

$$\frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} + \text{etc. ;}$$

donc

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} + \text{etc.}\right) dx \text{ ;}$$

et en effectuant l'intégration, nous aurons

$$\text{arc (tang} = x) = \int\left(\frac{1}{x^2}\,dx - \frac{1}{x^4}\,dx + \frac{1}{x^6}\,dx - \frac{1}{x^8}\right.$$
$$\left. dx + \text{etc.}\right) = \int(x^{-2}\,dx - x^{-4}\,dx + x^{-6}\,dx - x^{-8}\,dx + \text{etc.}) =$$
$$\frac{x^{-1}}{-1} - \frac{x^{-3}}{-3} + \frac{x^{-5}}{-5} - \frac{x^{-7}}{-7} + \text{etc.} = -\frac{1}{x^1} - \left[\left(\frac{1}{x^3} : -3\right) \text{ou} - \right.$$
$$\left.\frac{1}{3x^3}\right] + \left(\frac{1}{x^5} : -5 \text{ ou } - \frac{1}{5x^5}\right) - \text{etc.} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} -$$
$$\frac{1}{5x^5} + \text{etc} .. + C. \ (37).$$

Pour trouver la valeur de la constante, nous ne pouvons pas faire, comme précédemment, $x = 0$, car ainsi nous rendrions infinis les termes du second membre de l'équation (37) ; mais si nous faisons $x = \infty$ l'expression arc (tang $= x$) sera égale au quart de la circonférence, arc dont la tangente est infinie ; alors l'équation (37) deviendra $\frac{1}{4}$ circonf. $= -\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty} - \text{etc}... + C = 0 + C$; donc $C = \frac{1}{4}$ de la circonférence, que l'on représente par $\frac{1}{2}\pi$ ; par conséquent l'équation (37) nous donnera

$$\text{arc (tang} = x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \text{etc}... + \frac{1}{2}\pi. \ (38).$$

22. — Soit encore à intégrer, par les séries, l'expression :

$$\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \text{ ou } (1 - x^2)^{-1/2}\,dx.$$

A cet effet, nous développerons $(1 - x^2)^{-1/2}$ par la formule du binôme, laquelle est

$$(a - b)^m = a^m - \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2 + . ..\text{etc}.. + b^m;$$

il suffit, pour cela, de remplacer dans cette formule $a$ par $1$, $b$ par $x^2$ et $m$ par $-\frac{1}{2}$; nous aurons ainsi :

$$(1 - x^2)^{-1/2} = 1^{-1/2} - \left(-\frac{1}{2}1^{-3/2}\,x^2\right) + .... \text{ etc. ;}$$

$$\text{ou } \frac{1}{(1 - x^2)^{1/2}} = \frac{1}{1^{1/2}} - \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1^{3/2}}x^2\right) + ... \text{ etc. ;}$$

ou $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1}} - \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1^3}}x^2\right) + \dots$ etc. ; donc :

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \dots \text{ etc. }\right)dx,$$

et, en intégrant, nous obtiendrons

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \left(dx + \frac{1}{2}x^2\,dx + \text{etc.}\dots\right)$$

ou art. 11,

$$\text{arc}\,(\sin = x) = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + \text{etc.}\Big) (39).$$

Nous ne mettons pas de constante, attendu que lorsque $x = 0$, l'arc dont le sinus est x s'évanouit, et par suite, nous aurions $0 = 0 + C$ ou $C = 0$.

23. — La formule (39) que nous venons d'obtenir peut nous permettre de trouver une valeur approchée de la circonférence. A cet effet, faisons dans cette formule $x = \frac{1}{2}$, elle se réduit à

$$\text{arc}\left(\sin = \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} + \text{etc.}\ ;$$

or, le sinus qui est exprimé par $\frac{1}{2}$ étant égal à la moitié du côté de l'hexagone régulier, et par suite, ce sinus répondant à la douzième partie de la circonférence, nous aurons

donc $\frac{1}{12}$ circonférence $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{1}{5}.\frac{1}{2^5} + \text{etc.}$ ;

par conséquent

$$\text{circonférence} = 12\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{1}{5}.\frac{1}{2^5} + \text{etc.}\right)$$

24. — La formule (33) de l'article 20, CI., en lui faisant subir quelques modifications, peut servir à calculer les logarithmes. Pour cela, comme cette série est peu convergente, faisons-y $x = -x$,

nous aurons

$$\log(a - x) = \log a - \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^3}{3a^3} - \text{etc.}\ ;$$

retranchons cette dernière équation de l'équation (33), nous obtiendrons

$$\log (a + x) - \log (a - x) = 2\left(\frac{x}{a} + \frac{x^3}{3a^3} + \text{etc.}\right);$$

$$\text{ou } \log\left(\frac{a+x}{a-x}\right) = 2\left(\frac{x}{a} + \frac{x^3}{3a^3} + \text{etc.}\right), (40);$$

telle est la formule que nous pourrons employer pour déterminer les logarithmes.

Ainsi, par exemple, si nous voulons calculer le logarithme de 2, nous poserons $\frac{a+x}{a-x} = \frac{2}{1} = 2$, et ainsi le logarithme de $\frac{a+x}{a-x}$ sera le logarithme de 2. Il suffira donc de déterminer à l'aide de $\frac{a+x}{a-x} = \frac{2}{1}$, les valeurs de a et de x que nous substituerons dans le second membre de l'équation (40) ; en faisant $a+x = 2$ et $a-x = 1$, on connaît la la somme et la différence de deux nombres et le plus grand $a = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, le plus petit $x = \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ; on aura ensuite $\frac{x}{a} = \frac{1}{2} : \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ ; $\frac{x^3}{3a^3} = \frac{1}{8} : \frac{3 \times 27}{8} = \frac{1}{8} \times \frac{8}{3.27} = \frac{1}{3 \times 27} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{27}$ ; etc.

Substituant dans l'équation (40) on aura

$$\log. 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} . \frac{1}{27} + \text{etc.}\right).$$

Si nous nous bornions aux dix premiers termes de cette série, réduite en décimales, nous déterminerions la valeur du logarithme de 2 ; en doublant ce logarithme, nous aurions celui de $2^2$ ou de 4, etc. Si nous calculions par la formule (40), le logarithme de $\frac{10}{4}$ et que nous ajoutions à ce logarithme celui de 4, nous aurions le logarithme de $\frac{10}{4} \times 4 =$ log 10. Par des procédés analogues, la formule (40) nous donnerait tout autre logarithme.

Il est à observer que les logarithmes que nous obtiendrions ainsi seraient des logarithmes népériens, car la formule (33) de l'art. 20, CI, a été obtenue en nous basant sur la dernière formule de l'art. 28, CD, obtenue en prenant

les logarithmes dans le système Népérien ; que nous représenterions par le signe log.

Pour déduire des logarithmes précédents, les logarithmes tabulaires, c'est-à-dire dont la base est 10, en représentant par L a le logarithme tabulaire d'un nombre a, nous aurons $a = 10^{La}$, art. 26, C.D. ; prenant les logarithmes Népériens, cette équation nous donne

$$\log a = \log (10^{La}) = \log 10 . La ;$$

par suite, le logarithme tabulaire

$$La = \frac{\log a}{\log . 10} ;$$

formule qu'on peut exprimer en disant qu'un logarithme tabulaire représenté par L d'un membre a est égal au logarithme Népérien représenté par log de ce nombre, divisé par le logarithme Népérien de 10.

### 3°. Intégration par la méthode des fractions rationnelles.

25. — Tout d'abord nous allons démontrer que lorsqu'on doit intégrer une expression telle que

$$\frac{Px^m + Qx^{m-1} + \ldots + Rx + S}{P'x^n + Q'x^{n-1} + \ldots + R'x + S'} dx,$$

ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de x, et dans laquelle le multiplicateur de dx est une fraction rationnelle, on peut toujours supposer que n surpasse m ; car, si cela n'était pas, on pourrait ramener l'intégrale de cette expression à celle d'une autre différentielle de même forme, dans laquelle la plus haute puissance de x du dénominateur surpasserait la plus haute puissance de x du numérateur.

En effet, pour cela, il suffirait d'effectuer la division comme dans l'exemple suivant :

Soit l'expression particulière,

$$\frac{Px^3 + Qx^2 + Rx + S}{Q'x^2 + R'x + S'} ;$$

en divisant d'abord tous les termes par le coefficient Q' du premier terme (plus haute puissance de x) du dénominateur, nous aurons

$$\frac{\frac{P}{Q'}x^3 + \frac{Q}{Q'}x^2 + \frac{R}{Q'}x + \frac{S}{Q'}}{x^2 + \frac{R'}{Q'}x + \frac{S'}{Q'}};$$

faisant $\frac{P}{Q'} = P'', \frac{Q}{Q'} = Q'', \frac{R}{Q'} = R'', \frac{S}{Q'} = S'', \frac{R'}{Q'} = R''', \frac{S'}{Q'} = S''',$

et substituant, nous obtiendrons

$$\frac{P''x^3 + Q''x^2 + R''x + S''}{x^2 + R'''x + S'''}.$$

On effectuera ensuite la division indiquée, par cette expression, de la manière suivante :

$$\begin{array}{l|l} P''x^3 + Q''x^2 + R''x + S'' & x^2 + R'''x + S''' \\ -P''x^3 - R'''P''x^2 - P''S'''x & P''x + M \\ \hline \text{1}^{\text{er}} \text{ reste } (Q'' - R'''P'')x^2 + (R'' - P''S''')x + S'' & \end{array}$$

représentons par M et par N les coefficients de $x^2$ et de x, dans ce premier reste, il deviendra

$$\begin{array}{ll} & Mx^2 + Nx + S'' \\ \text{suite de la division} & -Mx^2 - MR'''x - MS''' \\ \hline \text{second reste} & (N - MR''')x + S'' - MS''' \end{array}$$

On peut représenter ce dernier reste par $Kx + L$, K égalant $N - MR'''$ et L égalant $S'' - MS'''$, et alors il viendra

$$\frac{Px^3 + Qx^2 + Rx + S}{Q'x^2 + R'x + S'}dx = (P''x + M)dx + \frac{(Kx + L)dx}{x^2 + R'''x + S'''};$$

et, en intégrant, nous obtiendrons

$$\int \frac{Px^3 + Qx^2 + Rx + S}{Q'x^2 + R'x + S'}dx = \int (P''x + M)dx + \int \frac{(Kx + L)dx}{x^2 + R'''x + S'''} = P''\frac{x^2}{2} + Mx + \int \frac{(Kx + L)dx}{x^2 + R'''x + S'''} + C;$$

et, ainsi, la question est ramenée à intégrer l'expression

$$\frac{(Kx + L)}{x^2 + R'''x + S'''}dx,$$

dans laquelle la plus haute puissance de x du dénominateur surpasse la plus haute puissance de x du numérateur ; C. Q. F. D.

On peut donc dire, d'une façon générale, que quelle que soit la fraction rationnelle que l'on considère, son inté-

gration peut toujours être ramenée, dans le cas le plus général, à celle de

$$\frac{P x^{n-1} + Q x^{n-2} + \ldots + R x + S}{P' x^{n} + Q' x^{n-1} + \ldots + R' x + S'} dx.$$

26. — L'intégration se fera ensuite en regardant le dénominateur de cette fraction comme le produit d'un nombre n de facteurs tels que $x - a$, $x - b$, $x - c$, etc., ces facteurs pouvant être réels ou imaginaires, égaux ou inégaux ; de là différents cas d'intégration que nous allons examiner.

27. — *Premier cas.* — *Intégration lorsque les facteurs sont réels et inégaux.*

Soit en général,

$$\frac{Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots + Rx + S}{x^{m} + Q'x^{m-1} + \ldots + R'x + S'} dx,$$

une fraction rationnelle dans laquelle les facteurs du premier degré du dénominateur sont supposés inégaux ; pour trouver ces facteurs, nous résoudrons l'équation :

$$x^{m} + Q'x^{m-1} + \ldots + R'x + S' = 0 ;$$

et ayant trouvé qu'elle est le produit des facteurs $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$, etc., nous poserons

$$\frac{Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots + Rx + S}{x^{m} + Q'x^{m-1} + \ldots + R'x + S'} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \text{etc.}$$

En réduisant au même dénominateur le second membre de cette équation, chaque terme du numérateur de l'une des fractions devra être multiplié par le produit des dénominateurs des autres, c'est-à-dire par un polynôme en x de l'ordre $m-1$ ; donc le second membre de cette équation sera un polynôme composé de m termes. Il en résulte que si nous égalons entre eux les coefficients des mêmes puissances de x, du polynôme ci-dessus, et du premier membre de l'équation, après que son dénominateur aura été décomposé en facteurs (comme dans l'exemple suivant), nous aurons m équations de condition pour déterminer les coefficients A, B, C, etc.

Ces coefficients étant connus, nous n'aurons plus qu'à intégrer une suite de termes tels que

$$\frac{A}{x-a}dx, \frac{B}{x-b}dx, \frac{C}{x-c}dx, \text{ etc. ;}$$

et l'intégrale cherchée sera donc

$$\int\left(\frac{A}{x-a}dx + \frac{B}{x-b}dx + \frac{C}{x-c}dx + \text{etc.}\right) \text{ou}$$

$$\int\left(A\frac{dx}{x-a} + B\frac{dx}{x-b} + C\frac{dx}{x-c} + \text{etc.}\right).$$

Or, art. 28, $d.\log(x-a) = \frac{d(x-a)}{x-a} = \frac{dx}{x-a}$, donc, $\int\frac{dx}{x-a} = \log(x-a)$; d'après cela, l'intégrale cherchée ci-dessus sera $A\log(x-a) + B\log(x-b) + C\log(x-c) + \text{etc.} + C$.

Exemple. — Soit à intégrer

$$\frac{a^3+bx^2}{a^2x-x^3}dx.$$

Les facteurs du dénominateur sont $x$ et $a^2-x^2$, et comme $a^2-x^2=(a-x)(a+x)$, les facteurs premiers du dénominateur sont $x$, $a-x$ et $a+x$ ; donc l'expression ci-dessus à intégrer devient

$$\frac{a^3+bx^2}{x(a-x)(a+x)}dx.$$

Posant

$$\frac{a^3+bx^2}{x(a-x)(a+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{a-x} + \frac{C}{a+x} + \ldots (41) ;$$

reduisant au même dénominateur, il vient

$$\frac{a^3+bx^2}{x(a-x)(a+x)} = \frac{Aa^2-Ax^2+Bax+Bx^2+Cax-Cx^2}{x(a-x)(a+x)};$$

égalant entre eux les coefficients des mêmes puissances de $x$, nous aurons

$$B-A-C=b,\ Ba+Ca=o,\ Aa^2=a^3.$$

La troisième de ces équations nous donne $A=a$ ; cette valeur réduit la première à $B-C=a+b$, et comme la seconde donne $B+C=o$, nous connaissons la somme et la différence des deux quantités B et C, et, par suite, la plus grande $B=\frac{o}{2}+\frac{a+b}{2}=\frac{a+b}{2}$, et l'autre $C=\frac{o}{2}-\frac{a+b}{2}=-\frac{a+b}{2}$.

Substituant les valeurs de A, de B et de C dans l'équation (41), nous trouverons

$$\frac{a^3+bx^2}{a^2x-x^3}dx = \frac{adx}{x} + \frac{a+b}{2(a-x)}dx - \frac{a+b}{2(a+x)}dx\,;$$

en intégrant d'après l'article 28, C. D., et en remarquant que pour prendre l'intégrale de $\frac{a+b}{2(a-x)}$ dx, comme la différentielle de a—x est —dx, nous devons écrire ainsi ce terme
$$\frac{-(a+b)}{2} \times -\frac{dx}{a-x},$$
et nous voyons que l'intégrale sera
$$\frac{-(a+b)}{2}\log(a-x) + C.$$

Donc, nous aurons
$$\int\frac{a^3+bx^2}{a^2x-x^3}dx = a\log x - \frac{(a+b)}{2}\log(a-x) - \frac{(a+b)}{2}\log(a+x) + C =$$
$$a\log x - \frac{(a+b)}{2}[\log(a-x)+\log(a+x)] + C =$$
$$a\log x - \frac{(a+b)}{2}\log(a-x)(a+x) + C =$$
$$a\log x - \frac{(a+b)}{2}\log(a^2-x^2) + C =$$
$$a\log x - (a+b)\log\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

28. — *Deuxième cas. — Intégration lorsque parmi les facteurs du dénominateur, que nous supposerons toujours réels, il y en a qui sont égaux.*

Remarquons d'abord que la méthode que nous venons d'exposer, à l'article précédent, ne peut servir si parmi les racines il y en a qui sont égales, car on ne peut calculer toutes les indéterminées A, B, C, etc. En effet, lorsque les racines sont inégales, nous avons vu qu'on peut écrire
$$\frac{Px^4+Qx^3+Rx^2+Sx+T}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \frac{D}{x-d} + \frac{E}{x-e}\,;$$
mais si plusieurs de ces racines étaient égales, si, par exemple, nous avions a = b = c, l'équation précédente deviendrait
$$\frac{Px^4 + \text{etc.}}{(x-a)^3(x-d)(x-e)} = \frac{A+B+C}{x-a} + \frac{D}{x-d} + \frac{E}{x-e}.$$

Alors, en réduisant le second membre au même dénominateur, $A+B+C$ pouvant être considérés comme une seule constante $A'$, nous voyons que les trois constantes $A'$, D et E ne pourraient suffire pour établir les cinq équations de condition que nous devrions obtenir en égalant entre eux les coefficients des mêmes puissances de x.

Pour éviter cet inconvénient, nous devrons chercher à décomposer la fraction.

$$\frac{Px^4 + Qx^3 + \text{etc.}}{(x-a)^3 (x-d) (x-e)},$$

en un autre assemblage de fractions, qui, réduites au même dénominateur, puissent la reproduire.

Nous supposerons donc que

$$\frac{Px^4 + Qx^3 + \text{etc.}}{(x-a)^3 (x-d) (x-e)} = \frac{A + Bx + Cx^2}{(x-a)^3} + \frac{D}{x-d} + \frac{E}{x-e}.$$

De cette manière, en réduisant le second membre de cette équation au même dénominateur, nous obtiendrons un polynome en x du quatrième degré, qui renfermera cinq constantes arbitraires ; ce qui suffira pour établir l'identité des termes affectés des mêmes puissances de x.

Mais nous pouvons mettre le terme

$$\frac{A+Bx+Cx^2}{(x-a)^3}$$

sous la forme

$$\frac{A'}{(x-a)^3} + \frac{B'}{(x-a)^2} + \frac{C'}{(x-a)},$$

$A'$, $B'$, $C'$, étant des constantes indéterminées. En effet, faisont $x-a=z$ ; nous aurons $x=z+a$, donc

$$\frac{A+Bx+Cx^2}{(x-a)^3} = \frac{A + Bz + Ba + Cz^2 + 2Caz + Ca^2}{z^3} =$$

$$\frac{A + Ba + Ca^2 + Bz + 2Caz + Cz^2}{z^3} = \frac{A + Ba + Ca^2}{z^3} +$$

$$\frac{B + 2Ca}{z^2} + \frac{C}{z};$$

mettant la valeur de z dans cette équation, nous obtiendrons

$$\frac{A+Bx+Cx^2}{(x-a)^3} = \frac{A+Ba+Ca^2}{(x-a)^3} + \frac{B+2Ca}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-a},$$

résultat de la forme prescrite puisque A′,B′,C′, sont des constantes. Et la même démonstration pouvant s'appliquer à une équation d'un degré plus élevé, nous pouvons donc, d'une façon générale, supposer que

$$\frac{Px^{m-1} + Q\,x^{m-2} + \ldots + R\,x + S}{(x-a)^m} = \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{A'}{(x-a)^{m-1}} + \frac{A''}{(x-a)^{m-2}} + \ldots + \frac{A^n}{x-a}.$$

Nous pouvons conclure, de ce qui précède, que pour intégrer l'expression

$$\frac{Px^4 + Qx^3 + \text{etc.}}{(x-a)^3\,(x-d)\,(x-e)}\,dx,$$

nous devrons écrire

$$\frac{Px^4 + Qx^3 + \text{etc.}}{(x-a)^3\,(x-d)\,(x-e)} = \frac{A}{(x-a)^3} + \frac{A'}{(x-a)^2} + \frac{A''}{x-a} + \frac{D}{x-d} + \frac{E}{x-e};$$

réduisant ensuite les fractions au même dénominateur, nous déterminerons les constantes A, A′, A″, D, E, etc., par le procédé que nous avons déjà employé, c'est-à-dire, en égalant les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres de l'équation. Nous aurons ensuite à trouver les intégrales des expressions :

$$\frac{A}{(x-a)^3}\,dx, \frac{A'}{(x-a)^2}\,dx, \frac{A''}{(x-a)}\,dx, \frac{D}{(x-d)}\,dx, \frac{E}{(x-e)}\,dx\,;$$

pour intégrer les deux premières, comme dx est la différentielle de l'expression x—a, renfermée entre les parenthèses, nous supposerons, art. 8, CI, x—a=z, et nous aurons

$$\int \frac{A\,dx}{(x-a^3} = \int \frac{A\,d\,z}{z^3} = A\int z^{-3}dz = A\frac{z^{-3+1 \text{ ou } -2}}{-3+1 \text{ ou } -2} = \frac{A}{-2}\,\frac{1}{z^2} = -\frac{A}{2\,z^2} = -\frac{A}{2\,(x-a)^2}\,;$$

$$\int \frac{A'dx}{(x-a)^2} = \int \frac{A'dz}{z^2} = \int A'z^{-2}dz = A'\frac{z^{-1}}{-1} = -\frac{A'}{z} = -\frac{A'}{x-a};$$

$$\int \frac{A''dx}{x-a} = \int \frac{A''dz}{z} = \text{art. 28, C.D.} = A''\int \frac{dz}{z} = A''\log z = A''\log(x-a)\,.$$

En faisant x—d = z′, et x—e = z″, nous aurons :

$$\int \frac{D\,dx}{x-d} = \int \frac{D\,dz'}{z'} = D \int \frac{dz'}{z'} = D \log z' = D \log (x-d);$$

$$\int \frac{E\,dx}{x-e} = \int \frac{E\,dz''}{z''} = E \int \frac{dz''}{z''} = E \log z'' = E \log (x-e);$$

donc, enfin nous avons

$$\int \frac{(Px^4 + Qx^3 + \text{etc.})\,dx}{(x-a)^3 (x-d)(x-e)} = -\frac{A}{2(x-a)^2} - \frac{A'}{x-a} + A'' \log$$

$(x-a) + D \log (x-d) + E \log (x-e) +$ constante.

Exemple. — Soit à intégrer la fraction

$$\frac{2\,ax\,dx}{(x+a)^2};$$

nous avons, d'après ce qui précède :

$$\frac{2ax}{(x+a)^2} = \frac{A}{(x+a)^2} + \frac{A'}{x+a};$$

réduisant le second membre au même dénominateur, en multipliant les deux termes du second terme par $x+a$, puis supprimant le dénominateur commun $(x+a)^2$, nous aurons

$$2\,ax = A + A'x + A'a,$$

d'où, nous déduisons les équations de condition :

$$2\,a = A' \text{ et } A + A'a = 0\,;$$

nous en tirons

$$A' = 2\,a \text{ et } A = -A'a = -2\,a^2\,;$$

par conséquent,

$$\frac{2\,ax\,dx}{(x+a)^2} = -\frac{2\,a^2\,dx}{(x+a)^2} + \frac{2\,a\,dx}{x+a}. \quad (42).$$

Pour obtenir l'intégrale, comme $dx$ est la différentielle de $x+a$, nous pouvons, art. 8, C.I., supposer $x+a=z$ ; donc

$$\frac{2\,ax\,dx}{(x+a)^2} = -\frac{2\,a^2\,dz}{z^2} + 2\,a\,\frac{dz}{z},$$

d'où, en intégrant par l'article 2 C.I., pour le premier terme du second membre et par l'art. 28, C.D., pour le second terme de ce membre, nous aurons :

$$\int \frac{2\,ax\,dx}{(x+a)^2} = \int -2a^2 z^{-2}\,dz + \int 2a\,\frac{dz}{z} = -2a^2\,\frac{z^{-1}}{-1} +$$

$$2a \log z + C = 2a^2\,\frac{1}{z} + 2a \log z + C = \frac{2a^2}{z} + 2\,a \log z + C\,;$$

et, en remettant la valeur de z, nous aurons enfin

$$\int \frac{2\,ax\,dx}{(x+a)^2} = \frac{2a^2}{x+a} + 2a \log(x+a) + C.$$

*Troisième cas. — Intégration lorsque le dénominateur contient des facteurs (racines) imaginaires.*

29. — Tout d'abord nous allons démontrer que les conditions nécessaires pour que l'équation du second degré

$$x^2 + px + q = o, \ (43),$$

aient des racines imaginaires sont les suivantes :

1° le dernier terme q doit être positif ;

2° q doit surpasser $\frac{1}{4} p^2$.

En effet, résolvons l'équation (43), nous aurons

$$x = -\frac{1}{2} p \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q};$$

et 1°) nous voyons que si q était négatif, l'expression $-q$, qui est sous le radical, changerait de signe, et le radical, n'affectant alors que des quantités positives, x ne pourrait être imaginaire ; et 2°) si q surpasse $\frac{1}{4} p^2$, l'excès de q sur $\frac{1}{4} p^2$ étant alors une quantité essentiellement positive, nous pourrons le représenter par $\beta^2$, puisque un carré est toujours positif ; nous aurons ainsi

$$q = \frac{1}{4} p^2 + \beta^2;$$

faisant $\frac{p}{2} = \alpha$ pour éviter les fractions, cette expression devient

$$q = \alpha^2 + \beta^2;$$

substituons ces valeurs de p et de q dans l'équation (43), nous obtiendrons

$$x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = o. \ (44).$$

En résolvant cette équation, nous avons

$$x = -\alpha \pm \beta \sqrt{-1}. \ (45);$$

et par suite, les deux racines sont donc

$$-\alpha + \beta\sqrt{-1} \text{ et } -\alpha - \beta\sqrt{-1}.$$

L'éq. (45) donne les 2 éq.

$$x + \alpha - \beta\sqrt{-1} = o \text{ et } x + \alpha + \beta\sqrt{-1} = o$$

qui, multipliées l'une par l'autre, reproduisent l'éq. (44).

On voit que les deux racines sont imaginaires. Elles

sont disposées par couple, de telle sorte que l'une étant connue, on connaît l'autre en changeant le signe de la partie imaginaire.

30. — En général, une équation peut avoir plusieurs couples de racines imaginaires, et chaque couple donne lieu à un facteur du second degré de la forme

$$x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 \text{ . (46).}$$

Parfois, les racines imaginaires sont égales, au signe près ; c'est ce qui arrive lorsque $\alpha = 0$ ; alors l'une des racines est $\beta\sqrt{-1}$ et l'autre $-\beta\sqrt{-1}$, et le facteur (46), du second degré, se réduit à

$$x^2 + \beta^2 \text{ .}$$

31. — Comme exemple d'une équation dont les racines sont imaginaires nous prendrons l'équation

$$x^2 - 6\,ax + 10\,a^2 = 0 \text{ ;}$$

résolue, elle donne

$$x = 3\,a \pm \sqrt{-a^2} = 3\,a \pm a\sqrt{-1} \text{ ;}$$

couple de valeurs imaginaires.

En comparant cette valeur de x avec l'équation (45), nous trouvons $-\alpha = 3a$, $\beta = a$ ;

donc, dans le cas présent, l'équation (46) devient

$$x^2 - 6\,ax + 9\,a^2 + a^2 \text{ ou } x^2 - 6\,ax + 10\,a^2 \text{ .}$$

32. — Du reste, quand on a une équation telle que

$$x^2 + 4\,x + 12 = 0 \text{ ,}$$

dont les racines sont imaginaires, ce que l'on reconnaît quand les conditions de l'art. 29, C. I., sont remplies, on peut la comparer immédiatement à la formule (46), et l'on a ainsi, dans le cas présent, $2\alpha = 4$, donc $4\alpha^2 = 16$ ou $\alpha^2 = 4$.

Si nous retranchons 4 de 12, il resta 8 pour $\beta^2$, et l'équation proposée peut se mettre sous la forme

$$x^2 + 4x + 4 + 8 = 0.$$

Remarquons que le terme 8 n'est pas un carré parfait, mais on peut le regarder comme celui de $\sqrt{8}$.

33. — Nous allons maintenant passer à l'intégration des fractions rationnelles dont les dénominateurs contiennent des facteurs imaginaires.

Prenons d'abord le cas le plus simple, c'est-à-dire celui où il n'y a qu'une couple de racines imaginaires dans le

dénominateur ; supposons, par exemple, qu'après avoir décomposé le dénominateur en ses facteurs, on ait trouvé

$$\frac{P+Qx+Rx^2+Sx^3+\text{etc.}}{(x-a)(x-b)\ldots(x-h)(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)}\,dx,$$

expression dans laquelle le dernier facteur du dénominateur contient des racines imaginaires (équation 46), art. 30.

Nous égalerons, comme nous l'avons déjà fait, art. 28, C.I. cette expression à cette suite de termes :

$$\frac{A\,dx}{x-a}+\frac{B\,dx}{x-b}+\ldots+\frac{H\,dx}{x-h}+\frac{Mx+N}{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}\,dx,$$

et après avoir déterminé les constantes A, B,... H, M, N, par le procédé que nous avons employé précédemment, tous ces termes, excepté le dernier, s'intégreront par logarithmes, art. 28, calcul différentiel. Quant au dernier, il s'intégrera de la manière suivante :

Nous remarquerons d'abord que les termes $x^2+2\alpha x+\alpha^2$ constituent un carré parfait, et que, par suite, le terme à intégrer peut se mettre sous la forme

$$\frac{Mx+N}{(x+\alpha)^2+\beta^2}\,dx\ ;$$

en posant $x+\alpha=z$, il devient

$$\frac{Mz+N-M\alpha}{z^2+\beta^2}\,dz\ ;$$

et en représentant par P la partie constante $N-M\alpha$, il se réduit à

$$\frac{Mz+P}{z^2+\beta^2}\,dz\ ;$$

expression qui se décompose en celle-ci

$$\frac{Mz\,dz}{z^2+\beta^2}+\frac{Pdz}{z^2+\beta^2}.$$

Le premier terme s'intégrera en observant que Z dz étant la différentielle de $z^2+\beta^2$ à un facteur constant près, le facteur 2, nous pouvons, art. 9, C.I., supposer $z^2+\beta^2=y$, expression qui, différentiée, nous donne,

$$2\,z\,dz=dy \text{ ou } z\,dz=\frac{dy}{2}\ ;$$

substituant ces valeurs dans ce premier terme, nous aurons

$$\frac{M\,dy}{2}:y \text{ ou } \frac{M\,dy}{2\,y}\ ;$$

et en intégrant d'après l'art. 28 du calcul différentiel, nous obtiendrons pour l'intégrale de ce premier terme, en remplaçants y et z par leurs valeurs :

$$\int \frac{M}{2}\frac{dy}{y} = \frac{M}{2}\log y = \frac{M}{2}\log(z^2 + \beta^2) = \frac{M}{2}\log[(x+\alpha)^2 + \beta^2] = \frac{M}{2}\log(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2) = M\log(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^{1/2} = M\log\sqrt{x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2}.$$

Pour intégrer le second terme $\frac{Pdz}{z^2 + \beta^2}$, divisons d'abord ses deux termes par $\beta^2$, nous aurons

$$\frac{P}{\beta}\cdot\frac{\frac{dz}{\beta}}{\frac{z^2}{\beta^2} + 1},$$

et en intégrant, d'après l'art. 13, C. I., en y remplaçant x par $\frac{z}{\beta}$, nous obtiendrons

$$\int \frac{P\,dz}{z^2 + \beta^2} = \int \frac{P}{\beta}\cdot\frac{\frac{dz}{\beta}}{\frac{z^2}{\beta^2} + 1} = \frac{P}{\beta}\,\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{z}{\beta}\right),$$ et en

remplaçant dans cette dernière expression P et z par leurs valeurs, nous aurons

$$\int \frac{P\,dz}{z^2 + \beta^2} = \frac{P}{\beta}\,\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{z}{\beta}\right) = \frac{N - M\alpha}{\beta}\,\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x+\alpha}{\beta}\right);$$

donc, enfin,

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2}dx = M\log\sqrt{x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2} + \frac{N - M\alpha}{\beta}\,\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{x+\alpha}{\beta}\right). \quad (47).$$

*Exemple.* — Soit à intégrer $\frac{a + bx}{x^3 - 1}dx$.

Nous reconnaissons d'abord, (caractère de divisibilité, algèbre), qne le dénominateur possède x-1 pour facteur ; par la division, nous aurons l'autre facteur, et l'expression pourra se mettre sous la forme

$$\frac{a+bx}{(x-1)\ (x^2+x+1)}\,dx\ ;$$

le facteur $x^2+x+1$ étant le produit de *deux facteurs* imaginaires, ce que l'on peut constater en résolvant l'équation $x^2+x+1=0$, nous écrirons,

$$\frac{a+bx}{(x-1)\ (x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1}\ ;\ (48)\ ;$$

nous avons trois facteurs au dénominateur, $x-1$ et les deux que contient $x^2+x+1$, donc nous mettons trois indéterminées A, M et N.

En réduisant le second membre, de l'expression ci-dessus, au même dénominateur, et égalant alors les numérateurs des deux membres, il vient

$$\frac{a+bx}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{Ax^2+Ax+A+Mx^2-Mx+Nx-N}{(x-1)(x^2+x+1)},$$

donc $a+bx=(A+M)x^2+(A-M+N)x+(A-N)$;

donc $A+M=0\ \therefore\ A=-M$;

$A-M+N=b\ \therefore\ 2A+N=b\ \therefore\ A=\frac{b-N}{2}$ et $M=-\frac{b-N}{2}$;

$A-N=a\ \therefore\ \frac{b-N}{2}-N=a\ \therefore\ b-N-2N=2a\ \therefore\ b-3N=2a\ \therefore\ \frac{b-2a}{3}=N$;

par suite

$$M=-\frac{b-\frac{b-2a}{3}}{2}=-\frac{b}{2}+\frac{b-2a}{6}=\frac{-3b+b-2a}{6}=$$

$$\frac{-2b-2a}{6}=\frac{-b-a}{3}=-\frac{(a+b)}{3},$$

$$A=\frac{a+b}{3}.$$

Décomposons maintenant le facteur $x^2+x+1$ en facteurs simples, par comparaison avec l'équation (46), nous aurons

$$2\alpha=1 \text{ et } \alpha^2+\beta^2=1,$$

d'où $\alpha=\frac{1}{2}$ et $\beta=\sqrt{1-\alpha^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}}$.

Substituant ces dernières valeurs et celles de M et de N, dans l'équation (47), nous aurons pour l'intégrale du second

terme du second membre de l'équation (48), multiplié par dx :

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+x+1}\,dx = -\frac{a+b}{3}\log\sqrt{x^2+\frac{2}{2}x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} +$$

$$\frac{\frac{b-2a}{3}+\left(\frac{a+b}{3}\right)\alpha}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \times \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right) + C = -$$

$$\frac{a+b}{3}\log\sqrt{x^2+x+1} + \frac{b-2a+a\alpha+b\alpha}{3\sqrt{\frac{3}{4}}}\operatorname{arc}(\operatorname{tang} =$$

$$\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\Bigg) + C = -\frac{a+b}{3}\log\sqrt{x^2+x+1} + \frac{b-2a+a\frac{1}{2}+b\frac{1}{2}}{3\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right) + C = -\frac{a+b}{3}\log\sqrt{x^2+x+1} +$$

$$\frac{\frac{3}{2}b-\frac{3}{2}a}{\frac{3}{2}\sqrt{3}}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right) + C = -\frac{a+b}{3}\log\sqrt{x^2+x+1} +$$

$$\frac{(b-a)}{\sqrt{3}}\operatorname{arc}\left[\operatorname{tang} = \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right] + C.$$

L'intégrale du premier terme, multiplié par dx, de ce second membre de l'équation (48), est

$$\int \frac{A\,dx}{x-1} \text{ ou } A\int \frac{dx}{x-1} \text{ ou } A\int \frac{d.(x-1)}{x-1},$$ ou, art. 28 du calcul différentiel,

$$A\log(x-1) \text{ ou } \frac{a+b}{3}\log(x-1).$$

Par conséquent en prenant ces valeurs de ces deux intégrales, l'équation (48) donne

$$\int \frac{a+bx}{(x-1)(x^2+x+1)}dx = \frac{a+b}{3}\log(x-1) - \frac{(a+b)}{3}\log \sqrt{x^2+x+1} + \frac{b-a}{\sqrt{3}}\text{arc}\left[\text{tang} = \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right] + C;$$

donc enfin, en mettant le premier membre sous la forme donnée :

$$\int \frac{a+bx}{x^3-1}dx = \frac{a+b}{3}\log(x-1) - \frac{(a+b)}{3}\log\sqrt{x^2+x+1} + \frac{(b-a)}{\sqrt{3}}\text{arc}\left[\text{tang} = \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right] + C.$$

34. — Lorsque, parmi les facteurs imaginaires, il y en a qui sont égaux, l'expression considérée contiendra un ou plusieurs facteurs du second degré de la forme $(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^p$, (art. 30, C. I., éq. (46)), suivant qu'elle renfermera un ou plusieurs groupes de facteurs imaginaires égaux. Le facteur

$$(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^p$$

correspondra, (art. 28 du calcul intég.), à cette suite de termes

$$\frac{H+Kx}{(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^p} + \frac{H'+K'x}{(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^{p-1}} + \frac{H''+K''x}{(x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^{p-2}} + \ldots + \ldots \frac{H_1+K_1x}{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2} \ldots \quad (49);$$

après avoir opéré de même pour les autres groupes de facteurs égaux, nous déterminerons les constantes

$$H, K, H', K'. H'', K'', \ldots H_1, K_1, \text{etc.},$$

comme précédemment.

Nous multiplierons ensuite par dx, et il ne restera plus qu'à intégrer chaque terme séparément, ce que nous saurons toujours faire du moment que nous savons intégrer le premier terme de la suite (49) multiplié par dx, car tous les autres sont de même forme.

A cet effet, nous mettrons ce terme sous la forme :

$$\frac{H+Kx}{[(x+\alpha)^2+6^2]^p}\,dx\,;$$

en y faisant $x+\alpha=z$, d'où $x=z-\alpha$ et $dz=dx$, il viendra

$$\frac{H+Kz-K\alpha}{(z^2+6^2)^p}\,dz\,;$$

et, en représentant par M la partie constante $H-K\alpha$, nous aurons à intégrer $\quad \frac{M+Kz}{(z^2+6^2)^p}\,dz\,;$

expression qui peut se décomposer en les deux suivantes :

$$\frac{Kz\,dz}{(z^2+6^2)^p}+\frac{M\,dz}{(z^2+6^2)^p}.$$

Pour intégrer la première, comme z dz est, à un facteur constant près, la différentielle de $z^2+6^2$, dont la différentielle est $2zdz$, nous ferons, art. 9, C. I., $z^2+6^2=y$, et nous aurons, en différentiant cette dernière expression, $2\,z\,dz=dy$, d'où $z\,dz=\frac{1}{2}\,dy$ ; substituant ces valeurs, nous obtiendrons pour l'intégrale de cette première expression

$$\int\frac{Kz\,dz}{(z^2+6^2)^p}=\int K\frac{1}{2}\frac{dy}{y^p}=\frac{1}{2}K\int dy\frac{1}{y^p}=\frac{1}{2}K\int y^{-p}dy=$$

$$\frac{1}{2}K\,\frac{y^{-p+1}}{-p+1}=\frac{1}{2}K\,\frac{(z^2+6^2)^{-p+1}}{1-p}=\frac{\frac{1}{2}K}{1-p}(z^2+6^2)^{-p+1}=$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{K}{(1-p)}\,\frac{1}{(z^2+6^2)^{-(-p+1)}}=\frac{1}{2}\frac{K}{(1-p)}\,\frac{1}{(z^2+6^2)^{p-1}}+C.$$

Pour intégrer la seconde expression $\frac{M\,dz}{(z^2+6^2)^p}$, mettons la sous la forme

$$M\,(z^2+6^2)^{-p}.\,dz\quad(50)\,;$$

et, maintenant, nous déduirons son intégrale de celle de $\int(z^2+6^2)^p\,dz$, en opérant comme il suit : d'abord, remarquons que diminuer l'exposant p d'une unité, cela revient au même que de diviser par $z^2+6^2$ ; par suite, en multipliant en même temps par la même quantité, nous obtiendrons l'équation identique suivante, c'est-à-dire qui donnera le même résultat dans chaque membre en effec-

tuant les opérations indiquées quelles que soient les valaurs des inconnues :

$$(z^2 + \beta^2)^p dz = (z^2 + \beta^2)^{p-1}(z^2 + \beta^2)\, dz\,;$$

en effectuant la multiplication indiquée au second membre, nous aurons :

$$(z^2 + \beta^2)^p dz = z^2 (z^2 + \beta^2)^{p-1} dz + \beta^2 (z^2 + \beta^2)^{p-1} dz\,,$$

et en intégrant, nous obtiendrons

$$\int(z^2 + \beta^2)^p dz = \int z^2 (z^2 + \beta^2)^{p-1} dz + \int \beta^2 (z^2 + \beta^2)^{p-1} dz. (51).$$

Appliquons au premier terme du second membre l'intégration par parties ; et, à cet effet, d'abord multiplions et divisons par 2 ce terme, nous pourrons l'écrire sons la forme :

$$\frac{z}{2}(z^2 + \beta^2)^{p-1}\, 2z\, dz, \quad (52)\,;$$

et remarquons qu'alors $(z^2 + \beta^2)^{p-1}\, 2z\, dz$ est la différentielle de $\frac{(z^2 + \beta^2)^p}{p}$, car cette dernière différentielle est

$$\frac{1}{p} \times p\,(z^2 + \beta^2)^{p-1} d.\,(z^2 + \beta^2)$$

ou

$$\frac{1}{p}.p.(z^2 + \beta^2)^{p-1}\, 2zdz \text{ ou } (z^2 + \beta^2)^{p-1}\, 2zdz,$$

comme ci-dessus, de sorte que l'expression (52) devient

$$\frac{z}{2}.d.\frac{(z^2 + \beta^2)^p}{p}\,;$$

en la comparant à la formule (art. 16 du cal. intég.) :

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

de l'intégration par parties, nous poserons

$$u = \frac{z}{2},\ v = \frac{(z^2 + \beta^2)^p}{p},$$

et nous obtiendrons

$$\int \frac{z}{2}(z^2 + \beta^2)^{p-1}\, 2z\, dz \text{ ou } \int z^2 (z^2 + \beta^2)^{p-1} dz = \frac{z}{2}.\frac{(z^2 + \beta^2)^p}{p} - \int \frac{(z^2 + \beta^2)^p}{p} d.\frac{z}{2} = \frac{z}{2}\frac{(z^2 + \beta^2)^p}{p} - \int \frac{(z^2 + \beta^2)^p}{p}\ \frac{dz}{2}.$$

Substituant cette valeur à la place du premier terme du second membre de l'équation (51), laissant le second terme de ce membre sous le signe d'intégration, et mettant les constantes en dehors du signe d'intégration, il viendra

$$\int (z^2+\beta^2)^p dz = \frac{z}{2}\frac{(z^2+\beta^2)^p}{p} - \frac{1}{2p}\int (z^2+\beta^2)^p . dz + \beta^2$$
$$\int (z^2+\beta^2)^{p-1} dz\,;$$

faisant passer le second terme, du second membre, dans le premier membre, nous aurons

$$\int (z^2+\beta^2)^p\, dz + \frac{1}{2p}\int (z^2+\beta^2)^p dz = \frac{z}{2}\frac{(z^2+\beta^2)^p}{p} + \beta^2$$
$$\int (z^2+\beta^2)^{p-1} dz,$$

ou, en réduisant le premier membre,

$$\left(1+\frac{1}{2p}\right)\int (z^2+\beta^2)^p\, dz \text{ ou } \left(\frac{2p+1}{2p}\right)\int (z^2+\beta^2)^p\, dz = \frac{z}{2}$$
$$\frac{(z^2+\beta^2)^p}{p} + \beta^2 \int (z^2+\beta^2)^{p-1} dz\,;$$

de cette équation, nous tirerons

$$\beta^2 \int (z^2+\beta^2)^{p-1} dz = -\frac{z}{2}\frac{(z^2+\beta^2)^p}{p} + \frac{2p+1}{2p}\int (z^2+\beta^2)^p\, dz,$$

d'où

$$\int (z^2+\beta^2)^{p-1} dz = -\frac{z}{2p\beta^2}(z^2+\beta^2)^p + \frac{2p+1}{2p\beta^2}\int (z^2+\beta^2)^p\, dz;$$

posant p—1=—p, d'où p=1—p, nous aurons enfin

$$\int (z^2+\beta^2)^{-p}\, dz = -\frac{z}{2(1-p)\beta^2}(z^2+\beta^2)^{1-p} + \frac{2-2p+1}{(2-2p)\beta^2}$$
$$\int (z^2+\beta^2)^{1-p}\, dz,$$

ou

$$\int (z^2+\beta^2)^{-p} dz = -\frac{z}{2(1-p)\beta^2}(z^2+\beta^2)^{-p+1} + \frac{3-2p}{(2-2p)\beta^2}$$
$$\int (z^2+\beta^2)^{-(p-1)}\, dz. \quad (53).$$

Cette formule, qui, comme nous l'avions dit, a été déduite de $\int (z^2+\beta^2)^p\, dz$, nous montre que l'intégrale de $(z^2+\beta^2)^{-p}\, dz$ dépend de celle de $(z^2+\beta^2)^{-(p-1)}dz$, c'est-à-dire de la même expression sauf que la valeur numérique de l'exposant au lieu d'être —p sera moindre d'une unité ; par la même formule nous ferons dépendre ensuite l'intégrale de $(z^2+\beta^2)^{-(p-1)}$ de celle de $(z^2+\beta^2)^{-(p-2)}\, dz$, et ainsi de suite ; de façon qu'après chaque substitution, l'exposant de la partie intégrale diminuant d'une unité, il ne restera plus en dernier lieu qu'à intégrer l'expression

$$(z^2+\beta^2)^{-1}\, dz \text{ ou } \frac{1}{(z^2+\beta^2)}\, dz \text{ ou } \frac{dz}{(z^2+\beta^2)}\,;$$

mais nous avons vu, art. 13, C. I. que $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}$ arc $(\text{tang} = \frac{x}{a})$; donc en remplaçant x par z et a par $\beta$, nous aurons $\int \frac{dz}{(z^2 + \beta^2)} = \frac{1}{\beta}$ arc $\left(\text{tang} = \frac{z}{\beta}\right)$.

L'intégration de la seconde expression $\frac{M\,dz}{(z^2 + \beta^2)^p}$ dépend donc de la formule $\int \frac{dz}{z^2 + \beta^2} = \frac{1}{\beta}$ arc $\left(\text{tang} = \frac{z}{\beta}\right)$.

Donc, en résumé, lorsqu'il y a des facteurs imaginaires égaux, l'intégration dépend de la formule générale $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}$ arc $\left(\text{tang} = \frac{x}{a}\right)$.

*Remarque.* — Dans la démonstration précédente, nous nous sommes arrêtés à $\int (z^2 + \beta^2)^{-1} dz$, et nous n'avons pas cherché à faire dépendre cette intégrale de celle de $(z^2 + \beta^2)^0 dz$, (laquelle se réduit à z, puisque comme $(z^2 + \beta^2)^0$ égale 1, il vient $1 \times dz$ ou dz dont l'intégrale est z); car, si dans la formule (53), nous faisons p=1, le terme $\frac{-z}{2(1-p)\beta^2}$ $(z^2 + \beta^2)^{-p+1}$ deviendrait $\frac{-z}{2(1-1)\beta^2}$ $(z^2 + \beta^2)^{-1+1}$ ou $\frac{-z}{0}$ $(z^2 + \beta^2)^0$, c'est-à-dire deviendrait infini,

35. — Nous pouvons conclure de la théorie que nous venons d'exposer sur l'intégration par la méthode des fractions rationnelles, que l'intégration de toute fraction rationnelle ne dépend que de ces trois sortes de formules :

1°. $\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ ;

2°. $\int \frac{dx}{x+a} = \log(x+a)$ ;

3°. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}$ arc $\left(\text{tang} = \frac{x}{a}\right)$.

Donc, nous pouvons conclure que toute fraction rationnelle peut toujours s'intégrer ou algébriquement, (1er-cas); ou par logarithmes, (2d cas); ou par arcs de cercle, (3e cas) ; ou par le concours de ces moyens, comme dans l'exemple suivant qui renferme tous les cas, c'est-à-dire qui contient

des facteurs réels et des facteurs imaginaires, égaux et inégaux.

Soit donc l'expression rationnelle

$$\frac{Px^m + P'x^{m-1} + P''x^{m-2} + \text{etc.}}{RR'R'' \ldots SS'S'' \ldots TT'T'' \ldots UU'U'' \ldots} dx,$$

dans laquelle nous avons

$$\left.\begin{array}{l} R = x - a \\ R' = x - b \\ R'' = x - c \\ \ldots\ldots \end{array}\right\} \text{facteurs réels inégaux, art. 27 ;}$$

$$\left.\begin{array}{l} S = (x-e)^m, \\ S' = (x-d)^n, \\ \ldots\ldots \end{array}\right\} \text{facteurs réels égaux, art. 28 ;}$$

$$\left.\begin{array}{l} T = x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2, \\ T' = x^2 + 2\alpha' x + \alpha'^2 + \beta'^2, \\ \ldots\ldots \end{array}\right\} \text{facteurs imaginaires inégaux, art. 33 ;}$$

$$\left.\begin{array}{l} U = (x^2 + 2\alpha_1 x + \alpha_1^2 + \beta_1^2)^p, \\ U' = (x^2 + 2\alpha_{11} x + \alpha_{11}^2 + \beta_{11}^2)^q, \\ \ldots\ldots \end{array}\right\} \text{facteurs imaginaires égaux, art. 34 ;}$$

nous ferons

$$\frac{Px^m + P'x^{m-1} + P''x^{m-2} + \text{etc.}}{RR'R'' \ldots SS'S'' \ldots TT'T'' \ldots UU U'' \ldots} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \text{etc.} \ldots$$

$$+ \frac{E}{(x-e)^m} + \frac{E'}{(x-e)^{m-1}} + \frac{E''}{(x-e)^{m-2}} + \text{etc.} \ldots$$

$$+ \frac{F}{(x-f)^n} + \frac{F'}{(x-f)^{n-1}} + \frac{F''}{(x-f)^{n-2}} + \text{etc.} \ldots$$

$$+ \frac{G+Hx}{x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2} + \frac{K+Lx}{x^2+2\alpha' x+\alpha'^2+\beta'^2} + \text{etc.}$$

$$+ \frac{M+Nx}{(x^2+2\alpha_1 x+\alpha_1^2+\beta_1^2)^p} + \frac{M'+N'x}{(x^2+2\alpha_1 x+\alpha_1^2+\beta_1^2)^{p-1}} + \text{etc.}$$

$$+ \frac{P+Qx}{(x^2+2\alpha_{11} x+\alpha_{11}^2+\beta_{11}^2)^q} + \frac{P'+Q'x}{(x^2+2\alpha_{11} x+\alpha_{11}^2+\beta_{11}^2)^{q-1}} + \text{etc},$$

et ayant réduit au même dénominateur, nous opérerons comme nous l'avons expliqué pour chaque cas en particulier

## 4°. — Intégration des fractions irrationnelles.

36. — La méthode consiste à transformer une expression différentielle qui contient des radicaux de façon à faire évanouir ces radicaux et à ramener ainsi l'intégration à celle des fractions rationnelles.

Il y a deux cas à considérer, d'abord celui où les radicaux affectent des quantités monômes, et ensuite celui où ils affectent des quantités polynômes.

37. — *Premier cas.* — On opérera comme dans l'exemple suivant : Soit la différentielle

$$\frac{\sqrt[3]{x} - \frac{1}{4} a}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx,$$

que nous mettrons sous la forme

$$\frac{x^{1/3} - \frac{1}{4} a}{x^{1/2} - x^{1/3}} dx ;$$

nous réduirons les exposants fractionnaires au même dénominateur, et ayant obtenu pour dénominateur commun 12, nous poserons $x = z^{12}$, alors

$$\sqrt{x} = z^6, \sqrt[3]{x} = z^4, dx = 12 z^{11} dz ;$$

substituant ces valeurs nous trouverons

$$\frac{\sqrt[3]{x} - \frac{1}{4} a}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx = \frac{z^4 - \frac{1}{4} a}{z^6 - z^4} 12 z^{11} dz = \frac{12 z^{15} - 3 a z^{11}}{z^6 - z^4} dz = \frac{12 z^{11} - 3 a z^7}{z^2 - 1} dz ;$$

il ne reste plus qu'à intégrer cette dernière expression par la méthode des fractions rationnelles et substituer ensuite dans l'intégrale la valeur de z en fonction de x pour avoir l'intégrale de l'expression donnée.

38. — *Deuxième cas.* — Le moyen précédent qui est toujours possible quand il s'agit de monômes, ne l'est plus quand les radicaux affectent des polynômes ; cependant on peut intégrer toute expression en x qui renferme

$\sqrt{A + Bx + Cx^2}$ c'est-à-dire toute expression de la forme $F(x, \sqrt{A + Bx + Cx^2})\,dx$.

Nous devrons distinguer ici deux cas, celui où le terme $Cx^2$ est positif et celui où il est négatif ; s'il est positif mettons le radical sous la forme

$$\sqrt{C}\sqrt{\frac{A}{C} + \frac{B}{C}x + x^2}\,.$$

Si ce terme est négatif, nous le considérerons comme le produit de $+ C$ par $- x^2$, et alors le radical se mettra sous la forme

$$\sqrt{C}\sqrt{\frac{A}{C} + \frac{B}{C}x - x^2}\;;$$

pour simplifier, faisons

$$\frac{A}{C} = a, \frac{B}{C} = b\;;$$

et les deux expressions précédentes deviendront

$$\sqrt{C}\sqrt{a+bx+x^2} \text{ et } \sqrt{C}\sqrt{a+bx-x^2}\;;$$

substituons-les dans l'expression donnée en supprimant la constante $\sqrt{C}$ qui ne modifie pas l'intégration, et alors nous aurons à intégrer les deux différentielles

$$F(x, \sqrt{a+bx+x^2})\,dx$$

et

$$F(x, \sqrt{a+bx-x^2})\,dx.$$

39. — Cherchons d'abord le moyen d'intégrer la première, c'est-à-dire quand $Cx^2$ est positif. Notre méthode consistera à obtenir, par une transformation, les valeurs de $x$, de $dx$ et de $\sqrt{a+bx+x^2}$, en fonction rationnelle d'une nouvelle variable $z$, à intégrer par la méthode des fractions rationnelles, puis à remplacer $z$ par sa valeur.

Posons $\sqrt{a+bx+x^2} = z + x$, (54),
parce qu'en élevant au carré, les termes en $x^2$ se détruiront, et il nous restera entre $x$ et $z$ une équation du premier degré, de laquelle nous pourrons tirer les valeurs de $x$ et de $dx$ en fonction rationnelle de $z$.

Elevant donc l'équation (54) au carré et supprimant les termes en $x^2$ communs aux deux membres, nous aurons

$$a + bx = z^2 + 2xz, \quad (55),$$

d'où $x(b-2z) = z^2 - a$, et par suite,

$$x = \frac{z^2 - a}{b - 2z}. \quad (56).$$

Substituant cette valeur dans l'équation (54) nous aurons:

$$\sqrt{a + bx + x^2} = z + \frac{z^2 - a}{b - 2z},$$

ou, en réduisant au même dénominateur,

$$\sqrt{a + bx + x^2} = \frac{bz - 2z^2 + z^2 - a}{b - 2z} = \frac{bz - z^2 - a}{b - 2z} = -\frac{(z^2 - bz + a)}{b - 2z} \ldots (57).$$

Il nous reste encore à déterminer dx en fonction de z.

A cet effet, différentions l'équation (55), nous aurons, (en vertu de l'art. 9, calc. diff., en ce qui concerne le produit $2xz$) :

$$b\,dx = 2z\,dz + 2x\,dz + 2z\,dx,$$

d'où

$$(b - 2z)\,dx = 2(z + x)\,dz\,;$$

en éliminant le radical entre les équations (54) et (57), nous aurons

$$x + z = -\frac{(z^2 - bz + a)}{b - 2z};$$

substituant cette valeur de $x + z$ dans l'équation précédente, nous obtiendrons

$$(b - 2z)\,dx = -\frac{2(z^2 - bz + a)}{b - 2z}\,dz,$$

d'où

$$dx = -\frac{2(z^2 - bz + a)}{(b - 2z)^2}\,dz, \quad (58).$$

Nous avons donc ainsi les valeurs cherchées de x, de $\sqrt{a + bx + x^2}$ et de dx en fonction rationnelle de z.

*Exemple.* — Soit à intégrer la différentielle

$$\frac{dx}{x\sqrt{A + Bx + Cx^2}};$$

mettons-la sous la forme

$$\frac{dx}{\sqrt{C} \times x\sqrt{a + bx + x^2}},$$

en faisant $\frac{A}{C} = a$ et $\frac{B}{C} = b$. L'équation (58) divisée par l'équation (57) nous donnera

$$\frac{dx}{\sqrt{a + bx + x^2}} = -\frac{2(z^2 - bz + a)\,dz}{(b - 2z)^2} \times \frac{b - 2z}{-(z^2 - bz + a)} = \frac{2dz}{b - 2z};$$

et, en divisant par l'équation (56), il viendra

$$\frac{dx}{x\sqrt{a+bx+x^2}}=\frac{2\,dz}{b-2z}\times\frac{b-2z}{z^2-a}=\frac{2\,dz}{z^2-a};$$

multipliant les dénominateurs par $\sqrt{C}$, nous aurons

$$\frac{dx}{x\sqrt{C}\,\sqrt{a+bx+x^2}} \text{ ou } \frac{dx}{x\sqrt{A+Bx+Cx^2}}=\frac{2\,dz}{(z^2-a)\sqrt{C}},$$

expression qui s'intègre par la méthode des fractions rationnelles, attendu qu'on peut regarder $\sqrt{C}$ comme une constante ordinaire.

40. — Nous allons maintenant rechercher les moyens d'intégrer la seconde différentielle de l'art. 38 qui précède, c'est-à-dire lorsque $Cx^2$ est négatif. Nous ne pouvons pas faire usage de la méthode précédente, car en opérant comme nous l'avons fait, nous aurions

$$\sqrt{A+Bx-Cx^2}=\sqrt{C}\sqrt{\frac{A}{C}+\frac{B}{C}x-x^2},$$

et en faisant $\frac{A}{C}=a$ et $\frac{B}{C}=b$ nous obtiendrions :

$$\sqrt{A+Bx-Cx^2}=\sqrt{C}\,\sqrt{a+bx-x^2}.$$

Or, si nous faisons comme précédemment, article 39, $\sqrt{a+bx-x^2}=x+z$, en élevant au carré les deux membres de cette équation, les termes en $x^2$, étant ici de signe contraire dans chaque membre, ne s'évanouiraient pas, et alors la valeur de x, en fonction de z serait irrationnelle.

Pour traiter ce cas, où $Cx^2$ est négatif, nous remarquerons d'abord que le polynome $a+bx-x^2$ est décomposable en facteurs réels du premier dégré, car si nous écrivons ce polynome sous la forme

$$-(x^2-bx-a),$$

et si nous égalons à zéro cette expression, nous trouverons ses facteurs, savoir

$$x=\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}+a.};$$

par suite, par la propriété des équations (algèbre), nous avons

$$x^2-bx-a=\left(x-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+a}\right)\left(x-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+a}\right);$$

et comme, par hypothèse, a représente une quantité positive, et que le carré $\frac{b^2}{4}$ est essentiellement positif, les facteurs qui composent ce produit ne peuvent être imaginaires. Nous serions du reste arrivés à la même conclusion, sans résoudre l'équation $x^2 - bx - a = 0$, en remarquant que le signe du dernier terme a, de cette équation, est négatif, et que par suite, d'après l'art. 29, C.I., ses racines ne peuvent être imaginaires.

Cela étant, soient $\alpha$ et $\alpha'$ les racines de l'équation $x^2 - bx - a = 0$ ; nous aurons, d'après la propriété des équations (algèbre) : $x^2 - bx - a = (x-\alpha)(x-\alpha')$,
et, en changeant les signes

$$a + bx - x^2 = -(x-\alpha)(x-\alpha') = (x-\alpha)(\alpha'-x) ;$$

substituant cette valeur dans le radical, nous aurons

$$\sqrt{a+bx-x^2} = \sqrt{(x-\alpha)(\alpha'-x)},$$

posons $\sqrt{(x-\alpha)(\alpha'-x)} = (x-\alpha)\,z \ldots, (59)$ ;
élevons au carré, nous aurons

$$(x-\alpha)(\alpha'-x) = (x-\alpha)^2 z^2 ;$$

et en supprimant le facteur commun $(x-\alpha)$, il viendra

$$(\alpha'-x) = (x-\alpha)\,z^2 \ldots, (60),$$

d'où $\alpha' - x = xz^2 - \alpha z^2$, et par suite, $\alpha' + \alpha z^2 = x(z^2+1)$,
par conséquent $x = \frac{\alpha' + \alpha z^2}{z^2+1}$,

donc $x - \alpha = \frac{\alpha' + \alpha z^2}{z^2+1} - \alpha$,

et en réduisant le second membre au même dénominateur, il viendra

$$x - \alpha = \frac{\alpha' + \alpha z^2 - \alpha z^2 - \alpha}{z^2+1} = \frac{\alpha' - \alpha}{z^2+1} \ldots, (61);$$

cette valeur, substituée dans le second membre de l'équation (59), nous donne

$$\sqrt{(x-\alpha)(\alpha'-x)} = \frac{\alpha'-\alpha}{z^2+1}\,z \ldots, (62).$$

Il reste à obtenir dx en fonction de z. Pour cela, nous n'avons qu'à différentier l'équation (61), nous aurons
$d(x-\alpha)$ ou $dx = d.\left(\frac{\alpha'-\alpha}{z^2+1}\right) =$ art. 11, calc. différentiel $=$

$$\frac{(z^2+1)d(\alpha'-\alpha)-(\alpha'-\alpha)d(z^2+1)}{(z^2+1)^2}=\frac{(z^2+1)\times 0-(\alpha'-\alpha)2z\,dz}{(z^2+1)^2}=$$
$$-\frac{2(\alpha'-\alpha)}{(z^2+1)^2}\,z\,dz. \ (63).$$

Donc, enfin, nous avons, art. 39, C.I., les valeurs de x, de $\sqrt{a+bx-x^2}$ et de dx en fonction rationnelle de z.

Nous savons donc intégrer, puis nous remplacerons z par sa valeur.

*Exemple.* — Soit à intégrer la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}\,;$$

divisons l'équation (63) par l'équation (62), nous aurons

$$\frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\alpha'-x)}} \text{ ou } \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}=-\frac{2(\alpha'-\alpha)\,z\,dz}{(z^2+1)^2}\times$$
$$\frac{z^2+1}{(\alpha'-\alpha)z}=-\frac{2\,dz}{z^2+1}\,;$$

donc

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}=\int-\frac{2\,dz}{z^2+1}=(\text{art. 13, éq. 18})=-2 \text{ arc}$$
$$(\text{tang}=z)+C\,;$$

et, en remplaçant z par sa valeur donnée par l'équation (59), ou $\frac{\sqrt{(x-\alpha)(\alpha'-x)}}{x-\alpha}$, nous aurons finalement pour l'intégrale cherchée

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}=C-2\text{ arc}\left(\text{tang}=\frac{\sqrt{(x-\alpha)(\alpha'-x)}}{x-\alpha}\right)$$
$$=C-2\text{ arc}\left(\text{tang}=\frac{\sqrt{(x-\alpha)(\alpha'-x)}}{\sqrt{(x-\alpha)^2}}\right)$$
$$=C-2\text{ arc}\left(\text{tang}=\sqrt{\frac{\alpha'-x}{x-\alpha}}\right).$$

41.— *Remarque.* Un exemple d'intégration étant donné, comme dans les articles précédents, on peut parfois par comparaison, en déduire l'intégrale d'autres exemples ; ainsi, par exemple, soit à intégrer

$$\sqrt{2ax-x^2}\times dx\,;$$

comparons ce radical à celui de l'équation (59), qui est $\sqrt{(x-\alpha)(\alpha'-x)}$ ou $\sqrt{\alpha' x-\alpha\alpha'-x^2+\alpha x}$ ou $\sqrt{x(\alpha'+\alpha)-\alpha\alpha'-x^2}$, nous aurons

$$-\alpha\alpha'=0, \text{ d'où } \alpha=0 \text{ ou } \alpha'=0,$$

$$\alpha'+\alpha=2a, \text{ d'où } \alpha'=2a \text{ ou } \alpha=2a,$$

prenons $\alpha=0$ et $\alpha'=2a$ ; on aboutirait au même résultat que celui auquel nous allons arriver si l'on prenait $\alpha'=0$ et $\alpha=2a$.

Les équations (62) et (63) deviennent

$$\sqrt{x(2a-x)}=\frac{2az}{z^2+1}, \text{ et } dx=-\frac{4azdz}{(z^2+1)^2};$$

et, en les multipliant l'une par l'autre, nous aurons

$$dx\sqrt{x(2a-x)} \text{ ou } dx\sqrt{2ax-x^2}=-\frac{8a^2z^2dz}{(z^2+1)^3};$$

donc
$$\int\sqrt{2ax-x^2}\times dx=\int-\frac{8a^2z^2dz}{(z^2+1)^3},$$

laquelle est une expression rationnelle que nous savons intégrer ; il suffit ensuite de remplaçer z par sa valeur pour avoir l'intégrale cherchée.

## INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES BINOMES.

42. — Comme nous avons vu, un moyen très-fécond pour intégrer des fonctions qui contiennent des radicaux, est de transformer ces fonctions en d'autres rationnelles, pour pouvoir y appliquer la méthode des fractions rationnelles.

La difficulté est de trouver la transformation qui peut être employée pour chaque cas ; nous avons examiné celle qui convient lorsque les radicaux ne sont que des trinômes, dans lesquels la variable ne dépasse pas le second degré ; ces sortes d'expressions étant très-fréquentes en analyse, il était utile de faire connaître la transformation propre à les rendre rationnelles. Nous avons également indiqué un procédé général pour rendre rationnelles les fonctions qui ne contiennent que des monômes élevés à des puissances fractionnaires ; nous allons examiner maintenant comment, à l'aide d'une transformation, on peut

rendre rationnelles les expressions binômes qui sont affectées d'exposants fractionnaires.

43. L'expression binôme $Ax^r + Bx^s$ étant un cas particulier de celle-ci :

$$(Ax^r + Bx^s)^p,$$

c'est à cette dernière formule que nous rapporterons les différentielles binômes ; nous pouvons l'écrire comme ceci:

$$[x^r(A+Bx^{s-r})]^p \text{ ou } x^{rp}(A+Bx^{s-r})^p,$$

et, en faisant $s-r=n$, $rp=m-1$, cette formule deviendra

$$x^{m-1}(A+Bx^n)^p,$$

donc *la formule générale des expressions différentielles binômes est*

$$x^{m-1}(a+bx^n)^p\,dx. \quad (64).$$

Nous avons remplacé rp par $m-1$, plutôt que par m, parceque les conditions d'intégrabilité seront plus faciles à exprimer, comme nous le verrons.

44. — Cela étant, si p est un nombre entier, cette formule s'intégrera par l'art. 7 cal. int. ; mais si p est égal à la fraction $\frac{p}{q}$ nous aurons.

$$x^{m-1}(a+bx^n)^{p/q}\,dx \ldots, (65).$$

Afin de rendre cette expression rationnelle nous ferons

$$a+bx^n = z^q \ldots, (66),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\sqrt[q]{a+bx^n} \text{ ou } (a+bx^n)^{1/q} = z,$$

et par suite

$$(a+bx^n)^{p/q} = z^p \ldots, (67).$$

L'équation (66), étant différentiée, donne

$$b\,n\,x^{n-1}\,dx = q\,z^{q-1}\,dz \ldots, (68).$$

La même équation (66), résolue par rapport à x donne

$$x^n = \frac{z^q - a}{b}, \text{ d'où } x = \sqrt[n]{\frac{z^q-a}{b}} = \left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{1/n};$$

et en élevant les deux membres de cette équation à la puissance m, nous aurons

$$x^m = \left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{m/n};$$

différentiant les deux membres nous obtiendrons

$$m\,x^{m-1}\,dx = \frac{m}{n}\left(\frac{z^q - a}{b}\right)^{m/n-1} d.\left(\frac{z^q - a}{b}\right),$$

ou

$$m\ x^{m-1}\ dx = \frac{m}{n}\left(\frac{z^q - a}{b}\right)^{m/n-1} \times \frac{1}{b}\ q z^{q-1}\,dz = \frac{m}{n\,b}\ q \left(\frac{z^q - a}{b}\right)^{m/n-1} z^{q-1}\,dz,$$

et en divisant par m il viendra :

$$x^{m-1}\,dx = \frac{q}{n\,b}\left(\frac{z^q - a}{b}\right)^{m/n-1} z^{q-1}\,dz,$$

substituant, dans l'équation (65), cette valeur, ainsi que celle de $(a+bx^n)^{p/q}$ donnée par l'équation (67), nous aurons finalement

$$\frac{q}{nb}\left(\frac{z^q - a}{b}\right)^{m/n-1} z^{q-1}\,dz \times z^p \text{ ou } \frac{q}{nb}\left(\frac{z^q - a}{b}\right)^{m/n-1} z^{q-1+p}\,dz,$$

ou

$$\frac{q}{nb}\left(\frac{z^q - a}{b}\right)^{m/n-1} z^{q+p-1}\,dz. \quad (69).$$

Cette expression est rationnelle lorsque $\frac{m}{n}$ est un nombre entier, soit positif soit négatif.

Si $\frac{m}{n}$ est un nombre entier positif, alors $\frac{z^q - a}{b}$ est élevé à une puissance entière et rationnelle et l'on peut réduire l'équation (69) à un nombre limité de monômes, lesquels seront intégrables chacun par l'art. 2. cal. int. ou par l'art. 6, cal. intég.

Si $\frac{m}{n}$ est un nombre entier négatif, l'expression (69) peut se mettre sous la forme

$$\frac{q}{n\,b}\left(\frac{z^q - a}{b}\right)^{m/n-1 \text{ ou} -r} z^{q+p-1}\,dz$$

ou

$$\frac{q}{n\,b}\ \frac{1}{\left(\frac{z^q - a}{b}\right)^r}\ z^{q+p-1}\,dz,$$

expression qui est rationnelle et qui pourra s'intégrer par la méthode des fractions rationnelles.

*Exemple.* — Soit l'expression différentielle

$$x^5\,(a+bx^2)^{2/3}\,dx.$$

Par comparaison avec la formule (65), nous avons

$$p=2,\ q=3,\ m-1=5 \text{ ou } m=6,\ n=2\ ;$$

par suite, la condition d'intégrabilité, $\left(\frac{m}{n} = \frac{6}{2} = 3 =\right.$ nombre entier positif), est satisfaite.

Substituant les valeurs précédentes dans l'équation (69), nous aurons à intégrer

$$\frac{3}{2b}\frac{(z^3-a)^2}{b^2}z^4\,dz \text{ ou } \frac{3}{2b^3}(z^3-a)^2 z^4\,dz$$

ou

$$\frac{3}{2b^3}(z^6-2az^3+a^2)z^4\,dz \text{ ou } \frac{3}{2b^3}(z^{10}\,dz-2az^7\,dz+a^2z^4\,dz)$$

ou enfin $$\frac{3}{2b^3}z^{10}dz-\frac{3a}{b^3}z^7\,dz+\frac{3a^2}{2b^3}z^4\,dz;$$

donc

$$\int x^5(a+bx^2)^{2/3}\,dx = \int\frac{3z^{10}}{2b^3}dz-\int\frac{3a}{b^3}z^7\,dz+\int\frac{3a^2}{2b^3}z^4\,dz = \frac{3z^{11}}{22b^3}-\frac{3az^8}{8b^3}+\frac{3a^2z^5}{10b^3}+C;$$

et il n'y a plus qu'à substituer dans ce résultat la valeur de z en fonction de x.

45. — Un autre moyen de reconnaître si une différentielle donnée est intégrable, est le suivant. On doit avoir:

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q} \text{ égal à un nombre entier (70).}$$

En effet, écrivons l'expression (65) sous la forme

$$x^{m-1}\left[\left(\frac{a}{x^n}+b\right)x^n\right]^{\frac{p}{q}}dx;$$

élévons ensuite, à la puissance $\frac{p}{q}$ les facteurs du produit $\left(\frac{a}{x^n}+b\right)x^n$, nous aurons

$$x^{m-1}\left(\frac{a}{x^n}+b\right)^{\frac{p}{q}}x^{\frac{np}{q}}dx \text{ ou } x^{m-1}x^{\frac{np}{q}}\left(\frac{a}{x^n}+b\right)^{\frac{p}{q}}dx$$

$$\text{ou } x^{m-1+\frac{np}{q}}\left(a\frac{1}{x^n}+b\right)^{\frac{p}{q}}dx$$

ou enfin

$$x^{m+\frac{np}{q}-1}(a\,x^{-n}+b)^{\frac{p}{q}}dx.$$

Mais, d'après la démonstration précédente, art. 44, pour que cette quantité soit intégrable, on doit avoir

$$\frac{m + \frac{np}{q}}{-n} = \text{nombre entier,}$$

cette expression tenant lieu de $\frac{m}{n}$ de la démonstration précédente, éq. 65.

En effectuant la division indiquée, il vient enfin pour la condition cherchée

$$\frac{m}{-n} + \left(\frac{np}{-nq}\right) \text{ ou } -\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right) = \text{nombre entier,}$$

ou, enfin $$\frac{m}{n} + \frac{p}{p} = \text{nombre entier,}$$

telle est la condition cherchée.

*Exemple.* — Soit l'expression

$$x^4\,dx\,\sqrt[3]{a + bx^3}\,.$$

Voyons si elle est intégrable. Pour cela, mettons cette différentielle sous la forme

$$x^{5-1}\,(a+bx^3)^{1/3}\,dx,$$

nous avons

$$m = 5,\ n = 3,\ p = 1 \text{ et } q = 3,$$

par conséquent $$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{5}{3} + \frac{1}{3} = 2\ ;$$

donc la quantité donnée est intégrable.

Nous avons, dans ce cas,

$$x^{5-1}\,(a + b\,x^3)^{1/3}\,dx = x^{5-1}\,\sqrt[3]{a + b\,x^3}\,dx = x^{5-1}\,\frac{\sqrt[3]{a + bx^3}}{\sqrt[3]{x^3}}\,x\,dx = x^{5-1}\,\sqrt[3]{\frac{a}{x^3} + b}\,x\,dx = x^{5-1}\left(\frac{a}{x^3} + b\right)^{1/3} x\,dx = x^5\left(a\,\frac{1}{x^3} + b\right)^{1/3} dx = x^5\,(a\,x^{-3} + b)^{1/3}\,dx. \quad (71).$$

Posons $ax^{-3} + b = z^3$, il viendra

$$(a\,x^{-3} + b)^{1/3} = z \text{ et } x^{-3} = \frac{z^3 - b}{a},$$

ou, pour la première $$\left(\frac{a}{x^3} + b\right)^{1/3} = z,$$

et pour la seconde $$\frac{1}{x^3} = \frac{z^3 - b}{a}.$$

La dernière de ces équations donne

$$x^3 = \frac{a}{z^3 - b},$$

d'où, en différentiant

$$2x^2\,dx = d.\left(\frac{a}{z^3 - b}\right) = \text{art.}11,\text{C.D.} = \frac{(z^3 - b)d.a - a.d(z^3 - b)}{(z^3 - b)^2} = \frac{-a\,2\,z^2\,dz}{(z^3 - b)^2},$$

donc
$$x^2\,dx = -\frac{az^2\,dz}{(z^3 - b)^2};$$

multipliant entre elles, les deux dernières équations, nous obtiendrons

$$x^5\,dx = \frac{a}{z^3 - b} \times \frac{-az^2\,dz}{(z^3 - b)^2} = -\frac{a^2\,z^2\,dz}{(z^3 - b)^3};$$

cette valeur de $x^5dx$ et celle de $(ax^{-3}+b)^{1/3}$ étant substituées dans l'équation (71), nous aurons enfin

$$x^5(ax^{-3}+b)^{1/3}dx = x^5\,dx \times z = -\frac{a^2z^2dz}{(z^3 - b)^3} \times z = -\frac{a^2z^3dz}{(z^3 - b)^3},$$

cette dernière expression est intégrable par la méthode des fractions rationnelles, et après intégration, il suffira de remplacer z par sa valeur en x.

## Intégration de quelques fonctions circulaires.

46. — Comme l'intégration de ces quantités dépend du développement de $\cos^2 x$, $\cos^3 x$, $\cos^4 x$, etc., en fonction des expressions $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$, etc., nous allons rappeler comment la trigonométrie arrive à ces développements.

Pour cela, dans la formule

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \,..\, (72),$$

faisons $a=b$, nous aurons

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1.$$

d'où
$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2a. (73),$$

multiplions cette équation par cos a, nous obtiendrons

$$\cos^3 a = \frac{1}{2}\cos a + \frac{1}{2}\cos a \cos 2a. \; (74).$$

Mais, si à l'équation (72), nous ajoutons celle-ci :

$$\cos(b-a) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$

nous aurons

$$\cos(a+b) + \cos(b-a) = 2\cos a \cos b,$$

d'où
$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\cos(a+b) + \frac{1}{2}\cos(b-a)\ ;$$
faisons $b = 2a$, nous obtiendrons
$$\cos a \cos 2a = \frac{1}{2}\cos 3a + \frac{1}{2}\cos a\ ;$$
éliminons $\cos a \cos 2a$, entre cette équation et l'équation (74), il viendra
$$\cos^3 a = \frac{1}{2}\cos a + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cos 3a + \frac{1}{2}\cos a\right) = \frac{1}{2}\cos a + \frac{1}{4}\cos 3a + \frac{1}{4}\cos a = \frac{3}{4}\cos a + \frac{1}{4}\cos 3a. \ (75).$$
Ainsi de suite.

47. — Cela étant, si nous devons intégrer l'expression $\cos^m x\, dx$, dans laquelle m est un nombre entier, nous mettrons, à la place de $\cos^m x$, son développement, qui, d'après ce qui précède, ne contiendra que des termes de cette sorte :

constante, $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$,.... $\cos mx$ ;

par conséquent tout se ramène à savoir intégrer le terme $\cos. mx. dx$.

Pour y arriver, remarquons que si dans l'équation
$$d. \sin z = \cos z\, dz, \text{ (art. 30. C.D.)},$$
nous faisons $z = mx$, nous aurons
$$d. \sin mx = \cos mx. d.(mx) = \cos mx. m. dx,$$
d'où
$$\cos mx. dx = \frac{d. \sin mx}{m}\ ;$$
donc
$$\int \cos mx\, dx = \int \frac{d. \sin mx}{m} = \frac{\sin mx}{m} + C. (76).$$
Par le même procédé, nous trouverions
$$\int \sin mx\, dx = -\frac{\cos mx}{m}. \ (77).$$

48. — Comme application, cherchons l'intégrale de $\cos^2 x\, dx$. A cet effet, remplaçons $\cos^2 x$ par sa valeur $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$, (éq. 73, art. 46, C.I.), nous aurons
$$\int \cos^2 x dx = \int\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)dx = \int\left(\frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}\cos 2x dx\right) = \frac{1}{2}x + \int \frac{1}{2}\cos 2x\, dx, \ (78)\ ;$$

Or, d'après la formule (76), $\int \cos 2x\,dx = \frac{\sin 2x}{2}$ + constante, et, par suite $\int \frac{1}{2}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2x}{2}$ + constante $= \frac{1}{4}\sin 2x + C$ ; remplaçant $\int \frac{1}{2}\cos 2x\,dx$ par cette valeur dans l'équation (78), il viendra enfin

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

49. — En procédant d'une manière analogue, nous pourrions trouver l'intégrale de $\sin^m x\,dx$.

Mais nous pouvons encore obtenir cette intégrale comme ceci :

Soit z l'arc complémentaire de x, nous avons

$x + z = \frac{1}{2}\pi$ ou $x = \frac{1}{2}\pi - z$ ;

$dx = d.\left(\frac{1}{2}\pi - z\right) = d\,(-z) = -\,dz$ ;

$\sin x = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - z\right) = \cos z$ ;

la formule $\sin^m x\,dx$, en y substituant ces valeurs se changerait donc en celle-ci :

$$\cos^m z \times (-\,dz) \text{ ou } -\cos^m z\,dz,$$

formule semblable à celle que nous venons d'intégrer ci-dessus, et qui s'intègre de la même manière.

50. — Prenons maintenant le cas plus général $\sin^m x \cos^n x\,dx$, et cherchons l'intégrale de cette expression.

Si m est pair, nous pouvons poser $m = 2m'$, et nous aurons à intégrer

$\sin^{2m'} x \cos^n x\,dx$, ou $(\sin^2 x)^{m'} \cos^n x\,dx$ ou $(1-\cos^2 x)^{m'} \cos^n x\,dx$.

Nous développerons par la formule du binôme (algèbre), l'expression $(1-\cos^2 x)^{m'}$, et, en multipliant ensuite par $\cos^n x\,dx$, nous aurons une suite de termes, chacun de la forme $\cos^K x\,dx$, et nous n'aurons qu'à intégrer comme ci-dessus.

Si m est impair, nous ferons $m = 2m' + 1$, et nous aurons $\sin^m x \cos^n x\,dx = \sin^{2m'+1} x \cos^n x\,dx = \sin^{2m'} x \sin x \cos^n x\,dx = (\sin^2 x)^{m'} \sin x \cos^n x\,dx = (1-\cos^2 x)^{m'} \sin x \cos^n x\,dx$; et, comme $\sin x\,dx = -\,d\cos x$, art. 31, C. D., nous avons enfin, en mettant cette valeur au second membre

$\sin^m x \cos^n x\, dx = (1 - \cos^2 x)^{m'} \cos^n x \times (-d.\cos x) = -$
$(1-\cos^2 x)^{m'} \cos^n x\, d.\cos x.$

Et en faisant $\cos x = z$, cette expression deviendra finalement

$$\sin^m x \cos^n x\, dx = -(1-z^2)^{m'} z^n\, dz\ ;$$

$m'$ et $n$ étant, par hypothèse, des entiers, nous développerons par la formule du binôme et puis nous intégrerons, la suite de termes obtenus, par la méthode ordinaire.

51. — Comme application, de ce procédé, soient les expressions $\dfrac{\cos^m x\, dx}{\sin^n x}$, $\dfrac{\sin^n x\, dx}{\cos^m x}$, dont la seconde rentre dans la première en posant $x = \dfrac{\pi}{2} - z$, car cette valeur change la seconde formule en

$$\frac{\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-z\right) d.\left(\frac{\pi}{2}-z\right)}{\cos^m\left(\frac{\pi}{2}-z\right)} \text{ ou } \frac{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)\right)^n d.(-z)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-z\right)^m} \text{ ou } \frac{-\cos z^n dz}{(\sin z)^m}$$

ou $\dfrac{-\cos^n z\, dz}{\sin^m z}$, formule analogue à la première ; nous ne considérerons donc que celle-ci, la seconde s'y ramenant.

Si $m$ est pair, nous ferons $m = 2m'$, et nous aurons

$$\frac{\cos^m x dx}{\sin^n x} = \frac{\cos^{2m'} x\, dx}{\sin^n x} = \frac{(\cos^2 x)^{m'} dx}{\sin^n x} = \frac{(1-\sin^2 x)^{m'}}{\sin^n x} dx\ ;$$

et, en développant $(1-\sin^2 x)^{m'}$ par la formule du binôme de Newton, nous obtiendrons

$$\frac{\cos^m x\, dx}{\sin^n x} = \frac{1 - m' \sin^2 x + m'\frac{m'-1}{2} \sin^4 x + \text{etc.}}{\sin^n x} dx,$$

expression dont l'intégrale dépend de celles de $\sin^l x\, dx$ ou $\sin x^l\, dx$ et de $\dfrac{dx}{\sin^K x}$.

Nous avons vu, art. 49, C.I., le moyen d'intégrer la première, et nous verrons bientôt comment on peut intégrer la seconde.

Si $m$ est impair, en faisant $m = 2m'+1$, nous aurons par la formule du binôme

$$\frac{\cos^m x\,dx}{\sin^n x} = \frac{\cos^{2m'+1} x\,dx}{\sin^n x} = \frac{(\cos^2 x)^{m'} \cos x\,dx}{\sin^n x} =$$

$$\frac{(1-\sin^2 x)^{m'} \cos x\,dx}{\sin^n x} = (1 - m'\sin^2 x + \text{etc.})\,\frac{\cos x\,dx}{\sin^n x},$$

expression dont l'intégrale dépend de celles de $\sin^1 x \cos x\,dx$ et de $\frac{\cos x\,dx}{\sin^K x}$ ; nous avons vu, art. 50, le moyen d'intégrer la première, nous allons rechercher le moyen d'intégrer la seconde.

A cet effet, dans $\frac{\cos x\,dx}{\sin^K x}$, faisons $\sin x = z$, et par suite art. 30 C.D.; $dz = d.\sin x = dx \cos x$, et nous aurons

$$\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^K x} = \int \frac{dz}{z^K} = \int \frac{1}{z^K}\,dz = \int z^{-K} dz = \frac{z^{-K+1}}{-k+1} + C.$$

Maintenant, si nous voulons intégrer l'expression $\frac{dx}{\sin^K x}$, en faisant également $\sin x = z$, et $dx \cos x = dz$, connue ci-dessus, d'où $dx = \frac{dz}{\cos x}$, nous aurons :

$$\int \frac{dx}{\sin^K x} = \int \frac{\frac{dz}{\cos x}}{z^K} = \int \frac{dz}{\cos x}\,\frac{1}{z^K} = \int \frac{dz}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\,\frac{1}{z^K} =$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\,\frac{1}{z^K} = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \sqrt{\frac{1}{z^{2K}}} = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\,\sqrt{z^{2K}}} =$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^{2K} - z^{2+2K}}} = \int \frac{dz}{(z^{2K} - z^{2+2K})^{1/2}} = \int \frac{1}{(z^{2K} - z^{2+2K})^{1/2}}\,dz =$$

$$\int (z^{2K} - z^{2+2K})^{-1/2} dz = \frac{(z^{2K} - z^{2+2K})^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{(z^{2K} - z^{2+2K})^{1/2}}{\frac{1}{2}} +$$

$$C = 2\,(z^{2K} - z^{2+2K})^{1/2} + C = 2\sqrt{z^{2K} - z^{2+2K}} + C.$$

On remplacera ensuite z par sa valeur sin x.

52. — Cherchons maintenant le moyen d'intégrer l'expression

$$\frac{dx}{\cos^m x \sin^n x}.$$

A cet effet, multiplions cette différentielle par $\cos^2 x + \sin^2 x$, quantité équivalente à l'unité, notre différentielle conservera donc sa valeur et nous aurons :

$$\frac{dx}{\cos^m x \sin^n x} = \frac{dx \cos^2 x}{\cos^m x \sin^n x} + \frac{dx \sin^2 x}{\cos^m x \sin^n x} = \frac{dx}{\cos^{m-2} x \sin^n x} + \frac{dx}{\cos^m x \sin^{n-2} x};$$

en opérant ainsi, nous avons diminué la somme des exposants du dénominateur ; et en répétant un certain nombre de fois cette opération, et en mettant successivement à part toutes les fractions qui, dans leurs dénominateurs, ne renferment qu'une puissance d'un sinus ou d'un cosinus (parce qu'on sait intégrer ces fractions d'après ce qui précède), à la dernière opération nous aurons des termes qui pourront encore contenir des puissances de sinus et de cosinus, ou qui seront des formes suivantes :

$$\frac{dx}{\sin x \cos x}, \quad \frac{dx}{\cos x}, \quad \frac{dx}{\sin x};$$

expressions dont les intégrales se trouvent comme il suit :

1°. Celle de $\frac{dx}{\sin x \cos x}$, en multipliant le numérateur par $\cos^2 x + \sin^2 x$, quantité qui équivaut à l'unité et l'on aura ainsi :

$$\frac{dx}{\sin x \cos x} + dx \frac{\cos x}{\sin x} + dx \frac{\sin x}{\cos x} = \text{(art. 30, C. D.)} = \frac{d.\sin x}{\sin x} + \text{(art. 31, C. D.)} + \frac{-d.\cos x}{\cos x} = \frac{d.\sin x}{\sin x} - \frac{d.\cos x}{\cos x};$$

expression dont l'intégrale est, (art. 5. C. I.) :

$$\log \sin x - \log \cos x + C,$$

ou

$$\log \frac{\sin x}{\cos x} + C,$$

ou enfin

$$\log \operatorname{tang} x + C.$$

2°. L'intégrale de $\frac{dx}{\sin x}$ s'obtient en faisant $\cos x = z$, d'où $d.z = d.\cos x = -dx.\sin x$, (art. 31, C. I.), d'où $dx = -\frac{dz}{\sin x}$; et, par suite

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int -\frac{dz}{\sin^2 x} = \int -\frac{dz}{1-\cos^2 x} = \int -\frac{dz}{1-z^2};$$

expression intégrable par la méthode des fractions rationnelles, art. 13, C. I.

3°. L'intégrale de $\frac{dx}{\cos x}$, s'obtient en faisant $\sin x = z$, d'où, (art. 30, C. D.), $dz = d.\sin x = dx \cos x$ ; et en divisant par $\cos^2 x$, nous aurons

$$\frac{dx}{\cos x} = \frac{dz}{\cos^2 x} = \frac{dz}{1 - \sin^2 x} = \frac{dz}{1 - z^2};$$

donc
$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dz}{1 - z^2};$$

formule intégrable, comme ci-dessus, par la méthode des fractions rationnelles.

53. — En général, on peut toujours transformer les expressions qui contiennent des sinus et des cosinus en d'autres qui n'en renferment pas ; pour cela, il suffit d'égaler $\sin x$ ou $\cos x$ à une nouvelle variable $z$.

Par exemple, si dans l'expression $\sin^m x \cos^n x\, dx$, nous faisons $\sin x = z$, nous aurons, en remarquant d'abord que $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - z^2}$ ; $dz = d.\sin x = \cos x\, dx$, d'où $dx = \frac{dz}{\cos x} = \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}$, et en substituant dans l'expression donnée :

$$\sin^m x \cos^n x\, dx = (\sin x)^m (\cos x)^n dx = z^m (\sqrt{1 - z^2})^n \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} =$$
$$z^m (1 - z^2)^{n/2} \left(\frac{1}{(1 - z^2)^{1/2}}\right) dz = z^m (1 - z^2)^{n/2} (1 - z^2)^{-1/2} dz =$$
$$z^m (1 - z^2)^{n/2 - 1/2} dz = z^m (1 - z^2)^{\frac{n-1}{2}} dz,$$

expression qui se rapporte aux différentielles binômes.

*Remarque.* — On pourrait aussi appliquer immédiatement l'intégration par parties à l'expression différentielle $\sin^m x \cos^n x\, dx$. Pour la comparer à $udv$, (art. 16, C.I.), on la décomposerait ainsi :

$$\sin^m x \cos^n x\, dx = \sin^{m-1} x \sin x \cos^n x\, dx = \sin^{m-1} x \cos^n x \sin x\, dx = \sin^{m-1} x \cos^n x (-d.\cos x) = -\sin^{m-1} x \cos^n x\, d.\cos x, \quad (79).$$

Mais $d.\cos^{n+1} x = (n+1) \cos^n x\, d.\cos x$, donc

$$\cos^n x\, d.\cos x = \frac{d.\cos^{n+1} x}{n+1} = \frac{1}{n+1}\, d.\cos^{n+1} x;$$

remplaçant $\cos^n x\, d.\cos x$ par cette valeur dans l'équation ci-dessus (79), nous aurons

$\sin^m x \cos^n x dx = -\sin^{m-1} x. \frac{1}{n+1} d. \cos^{n+1} x = -\sin^{m-1} x. d. \frac{1}{n+1} \cos^{n+1} x.$

54. — Les formules trigonométriques peuvent être aussi employées avec avantage dans certaine cas. Ainsi, par exemple, pour intégrer $\sin m x \cos n x \ dx$, comme la trigonométrie nous donne

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} \sin (a+b) + \frac{1}{2} \sin (a-b) ;$$

en comparant l'expression $\sin m x \cos n x$ à cette formule, nous trouverons

$\sin mx \cos nx \ dx = \frac{1}{2} \sin (mx+nx). dx + \frac{1}{2}. \sin (mx-nx). dx = \frac{1}{2} \sin [(m+n)x] \ dx + \frac{1}{2} \sin [(m-n)x] dx,$

et l'intégrale sera, (art. 47, C. I.) :

$\int \sin mx \cos nx \ dx = \int \frac{1}{2} \sin [(m+n)x] \ dx + \int \frac{1}{2} \sin [(m-n)x] dx = -\frac{1}{2} \frac{\cos (m+n) x}{m+n} + \left(-\frac{1}{2} \frac{\cos (m-n) x}{m-n}\right) + C = -\frac{1}{2} \frac{\cos (m+n) x}{m+n} - \frac{1}{2} \frac{\cos (m-n) x}{m-n} + C.$

## FONCTIONS EXPONENTIELLES OU LOGARITHMIQUES.

55. — Nous avons vu, art, 26, éq. (36), C. D, qu'en prenant les logarithmes dans le système Népérien, on avait $d. a^x = a^x dx. \log a$ ; donc $\frac{d. a^x}{\log a} = a^x dx$ ou $\frac{1}{\log a} . d . a^x = a^x dx$, donc $\int a^x dx = \int \frac{1}{\log a} d. a^x = \frac{1}{\log a} \int d.a^x = \frac{1}{\log a} a^x = \frac{a^x}{\log a}$.

Cette formule va nous servir pour intégrer l'expression générale $a^x X dx$, dans laquelle X représente une fonction de x.

A cet effet, nous mettrons cette expression sous la forme : $X.a^x dx$ ; et nous y appliquerons l'intégration par parties art. 16, cal. int. Remplaçons donc dans la formule $\int u.dv = uv - \int v.du$ :

u par X; $a^x\,dx$ qui égale la différentielle de $\frac{a^x}{\log a}$, (voir ci-dessus) nous donne donc $a^x\,dx = d.\frac{a^x}{\log a}$ par suite nous ferons $d.v = d.\frac{a^x}{\log a} = a^x\,dx$ et $v = \frac{a^x}{\log a}$ ; par conséquent la formule $\int u\,dv = uv - \int v\,du$, devient

$$\int X\,d.\frac{a^x}{\log a} \text{ ou } \int X.\,a^x\,dx = X\frac{a^x}{\log a} - \int \frac{a^x}{\log a}\,d.\,X. \quad (80).$$

Cela posé, en différentiant successivement la fonction X, et en représentant par X′, X″, etc., les différentielles successives, nous aurons

$d.X = X'\,dx$, $d\,X' = X''\,dx$, etc., donc $\int \frac{a^x}{\log a}\,d.X = \int \frac{a^x}{\log a} X'\,dx = \int \frac{X'}{\log a}\,a^x\,dx = \int \frac{X'}{\log a}\,d.\frac{a^x}{\log a}$, (d'après ce qui précède, art. 55) ; et en faisant $u = \frac{X'}{\log a}$ et $v = \frac{a^x}{\log a}$, nous aurons, (art, 16, C. I.), ce qui précède égal à $\frac{X'}{\log a}\frac{a^x}{\log a} - \int \frac{a^x}{\log a}\,d.\frac{X'}{\log a}$ ou $\int \frac{a^x}{(\log a)^2}\,d.X'$.

Substituant cette valeur à la place du dernier terme de l'équation (80) nous obtiendrons

$$\int X\,a^x\,dx = \frac{X.a^x}{\log a} - \frac{X'.\,a^x}{(\log a)^2} + \int \frac{a^x}{(\log a)^2}\,d.X'.$$

En continuant d'opérer de la même manière, nous parviendrons à ce développement

$$\int X\,a^x\,dx = a^x\left(\frac{X}{\log a} - \frac{X'}{(\log a)^2} + \frac{X''}{(\log a)^3} - \frac{X'''}{(\log a)^4} \ldots \pm \frac{X^{(n)}}{(\log a)^{n+1}} \pm \int \frac{a^x\,d\,X^{(n)}}{(\log a)^{n+1}}.\right.$$

(n) signifie indice n.

Si, en prenant la suite des coefficients différentiels X′, X″, X‴,... $X^{(n)}$, le dernier de ces coefficients est constant, nous aurons $d\,X^{(n)} = 0$ et alors la partie intégrale du second membre s'évanouira, et nous aurons ainsi l'intégrale du premier membre.

*Exemple.* — Soit $X = x^3$, d'où nous déduisons $X' = 3x^2$, $X'' = 2.3.x$, $X'''$ ou $X^{(n)} = 1.3.2x^0 = 3.2.1. = 3.2.$ ;

donc

$$\int x^3 a^x dx = a^x \left( \frac{x^3}{\log a} - \frac{3 x^2}{(\log a)^2} + \frac{2.3.x}{(\log a)^3} - \frac{2.3.}{(\log a)^4} \right).$$

Si nous faisons a égal au nombre e, qui est la base du système Népérien, log a devient log e, or log e = 1, en vertu de l'équation (art. 26, C. D.) : $e = e^{\log e}$, car seul $e^1 = e$ ; par conséquent

$$\int x^3 e^x dx = e^x \left( \frac{x^3}{1} - \frac{3 x^2}{1^2} + \frac{2.3x}{1^3} - \frac{2.3}{1^4} \right) = e^x (x^3 - 3 x^2 + 2.3 x - 2.3).$$

56. — On peut encore développer $\int a^x X\, dx$, de la manière suivante :
faisons $\int X\, dx = P$, d'où $d\, P = X\, dx$ ; $\int P\, dx = Q$, d'où $d\, Q = P\, dx$ ; $\int Q\, dx = R$, d'où $d.\, R = Q\, dx$, etc. ; et intégrons par parties, (art. 16, C. I.), en faisant $u = a^x$ et $v = P$, nous aurons

$$\int a^x X\, dx \text{ ou } \int a^x d\, P = a^x P - \int P.\, d.\, a^x ,$$

or, (art. 55, C.I.), $\int P.\, d\, a^x = \int P\, a^x\, dx \log a = \int a^x \log a\, P\, dx$, donc, l'expression précédente devient

$$\int a^x X\, dx = a^x P - \int a^x \log a\, P\, dx. \quad (81).$$

On a aussi

$\int a^x \log a\, P\, dx = \int a^x \log a\, d.\, Q =$ (en faisant $u = a^x \log a$ et $Q = v$) $= a^x \log a.\, Q - \int Q.\, da^x.\log a =$ (en remarquant, art. 55, que $d.\, a^x = a^x\, dx \log a$) $= a^x \log a.\, Q. - \int Q\, a^x\, dx \log a \log a = a^x \log a\, Q. - \int Q\, a^x\, dx \log a^2 = a^x \log a\, Q - \int a^x (\log a)^2\, Q\, dx$ ; et en substituant dans l'équation (81), nous aurons enfin

$$\int a^x X\, dx = a^x P - a^x \log a\, Q + \int a^x (\log a)^2\, Q\, dx.$$

En contiuant d'intégrer par parties nous aurons en général,

$$\int a^x X\, dx = a^x [P - Q \log a + R (\log a)^2 - \text{etc.}] \pm \int a^x (\log a)^n Z\, dx. \quad (82).$$

57. — Appliquons cette formule au cas où $X = \frac{1}{x^5}$ nous aurons

$$P = \int X\, dx = \int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = \frac{x^{-4}}{-4} = - \frac{1}{4 x^4} ;$$

$$Q = \int P dx = \int - \frac{1}{4x^4} dx = \int - \frac{1}{4} x^{-4} dx = - \frac{1}{4} \frac{x^{-3}}{-3} = \frac{1}{4} . \frac{1}{3} \frac{1}{x^3} = \frac{1}{3.4.x^3} ;$$

$R = \text{etc.} = -\frac{1}{2.3.4.x^2}$;

$Z = \text{etc.} = \frac{1}{2.3.4.x}$;

donc

$$\int \frac{a^x\,dx}{x^5} = a^x\left[-\frac{1}{4x^4} - \frac{\log a}{3.4.x^3} - \frac{(\log a)^2}{2.3.4.x^2}\right] - \int a^x (\log a)^3 \frac{1}{2.3.4.x}\,dx$$

ou, en mettant dans le dernier terme les constantes en dehors du signe d'intégration

$$\int \frac{a^x\,dx}{x^5} = a^x\left[-\frac{1}{4x^4} - \frac{\log a}{3.4.x^3} - \frac{(\log a)^2}{2.3.4.x^2}\right] - \frac{(\log a)^3}{2.3.4}\int \frac{a^x\,dx}{x}.$$

L'intégrale de $\frac{a^x\,dx}{x}$ est une fonction transcendante qui jusqu'à ce jour, n'a pu être déterminée.

58. — En général, on voit que quelle que soit la puissance négative et entière que l'on prenne pour exposant de x, $\left(\frac{1}{x^5} = x^{-5}\right)$, on tombera toujours sur cette transcendante $\int \frac{a^x\,dx}{x}$; car, dans les fonctions successives P, Q, R, etc., les exposants de x diminuant toujours d'une unité, la dernière de ces fonctions doit être de la forme $\frac{A}{x}$, et par conséquent la dernière intégrale sera, en mettant les constantes logarithmiques en dehors du signe d'intégration, formule (82), ou plutôt en en tenant pas compte ;

$$\int \frac{A}{x} a^x\,dx \text{ ou } A \int \frac{a^x\,dx}{x},$$

puisque A est constant.

Pour avoir une valeur approchée de l'intégrale de $\frac{A a^x\,dx}{x}$, le seul moyen c'est de substituer dans cette expression le développement de $a^x$, que nous avons exposé (art. 25 et suivants, calc. diff., où $A = \frac{\log a}{\log e} = L\,a$), et qui est :

$$1 + x\log a + \frac{x^2}{2}(\log a)^2 + \frac{x^3}{2.3}(\log a)^3 + \text{etc.},$$

et d'intégrer ensuite chaque terme. 16

59. — Lorsque dans l'équation, (art. 28, C. D.), $\frac{du}{u} = d.$ $\log u.$ ou plutôt $du = u.\ d\log u$, nous faisons $u = x^{\gamma}$, nous avons $d.x^{\gamma} = x^{\gamma}.\ d\log x^{\gamma}$ ;
par conséquent, chaque fois qu'on pourra décomposer une différentielle en deux valeurs dont l'une est représentée par $x^{\gamma}$ et l'autre par $d.\log x^{\gamma}$, l'intégrale sera $x^{\gamma} + C$.

60. — On peut aussi appliquer l'intégration par parties à celle de l'expression différentielle $X\ dx\ (\log x)^n$ ; car si nous représentons par $X_1$, l'intégrale de $X\ dx$, nous aurons $X\ dx = d.\ X_1$, et en faisant $u = (\log x)^n$ et $v = X_1$ ou $dv = d.\ X_1 = X\ d\,x$, il viendra en vertu de la formule d'intégration par parties, (art. 16, C.I.) :
$\int X\ dx\ (\log x)^n$ ou $\int (\log x)^n\ X\ dx$ ou $\int (\log x)^n\ d.\ X_1 =$ $(\log x)^n\ X_1 - \int X_1\ d.(\log x)^n = (\log x)^n X_1 - \int X_1\ n(\log x)^{n-1}$ $d.\ \log x = (\log x)^n X_1 - \int X_1 \times n(\log x)^{n-1}\ \frac{dx}{x} = X_1 (\log x)^n -$ $n \int \frac{X_1}{x}\ dx\ (\log x)^{n-1}$.

On fera dépendre ensuite cette dernière intégrale d'une autre de la forme $\int X_{11}\ dx\ (\log x)^{n-2}$, et ainsi de suite.

## Série de Bernouilli.

61. — Beaucoup d'expressions différentielles, comme nous avons vu, ne sont intégrables qu'après avoir été réduites en séries ; et pour cela, en désignant par $X\,dx$ une différentielle dans laquelle $X$ est une fonction quelconque de $x$, nous avons vu qu'il fallait préliminairement réduire en série la fonction que $X$ représente, et intégrer ensuite, après avoir substitué ce développement dans la formule $X\ dx$.

La série de Bernouilli a l'avantage de réduire $\int X\ dx$ en série, avant même que l'on ait donné la forme de $X$ ; cette série peut être considérée comme étant dans le calcul intégral ce que la formule de Taylor est dans le calcul différentiel.

Nous allons la démontrer. A cet effet, cherchons d'abord à intégrer $X\ dx$ par parties, (art. 16, C. I.). Pour cela, comparons $\int X\ dx$ au premier terme de la formule

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

et nous aurons

$$X = u\ ;\ dx = dv,\ \text{donc}\ x = v\ ;$$

par conséquent l'intégration par parties donnera

$$\int X\,dx = Xx - \int x\,dX \ldots (83).$$

L'intégrale se prenant par rapport à la variable x, nous avons, (art. 38 et 44, cal. diff.) :

$$dX = \frac{dX}{dx}\,.\,dx\ ;$$

ce qui veut dire différentielle de X par rapport à x ; par conséquent

$$\int x\,dX = \int \frac{dX}{dx}\,.\,x\,dx.$$

Intégrant encore par parties, u sera représenté dans ce cas, par $\frac{dX}{dx}$ et dv par x dx ; de sorte que nous aurons $v = \int dv = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$, et il viendra, par la formule d'intégration, (art. 16, C. I) :

$$\int \frac{dX}{dx}.\,x\,dx = \frac{dX}{dx}.\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\,.\,d.\left(\frac{dX}{dx}\right) = \frac{dX}{dx}.\,\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}.\,\frac{d^2X}{dx} = \frac{dX}{dx}.\,\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x^2 \frac{d^2X}{dx} \ldots (84).$$

Remplaçant ensuite $\frac{d^2X}{dx}$ par $\frac{d^2X}{dx^2}$ dx, ce qui veut dire différentielle de $\frac{dX}{dx}$ par rapport à x, et opérant, de la même manière qui ci-dessus, nous obtiendrons (en faisant $\frac{d^2X}{dx^2} = u$ et $x^2\,dx = dv$, d'où $v = \int dv = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$) :

$$\int x^2\,\frac{d^2X}{dx}\ \text{ou}\ \int \frac{d^2X}{dx^2}.\,x^2dx = \frac{d^2X}{dx^2}.\,\frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3}\,d.\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{d^2X}{dx^2}\,.\,\frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3}\,\frac{d^3X}{dx^2} = \frac{1}{3}\,x^3\,\frac{d^2X}{dx^2} - \int \frac{1}{3}\,x^3\frac{d^3X}{dx^2} = \frac{1}{3}\,x^3\,\frac{d^2X}{dx^2} - \frac{1}{3}\int x^3\frac{d^3X}{dx^2} \ldots (85).$$

Et ainsi de suite.

Substituant la valeur du premier membre de l'équation

(84) dons l'équation (83), nous aurons, (en remarquant que $\int x\, d X = \int \frac{dX}{dx} . x\, dx$, comme ci-dessus) :

$$\int X dx = Xx - \frac{dX}{dx} . \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \int x^2 \frac{d^2 X}{dx}, \ (86) ;$$

substituant maintenant la valeur du premier membre de l'équation (85), dans le second membre de l'équation (86) nous obtiendrons

$$\int X\, dx = X\, x - \frac{d\, X}{dx} . \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} x^3 \frac{d^2 X}{dx^2} - \frac{1}{3} \int x^3 \frac{d^3\, X}{dx^2}\right) =$$

$$X\, x - \frac{d\, X}{dx} . \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{3} x^3 \frac{d^2 X}{dx^2} - \frac{1}{2} . \frac{1}{3} \int x^3 \frac{d^3 X}{dx^2} = Xx -$$

$$\frac{d\, X}{dx} . \frac{x^2}{2} + \frac{d^2 X}{dx^2} . \frac{x^3}{1.2.3} - \frac{1}{2} . \frac{1}{3} \int x^3 \frac{d^3 X}{dx^2} .$$

Ainsi de suite.

De sorte que la série peut se mettre sous la forme

$$\int X\, dx = X x - \frac{d\, X}{dx} . \frac{x^2}{2} + \frac{d^2\, X}{dx^2} . \frac{x^3}{1.2.3} - \text{etc.} + \text{constante}. (87).$$

## QUADRATURE DES COURBES PLANES.

62. — L'aire S ou OAMP, fig, 62, d'une courbe plane représentée par l'équation $y = fx$, est donnée par l'équation $d\, S = y\, dx$, d'où $S = \int y\, dx$... (88).

En effet, si l'abscisse $OP = x$ devient $OP' = x + h$, l'aire S, qui varie évidemment avec la valeur de x et par conséquent aussi avec celle de y, deviendra S' ou OAM'P', et d'après la formule de Taylor, art. 41, nous aurons

$$\text{aire } OAM'P' = S + \frac{d\, S}{dx} h + \frac{d^2\, S}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \text{etc.},$$

donc

$$\text{aire mixtiligne } PMM'P' = S' - S = \frac{dS}{dx} h + \frac{d^2\, S}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \text{etc.}$$

Cette aire est comprise entre les deux rectangles PM' et P'M, lesquels sont représentés par les expressions analytiques suivantes :

$$\text{rectangle } PM' = P'M' \times PP' = f(x+h).\, h,$$
$$\text{rectangle } P'M = P\, M \times PP' = fx.\, h ;$$

le rapport des ces rectangles est

$$\frac{f(x+h).h}{fx.h}=\frac{f(x+h)}{fx};$$

dans le cas de la limite où h diminuant se ramène à zéro, ce rapport se réduit à

$$\frac{fx}{fx}=1.$$

Or, la surface mixtiligne PMM'P étant comprise entre les deux rectangles, diffère moins du rectangle P'M que le rectangle PM'; donc, si dans le cas de la limite nous avons $\frac{PM'}{P'M}=1$, à plus forte raison l'unité sera-t-elle la limite du rappport $\frac{\text{aire } PMM'P'}{\text{rectangle } P'M}$.

En remplaçant les termes de ces rapports par leurs expressions analytiques, nous aurons

$$\frac{\text{aire } PMM'P'}{\text{aire } P'M}=\frac{\frac{dS}{dx}h+\frac{d^2S}{dx^2}\frac{h^2}{2}+\text{etc.}}{fx.h}=\frac{\frac{dS}{dx}+\frac{d^2S}{dx^2}\frac{h}{2}+\text{etc.}}{fx};$$

passant à la limite et faisant $h=0$, nous obtiendrons $\frac{\frac{dS}{dx}}{fx}$ ou $\frac{dS}{dx\,fx}=1$, d'où $dS=fx.\,dx$; et en mettant pour fx sa valeur y, nous aurons enfin

$$dS=y\,dx, \text{ donc } \int d.\,S \text{ ou } S=\int y\,dx. \text{ C. Q. F. D.}$$

63. — Nous pouvons aussi déterminer la différentielle de l'aire d'une courbe, en faisant usage de la méthode des infiniment petits, de la manière suivante, fig, 62 :

trapèze $PMM'P'=\frac{PM+P'M'}{2}\times PP'=$(art. 3 et 139 C.D.)$=$

$$\frac{y+(y+dy)}{2}\times dx=y\,dx+\frac{dy\,dx}{2},$$

rejetant dy dx comme infiniment petit du second ordre (art. 136, C.D.), il reste y dx pour la différentielle, résultat déjà trouvé à l'art. précédent par la méthode des limites.

Fig. 63.

64. — Comme application, cherchons, fig, 63, l'aire OMP d'une portion de parabole. Soit $y^2=mx$ l'équation de cette parabole,

dont l'origine est o; en différentiant, nousaurons: $2y\,dy = m\,dx$; donc $dx = \frac{2y}{m}dy$, et par suite $y\,dx = \frac{2y^2}{m}dy$, et en intégrant, nous obtiendrons

$$\int y\,dx \text{ ou } S = \int \frac{2y^2}{m}dy = \frac{2}{m}\frac{y^3}{3} + C = \frac{2}{3}\frac{y^3}{m} + C, (89).$$

Pour déterminer la constante, et ainsi la surface S, observons que quand $y=o$, l'intégrale qui exprime la surface cherchée, est nulle en même temps ; par suite, dans ce cas, l'équation (89) se réduit à $o=o+C$, donc $C=o$, et par suite l'intégrale ou surface cherchée est :

$$\int y\,dx = S = \frac{2}{3}\frac{y^3}{m} + o = \frac{2}{3}\frac{y}{m}.y^2 = \frac{2}{3}\frac{y}{m}.mx = \frac{2}{3}xy, (90).$$

Fig. 64.

65. — Soit maintenant la parabole représentée par l'équation (fig. 64) :

$$y^2 = m + nx \ldots (91).$$

L'origine des coordonnées n'est plus ici au sommet de la courbe, car en faisant $y = o$, l'équation (91) donne $x = -\frac{m}{n}$; et puisque cette abscisse doit se terminer au point A, où $y = o$, nous porterons $\frac{m}{n}$ de A en O, et le point O sera l'origine. Cela étant, en opérant comme précédemment, nous aurons $2y\,dy = n\,dx$, donc $y\,dx = \frac{2y^2}{n}dy$ et $\int y\,dx = \int \frac{2y^2}{n}dy = \frac{2}{n}\frac{y^3}{3} + C = \frac{2}{3}\frac{y^3}{n} + C.$ (92).

Pour déterminer la constante, remarquons que la surface OMM'P, fig. 64, que représente ici l'intégrale, doit être nulle lorsque l'ordonnée M'P coïncide avec MO; or, OM étant l'ordonnée qui passe par l'origine O où l'abscisse $x=o$, l'équation (91) nous donnera, dans cette hypothèse, $y$ ou $MO = \sqrt{m+o} = \sqrt{m}$; faisant donc $\int y\,dx = o$ et $y = \sqrt{m}$ dans l'équation (92), elle devienbra

$$o = \frac{2}{3}\frac{(\sqrt{m})^3}{n} + C = \frac{2}{3}\frac{m^{3/2}}{n} + C; \text{ d'où } C = -\frac{2}{3}\frac{m^{3/2}}{n};$$

et par suite l'intégrale ou surface cherchée est

$$\int y dx = \frac{2}{3}\frac{y^3}{n} - \frac{2}{3}\frac{m^{3/2}}{n}, (93).$$

*Remarque.* — Dans ce qui précède, nous avons tiré de l'équation de la courbe la valeur de dx, pour la substituer dans la formule y dx, et intégrer ensuite. Nous aurions pu opérer autrement, en mettant dans cette expression la valeur de y plutôt que celle de dx ; car, pour obtenir l'intégrale il suffit que la différentielle proposée ne contienne qu'une variable ; donc on choisira la substitution qui exigera le moins de calculs.

66. — Une intégrale telle que $\int$ f x. dx, peut toujours représenter l'aire d'une courbe dont l'équation serait $y = fx$ ; car cette équation étant donnée, si nous substituons la valeur de y ou fx dans la formule qui donne la surface, c'est-à-dire dans $\int$ y dx, nous aurons $\int$ fx. dx pour la surface de cette courbe.

Voilà pourquoi, lorsqu'un problème nous a conduit à intégrer une fonction d'une seule variable, comme c'est le cas quand on a $\int$ fx. dx, l'on dit que ce problême est ramené aux quadratures.

67. — On appelle *intégrale indéfinie générale*, ou plus simplement *intégrale indéfinie*, une intégrale dans laquelle la constante C n'est pas encore déterminée. Ainsi, par exemple, d'une façon générale, soit y une fonction X de x, et supposons qu'en intégrant y dx au plutôt X dx, nous ayons obtenu

$$\int X\,dx = Fx + C \ldots (94).$$

C n'étant pas encore déterminé, nous avons une intégrale indéfinie.

Une intégrale où l'on n'a pas ajouté la constante arbitraire C, est dite *incomplète* ; elle est appelée *intégrale complète*, lorsqu'elle renferme cette constante arbitraire.

68. — On appelle *intégrale particulière*, une intégrale dans laquelle on a déterminé cette constante. Ainsi, lorsque par une hypothèse, nous déterminons, (comme nous l'avons déjà fait précédemment), cette constante C ; lorsque, par exemple, nous supposons que $\int$ X dx doive s'évanouir quand $x = a$, l'équation (94) donne, dans ce

cas, $o = Fa + C$, d'où $C = - Fa$, et cette équation (94) devient
$$\int X\,dx = Fx - Fa\,;$$
cette intégrale $Fx - Fa$ est donc alors ce qu'on appelle une *intégrale particulière,* et nous voyons que le nombre des intégrales particulières d'une expression différentielle est illimité, puisqu'on peut établir une infinité d'hypothèses différentes sur la constante.

69. — On appelle *intégrale définie,* une intégrale telle que $\int X\,dx = Fb - Fa$, c'est-à-dire une intégrale déterminée, dans laquelle, la variable, comme dans l'exemple ci-dessus, a été remplacée par des constantes : la variable x devenant d'abord a, puis b ; on dit alors que l'intégrale est prise depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$.

*Exemple.* — Si l'on fait l'hypothèse, comme à l'article précédent, pour déterminer une intégrale particulière, de l'intégrale nulle et de $x=a$, c'est admettre qu'en prenant, fig. 65, une abscisse $OA=a$, la surface soit comprise entre la limite AB et la limite indéfinie MP qui correspond à $OP=x$, car alors quand je fais $x=a$, MP coïncide avec BA, et la surface, l'intégrale donc, devient nulle. Par conséquent l'opération par laquelle nous déterminons une intégrale particulière est la même que celle qui fixerait la position de la limite AB, à partir de laquelle on compte l'intégrale. La seconde limite PM sera fixée à son tour invariablement, si nous donnons à x une valeur déterminée b ; alors l'intégrale particulière
$$\int X\,dx = Fx - Fa,$$
obtenue d'abord, art. précédent, deviendra
$$\int X\,dx = Fb - Fa \ldots (95),$$
et la surface A B M P, qui représente cette intégrale, ne sera plus arbitraire ; elle est devenue *intégrale définie,* et l'on dit qu'elle est prise depuis $x=a$ jusqu'à $x=b$.

Une intégrale de ce genre se désigne en employant la notation suivante :
$$\int_a^b X\,dx = Fb - Fa,$$
ce qui veut dire que l'intégrale est prise entre les limites a et b.

Maintenant, si l'on avait l'expression

$$\int_a^b X\,dx + \int_b^c X\,dx,$$

elle signifierait que l'intégrale prise depuis a jusqu'à b, a été continuée de b en c, de sorte que *l'intégrale totale* serait exprimée par $\int_a^c X\,dx.$

70. — *Application I.* — Soit à trouver l'intégrale définie de $x^m dx$. Nous avons vu que l'intégrale indéfinie est

$$\frac{x^{m+1}}{m+1} + C \ldots (96)\ ;$$

et nous sommes censés connaître deux valeurs a et b satisfaisant à cette intégrale indéfinie.

Supposons que la première a corresponde à $\int X\,dx = 0$, nous aurons

$$\frac{a^{m+1}}{m+1} + C = 0, \text{ d'où } C = -\frac{a^{m+1}}{m+1},$$

et l'intégrale particulière sera

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{a^{m+1}}{m+1}.$$

Faisons ensuite $x = b$, et nous aurons pour l'intégrale définie cherchée

$$\int x^m dx = \frac{b^{m+1}}{m+1} - \frac{a^{m+1}}{m+1}.$$

71. — On arriverait au même résultat en faisant successivement $x = a$ et $x = b$ dans l'intégrale indéfinie, et l'on aurait ainsi

$$\frac{a^{m+1}}{m+1} + C, \text{ et } \frac{b^{m+1}}{m+1} + C,$$

on retrancherait ensuite le premier résultat du second, et l'on obtiendrait comme tantôt

$$\int x^m dx = \frac{b^{m+1}}{m+1} - \frac{a^{m+1}}{m+1}.$$

*Remarque.* — En prenant cette différence, il faut toujours avoir soin de retrancher la partie qui représente la valeur de la fonction de x à l'origine de l'intégrale, c'est-à-dire dans le cas présent, la partie correspondant à $x=a$, laquelle correspond à la droite A B, fig. 65, origine de l'intégrale.

72. *Application II.* — L'équation du cercle, origine au centre, étant $x^2 + y^2 = r^2 = a^2$, en représentant le rayon par a, qui est constant, nous avons $y^2 = a^2 - x^2$ et $y = \sqrt{a^2 - x^2}$; mettant cette valeur de y dans $\int y\,dx$, nous trouverons pour l'expression de l'aire de ce cercle, (art. 62, C. I.);

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \times dx.$$

Nous avons vu, art. 17, exemple III, C. I., que la valeur de cette intégrale était

$$\frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x}{a}\right) + C.$$

La partie $\frac{1}{2} a^2 \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x}{a}\right)$ ne pouvant se déterminer qu'en supposant connu le rapport du diamètre à la circonférence, (par exemple, si $x = \frac{1}{6} a$, nous aurions $\frac{x}{a} = \frac{1}{6}$, et nous opérerions comme à l'art. 15, Cal. Int., pour déterminer l'arc correspondant), nous voyons que l'intégration de $\sqrt{a^2 - x^2} \times dx$ ne peut conduire à la solution du problème de la quadrature du cercle, art. 66. Il en est de même de la quadrature de l'ellipse qui dépend de

$$\frac{b}{a} \int \sqrt{a^2 - x^2} \times dx,$$

obtenue en mettant la valeur de y, tirée de l'équation de l'ellipse, dans la formule $\int y\,dx$.

De ces deux expressions, on tire la proportion

aire ellipse : aire cercle :: $\frac{b}{a} \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx : \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$,

ou aire ellipse : aire cercle :: $\frac{b}{a}$ : 1 ;

d'où aire ellipse $= \frac{b}{a} \times$ aire cercle $= \frac{b}{a} \pi a^2 = \pi a b$,

a étant l'un des axes de l'ellipse égal au rayon du cercle, b étant l'autre axe de l'ellipse.

## Rectification des courbes planes.

73. — Rectifier une courbe, c'est obtenir la longueur du développement de cette courbe ou d'un arc de cette courbe; c'est-à-dire la longueur d'une droite égale à cette courbe développée.

74 — Une équation entre deux variables x et y étant donnée, si l'on veut rectifier un arc de la courbe que cette équation représente, il faudra d'abord différentier cette équation ; de la différentielle obtenue, tirer la valeur de dx ou de dy, valeur que l'on substituera dans l'équation qui représente la différentielle d'un arc de courbe, obtenue art. 146 ou 88, C.D., et qui est

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad (97).$$

Après cette substitution, le radical ne contiendra plus qu'une variable, et, si ce radical est intégrable, l'intégrale que l'on obtiendra sera la longueur de S, ou de l'arc rectifié.

*Exemple.* — Soit, par exemple, à rectifier la courbe représentée par l'équation

$$y^3 = nx^2 ;$$

en la différentiant, nous avons

$$3y^2\,dy = 2nx\,dx,$$

d'où $dx = \frac{3y^2dy}{2nx}$ et $dx^2 = \frac{9}{4}\,\frac{y^4}{n^2x^2}\,dy^2$, et, en remarquant que d'après l'équation donnée, $nx^2 = y^3$, il vient $dx^2 = \frac{9}{4}$ $\frac{y^4}{ny^3}\,dy^2 = \frac{9}{4}\frac{y}{n}\,dy^2$ ;

en substituant sous le radical, nous avons

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\frac{9}{4}\frac{y}{n}dy^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{4}\frac{y}{n} + 1\right)dy^2} =$$
$$dy\sqrt{\frac{9}{4}\frac{y}{n} + 1} ;$$

et, comme dy est la différentielle de l'expression qui est sous le radical à une constante près $\frac{9}{4n}$, nous poserons, art. 9, C.I., $\frac{9}{4}\frac{y}{n} + 1 = z$, d'où nous tirerons $y = (z-1) : \frac{9}{4n} =$ $\frac{4n}{9}(z-1) = \frac{4n}{9}z - \frac{4n}{9}$ et $dy = \frac{4n}{9}\,dz$ ; substituant ces valeurs de z et de dy, l'expression ci-dessus devient

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{4n}{9}\,dz\sqrt{z} = \frac{4n}{9}\,z^{1/2}\,dz ;$$

donc

$$\int\sqrt{dx^2+dy^2} = \int \frac{4\,n}{9} z^{1/2} dz = \frac{4\,n}{9} \frac{z^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{4\,n}{9} z^{3/2} : \frac{3}{2} =$$

$$\frac{4\times 2\times n}{9\times 3} z^{3/2} = \frac{8\,n}{27} z^{3/2} + C\,;$$

et en remplaçant z par sa valeur, nous aurons pour l'expression générale de l'arc rectifié :

$$\int\sqrt{dx^2+dy^2} \text{ ou } S = \frac{8n}{27}\left(\frac{9}{4}\frac{y}{n}+1\right)^{3/2} + C.$$

Pour déterminer la constante, prenons un cas particulier ; ainsi, par exemple, remarquons que d'après la nature de l'équation de la courbe, à l'origine des abscisses, y est zéro ; donc, en supposant que l'intégrale soit nulle en ce point, (x et y étant o, on a arc = o), nous aurons

$$0 = \frac{8n}{27}\left(\frac{9}{4}\frac{0}{n}+1\right)^{3/2} + C = \frac{8n}{27}(1)^{3/2} + C = \frac{8n}{27} + C,$$

donc $C = -\frac{8n}{27}$, et par conséquent

$$\int\sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{8n}{27}\sqrt{\left(\frac{9}{4}\frac{y}{n}+1\right)^3} - \frac{8n}{27},$$

et comme de $y^3 = nx^2$, on tire $y = \sqrt[3]{nx^2} = \sqrt[3]{n} \times x^{2/3}$ et

$$\frac{y}{n} = \frac{\sqrt[3]{n}}{n} x^{2/3} = \sqrt[3]{\frac{n}{n^3}}\, x^{2/3} = \sqrt[3]{\frac{1}{n^2}}\, x^{2/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\, x^{2/3} = \frac{1}{n^{2/3}}$$

$x^{2/3} = \frac{x^{2/3}}{n^{2/3}} = \left(\frac{x}{n}\right)^{2/3}$, en substituant sous le radical, on obtient enfin pour l'expression générale de l'arc de courbe rectifié compté à partir de l'origine :

$$\int\sqrt{dx^2+dy^2} \text{ ou } S = \frac{8\,n}{27}\sqrt{\left[\frac{9}{4}\left(\frac{x}{n}\right)^{2/3}+1\right]^3} - \frac{8\,n}{27}.$$

Pour avoir l'expression de la longueur d'un arc déterminé, compris par exemple entre l'origine où x = o et le point où x = a, il suffit de remplacer dans la dernière équation x par a, (art. 69, C. I.), et nous aurons pour l'expression de l'arc rectifié compris entre ces limites :

$$S = \frac{8\,n}{27}\sqrt{\left[\frac{9}{4}\left(\frac{a}{n}\right)^{2/3}+1\right]^3} - \frac{8\,n}{27}.$$

*Remarque.* — La courbe que nous venons de rectifier est appelée *seconde parabole cubique.*

Son équation, ainsi que celle de la parabole ordinaire, n'est qu'un cas particulier de l'équation générale $Y^m = ax^n$ ; c'est pourquoi cette dernière équation est appelée *l'équation de la parabole de tous les ordres.*

On a également considéré l'équation $xy = a$ de l'hyperbole entre ses asymptotes, comme un cas particulier de l'équation $x^m y^n = a^{m+n}$, qui est nommée, pour cette raison, *l'équation de l'hyperbole de tous les ordres.*

## Aires des solides de révolution.

75. — Nous savons, qu'en géométrie, on appelle *solide de révolution*, la partie de l'espace que détermine une courbe A C, tracée sur un plan, et qui fait une révolution autour de l'axe O X, voir fig. 62.

76. — Nous allons d'abord chercher la formule générale:

$$du = 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

qui donne la différentielle de l'aire u engendrée par cette courbe ; et l'intégrale de cette différentielle sera l'aire du solide, prise d'une façon générale.

A cet effet, soient $OP = x$, $PM = y$, $PP' = h$, et par suite $PM = y = fx$ ; $P'M' = f(x+h) = fx + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2} +$ etc., d'après la formule de Taylor.

Dans ce mouvement de rotation, les ordonnées M P et M' P' décrivent des cercles inégaux qui sont les bases d'un cône tronqué dont la corde M M' est le côté. L'aire de ce cône tronqué a pour expression, (géométrie élémentaire) :

$$\frac{\text{circonf. } PM + \text{circ. } P'M'}{2} \times \text{corde } MM' ;$$

et, en représentant par $\pi$ le rapport de la circonférence à son diamètre, nous avons

$$\frac{2\pi PM + 2\pi P'M'}{2} \times \text{corde } MM' = \pi(PM + P'M') \times \text{corde } MM' ;$$

remplaçant dans cette équation, les ordonnées PM et P'M' par leurs valeurs analytiques trouvées ci-dessus, il vient en remplaçant fx par y :

aire cône tronqué MM' $= \pi \left( 2y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \text{etc.} \right)$ corde MM',
donc

$$\frac{\text{aire cône tronqué MM'}}{\text{corde MM'}.} = \pi \left( 2y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \text{etc.} \right).$$

Si, maintenant, nous représentons par u l'aire engendrée par le mouvement de rotation de l'arc MM' et par S cet arc, comme en diminuant h, cet arc tend à se confondre avec sa corde, le premier membre de l'équation précédente devra être remplacé, dans le cas de la limite, par $\frac{du}{dS}$; et le second membre se réduisant alors à $2\pi y$, puisque h est cencé réduit à zéro, nous aurons

$$\frac{du}{dS} = 2\pi y,$$

par suite $du = 2\pi y dS$ ; et, en remplaçant dS par sa valeur trouvée, art. 146, C. D, nous obtiendrons enfin pour la différentielle cherchée

$$du = 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2} \ldots (98).$$

77. — Par la méthode des infiniment petits on arriverait au même résultat, en considérant l'élément de la surface de révolution, c'est-à-dire la surface engendrée par un arc infiniment petit, comme celle d'un cône tronqué, engendré par la rotation du trapèze *élémentaire* MPP'M', (c'est-à-dire de hauteur infiniment petite, c'est-à-dire engendré par la corde infiniment petite MM'), fig. 62, autour de PP'; ce cône tronqué aurait pour expression

$$\text{circ.} \left( \frac{PM + P'M'}{2} \right) \times MM' \text{ ou } 2\pi \left( \frac{PM + P'M'}{2} \right) \times MM .$$

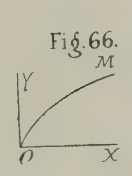
Or, $PM = y$ ; $P'M' = y + (P'M' - PM \text{ ou } dy) = y + dy$, (art 3 et 139 du C. D.) et MM' = corde infiniment petite se confondant avec l'arc infiniment petit ou d S ; donc en mettant ces valeurs dans la formule précédente, nous aurons pour l'élément de la surface de révolution, ou pour la différentielle de la surface de révolution, (art. 3 et 139, calcul différentiel) :

$$\frac{2\pi(y + y + dy)}{2} \times dS \text{ ou } \pi(2y + dy)\, dS, \text{ ou}$$

$2\pi ydS + \pi dy\,dS$ ; et en supprimant le terme $\pi\,dy\,dS$, comme infiniment petit du second ordre, (art. 136, cal. dif.), il reste $2\pi\,y\,dS$ ; remplaçant dS par sa valeur $\sqrt{dx^2+dy^2}$, (art, 146, C. D), il vient enfin pour la différentielle de la surface de révolution.

$$2\pi\,y\sqrt{dx^2+dy^2},$$

comme à l'article précédent par la méthode des limites.




78. — Comme application, cherchons l'aire du paraboloïde de révolution, qui est le solide engendré par la révolution d'un arc OM de parabole autour de son axe OX, fig. 66.

L'équation de la parabole étant ici $y^2 = px$, en différentiant nous avons

$$2y\,dy = pdx, \text{ d'où } dx = \frac{2y\ dy}{p} \text{ et } dx^2 = \frac{4y^2\,dy^2}{p^2}.$$

Substituant ces valeurs dans la formule générale, art. 76, $2\pi\,y\sqrt{dx^2+dy^2}$, nous aurons $2\pi y\sqrt{\frac{4y^2\,dy^2}{p^2}+dy^2}$, ou $2\pi y\sqrt{\left(\frac{4y^2+p^2}{p^2}\right)dy^2}$, ou $\frac{2\pi}{p}\,y\ dy\sqrt{4y^2+p^2}$.

Or, $ydy$ étant la différentielle de la quantité qui est sous le radical, à une constante 8 près, faisons, art. 9, cal. int., $4y^2+p^2=z$, d'où, en différentiant, $2.\,4\,y\,dy=dz$, ou $ydy=\frac{dz}{8}$, et substituons ces valeurs dans l'équation, il viendra

$$\frac{2\pi}{p}\,y\ dy\sqrt{4y^2+p^2} = \frac{2\pi}{p}\frac{dz}{8}\sqrt{z} = \frac{2\pi}{8p}\,z^{1/2}\,dz = \frac{\pi}{4p}\,z^{1/2}dz \text{ ; et}$$

en intégrant, nous aurons $\int\frac{2\pi}{p}\,ydy\sqrt{4y^2+p^2} = \int\frac{\pi}{4p}z^{1/2}dz =$

$$\frac{\pi}{4p}\times\frac{z^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{\pi}{4p\times\frac{3}{2}}\,z^{3/2} = \frac{\pi}{6p}\,z^{3/2}+C\ ;$$

et, en remplaçant z par sa valeur, nous obtiendrons enfin pour l'intégrale générale indéfinie ou expression générale de l'aire de ce paraboloïde

$$\int\frac{2\pi}{p}\,y\,dy\sqrt{4y^2+p^2} = \frac{\pi}{6p}(4y^2+p^2)^{3/2}+C.$$

Pour déterminer la constante, remarquons que l'intégrale ou la surface s'annule lorsque $y=0$; prenons donc ce cas particulier et cherchons la valeur de C en substituant ces valeurs dans l'équation ; cette équation se réduit à

$$0=\frac{\pi}{6\,p}(0+p^2)^{3/2}+C=\frac{\pi}{6p}\sqrt{(p^2)^3}+C=\frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{p^6}{p^2}}+C=\frac{\pi}{7}$$
$$\sqrt{p^4}+C=\frac{\pi}{6}p^2+C,\text{ d'où } C=-\frac{\pi p^2}{6};$$

substituant cette valeur de C dans l'équation générale, nous aurons l'expression

$$\frac{\pi}{6\,p}(4\,y^2+p^2)^{3/2}-\frac{\pi\,p^2}{6},\text{ ou }\frac{\pi}{6p}\left[(4\,y^2+p^2)^{3/2}-p^3\right],$$

qui représente l'intégrale ou surface indéfinie prise à partir du point o, où $y=0$.

Si nous voulons avoir l'intégrale depuis $y=0$ jusqu'à $y=b$, et ainsi obtenir une intégrale définie, ou la surface depuis $y=0$ jusqu'à $y=b$, il suffit de remplacer dans l'équation ci-dessus y par b, art. 69, C. I., et nous aurons pour cette intégrale définie

$$\frac{\pi}{6p}\left[(4\,b^2+p^2)^{3/2}-p^3\right].$$

### Cubature des solides de révolution.

79. — La différentielle générale du volume v des solides de révolution est

$$dv=\pi\,y^2\,dx\,;$$

expression dans laquelle v est le volume, x et y les coordonnées de la courbe génératrice, et $\pi$ le rapport de la circonférence au diamètre.

L'intégrale de cette expression serait la formule générale donnant le volume de ces solides.

En effet, soit v le volume engendré par la révolution de l'aire mixtiligne O A M P, fig. 62, autour de l'axe O X. Lorsque l'abscisse $OP=x$ devient $OP'=x+h$, le solide de révolution s'accroît du corps engendré par la révolution du trapèse mixtiligne PMM'P' autour du même axe. Le volume engendré par OAMP, augmentant et diminuant en même temps que x, est une fonction de x ; donc

le volume engendré par OAM′P′ est une fonction de x + h, et aura pour expression, d'après la formule de Taylor ;

$$\text{vol. OAM'P'} = v + \frac{dv}{dx} h + \frac{d^2v}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \text{etc. :}$$

par suite, en en retranchant le volume engendré par OAMP ou v, nous aurons pour le volume engendré par PMM′P′ :

$$\text{vol. PMM'P'} = \frac{dv}{dx} h + \frac{d^2v}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \text{etc..}$$

Or, ce volume étant compris entre les cylindres engendrés par les rectangles MP′ et M′P, différera moins de l'un de ces cylindres que ces cylindres ne diffèrent entre eux ; donc, si nous pouvons prouver que, dans le cas de la limite où h devient égal à zéro, le rapport de ces cylindres est l'unité, il en sera de même, à plus forte raison, du rapport du corps décrit par PMM′P′ à l'un de ces cylindres. Cela étant, nous avons évidemment

cylindre décrit par $PM' = \pi \times P'M'^2 \times P'P = \pi[f(x+h)]^2 h$;

cylindre décrit par $P'M = \pi \times PM^2 \times PP' = \pi(fx)^2 h$ ;

donc le rapport de ces cylindres est exprimé par

$$\frac{[f(x+h)]^2}{(fx)^2}.$$

En faisant h = o, nous voyons que ce rapport se réduit à $\frac{(fx)^2}{(fx)^2} = 1 =$ l'unité ; il en sera donc de même du rapport du volume engendré par PMM′P′ à celui du cylindre décrit par MP′. Or ce rapport étant représenté par

$$\frac{\text{vol. PMM'P'}}{\text{cylindre P'M}} = \frac{\frac{dv}{dx}h + \frac{d^2v}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \text{etc.}}{\pi(fx)^2 h} = \frac{\frac{dv}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2}\frac{h}{2} + \text{etc.}}{\pi(fx)^2},$$

nous avons dans le cas de la limite où h = o,

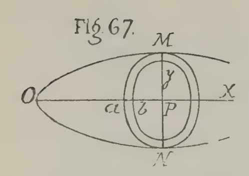
$$\frac{\frac{dv}{dx}}{\pi(fx)^2} = 1 ;$$

d'où

$$\frac{dv}{dx} = \pi(fx)^2 = \pi y^2,$$

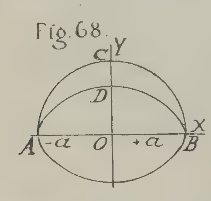
et enfin $dv = \pi y^2 dx$. (99). C. Q. F. D.

80. — On arriverait au même résultat par la méthode des infiniment petits en opérant de la manière suivante :




Concevons le volume MON, fig. 67, comme partagé en tranches infiniment minces, par des plans perpendiculaires à l'axe de révolution ; l'une quelconque de ces tranches, qui est l'élément du corps ou la différentielle du volume du corps, peut être considérée comme un cylindre dont la base est le cercle décrit par y, et dont la hauteur est égale à l'épaisseur ab représentée par dx, art. 3, C.D., par conséquent cet élément ou différentielle du volume du corps ou dv, a pour expression, la base de ce cylindre multipliée par sa hauteur ou $\pi y^2 \times dx$.

81. — *Application I.* — Cherchons le volume de l'ellipsoïde allongé, c'est-à-dire le volume engendré par la révolution de l'ellipse autour de son grand axe.




Soit l'équation de l'ellipse rapportée à son centre fig. 68 :

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Substituons cette valeur de $y^2$ dans la formule (99), donnant la différentielle générale des solides de révolution, nous aurons

$$dv \text{ ou } \pi y^2 dx = \pi \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\, dx ;$$

et, en intégrant, il viendra pour le volume indéfini :

$$\int dv \text{ ou } v = \int \pi y^2 dx = \int \pi \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) dx = \int \pi \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 dx - x^2 dx\right) = \pi \frac{b^2}{a^2} \int (a^2 dx - x^2 dx) = \pi \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right) + C. \quad (100).$$

Pour déterminer la constante, nous voyons que l'intégrale ou volume est nulle au point A, où $x = -a$ ; substituant ces valeurs, nous aurons donc ;

$$\int dv \text{ ou } o = \frac{\pi b^2}{a^2}\left[(a^2 \times -a) - \frac{a^3}{3}\right] + C = \frac{\pi b^2}{a^2}\left[\left(-a^3 - \frac{a^3}{3}\right) \text{ ou } -\frac{2a^3}{3}\right] + C = -\frac{\pi b^2}{a^2}\,\frac{2a^3}{3} + C, \text{ d'où } C = \frac{\pi b^2}{a^2}\,\frac{2}{3} a^3 ;$$

en substituant cette valeur de C, l'équation (100) deviendra la suivante qui exprimera le volume indéfini compté à partir du point A :

$\int \pi\, y^2\, dx$ ou $v = \pi \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right) + \pi \frac{b^2}{a^2} \frac{2}{3} a^3 = \pi \frac{b^2}{a^2} \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} a^3\right)$.

Pour avoir une intégrale définie ou un volume déterminé, nous devrons donner une valeur à x, dans cette dernière équation, (art. 69, C. I.) ; prenons $x = +a$, nous aurons ainsi l'intégrale (ou volume) comprise depuis $x = -a$ jusque $x = +a$, c'est-à-dire le volume complet de l'ellipsoïde qui sera donc

$\int \pi y^2\, dx = \pi \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 a - \frac{a^3}{3} + \frac{2}{3} a^3\right) = \pi \frac{b^2}{a^2}\left(a^3 - \frac{a^3}{3} + \frac{2}{3} a^3\right) = \pi \frac{b^2}{a^2} \frac{4}{3} a^3$.

Si $b = a$, ce volume deviendra celui de la sphère, et aura pour expression

$$\pi \frac{a^2}{a^2} \frac{4}{3} a^3 \text{ ou } \frac{4}{3} \pi a^3.$$

Cette expression se décompose en

$$\frac{2}{3} \pi a^2 \times 2a ;$$

or $\pi a^2 \times 2a =$ le volume du cylindre circonscrit à la sphère, donc le volume de la sphère vaut les $\frac{2}{3}$ du volume du cylindre circonscrit.

82. — *Application II*. — Soit encore à déterminer le volume du paraboloïde de révolution. A cet effet, prenons la parabole de tous les ordres pour génératrice, dont l'équation, (art. 74, remarque), est

$$y^m = a\, x^n \text{ ou } y = a\, x^{n/m}. \quad (1)$$

Substituons cette valeur dans la formule générale (99), nous aurons

$$d\, v = \pi\, a^2 x^{\frac{2n}{m}} dx ;$$

d'où

$v = \int \pi\, a^2 x^{\frac{2n}{m}} dx = \pi a^2 \frac{x^{\frac{2n}{m}+1}}{\frac{2n}{m}+1} + C = \frac{\pi a^2}{\frac{2n+m}{m}} \times x^{\frac{2n+m}{m}} + C = \frac{m \pi a^2}{2n+m} x^{\frac{2n+m}{m}} + C.$

(1) a étant une constante qui représente aussi bien $\sqrt[m]{a}$ que a.

Pour déterminer la constante, le volume étant nul au soumet que nous supposerons placé à l'origine des coordonnées, fig. 69 où $x = o$, il vient

$$o = \frac{m\pi a^2}{2n+m} o^{\frac{2n+m}{m}} + C = o + C, \text{ donc } C = o\ ;$$

et le volume indéfini du paraboloïde, compté à partir du sommet placé à l'origine des coordonnées est donc

$$v = \frac{m\pi a^2}{2n+m} x^{\frac{2n+m}{m}}.$$

Lorsque $m=2$ et $n=1$, on a $y = a x^{1/2}$, d'où $y^2 = a^2 x^{2/2} = a^2 x$, ce qui est l'équation de la parabole ordinaire, dans laquelle $a^2$ tient la place de la constante p de l'équation de cette courbe.

Dans cette hypothèse, le volume compté comme ci-dessus de la parabole ordinaire sera

$$v = \frac{2\pi a^2}{2+2} x^{\frac{2+2}{2}} \text{ ou } \frac{\pi a^2}{2} x^2 \text{ ou } \pi a^2 x \frac{x}{2}\ ;$$

or, nous avons ci-dessus $a^2 x = y^2$, substituant, il vient pour ce volume

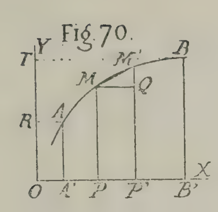
$$v = \pi . y^2 \frac{x}{2}.$$

L'aire du cercle dont PM est le rayon, fig. 69, étant $\pi y^2$, et le volume du cylindre engendré par la révolution de OAMP autour de OX étant donc $\pi y^2 x$, il résulte de là que l'expression ci-dessus $v = \pi y^2 \frac{x}{2}$ représente la moitié du volume de ce cylindre : donc le volume de la parabole ordinaire est la moitié du volume du cylindre circonscrit.

Fig. 69.

## Expressions générales du volume et de l'aire des corps de révolution.

83. — Nous avons déjà examiné art. 76 et 79, comment on peut trouver ces expressions. On peut encore les obtenir de la manière suivante.




84. — Soit une courbe AB, fig. 70, représentée par l'équation $y = f x$. Si nous considérons le corps engendré par la figure ABB'A' tournant autour de l'axe OX, nous pouvons prendre, pour élément de ce corps, le volume du cylindre MPP'Q, car MM'Q est infiniment petit par rapport à MPP'M', art. 129 et 132, C. D. Or, ce volume a pour mesure $\pi . MP^2 . MQ$ ; mais $MP = y$ et $MQ = OP' - OP = dx$, (art. 3. calc. diff.) ; donc l'expression ci-dessus, en y substituant ces valeurs, devient, $\pi . y^2 dx$, formule qui peut donc être considérée comme la différentielle, dv, du volume v du corps ; par conséquent, en représentant par a et b les limites $OA' = a$, et $OB' = b$, entre lesquelles nous prendrons l'intégrale, (art. 69, C.I), il viendra pour l'expression du volume du corps

$$\int dv \text{ ou } v = \int_a^b \pi y^2 dx,$$

ou en mettant la constante $\pi$ en dehors du signe d'intégration

$$v = \pi \int_a^b y^2 dx. \quad (101).$$

85. — Soit encore la courbe plane A B, même figure, tournant autour de OX, elle engendre une surface de révolution (qui est celle du corps considéré à l'article précédent), et dont l'élément peut être supposé se confondant avec la surface conique décrite par la corde MM'.

Or, cette surface conique a pour mesure $2\left(MP + \frac{M'Q}{2}\right)$ $\pi . MM'$ ; mais $MP = y, \frac{M'Q}{2} = \frac{dy}{2}$ et $MM' = d\,S$, donc. en substituant ces valeurs, il viendra pour l'expression de la différentielle de l'aire A du corps,

$$d. A = 2\left(y + \frac{dy}{2}\right)\pi . d. S = 2 \pi y dS + \pi dy dS,$$

et, en négligeant la quantité du deuxième ordre $\pi$ dy dS, (art. 137 et 136 C.D.), il viendra

$$d. A = 2 \pi y dS,$$

et, par suite, la surface de révolution comprise, par exem-

ple, entre les ordonnées OR = AA′ = $y_1$ et OT = BB′ = $y_2$ sera

$$\int d.\ A \text{ ou } A = \int_{y_1}^{y_2} 2\pi\, y\, dS,$$

ou, en mettant les constantes en dehors du signe d'intégration

$$A = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} y\, dS \quad (102)\ ;$$

ou en prenant l'intégrale ou surface entre les abscisses OA′=a=$x_1$ et OB′=b=$x_2$, on a la même surface, et il vient

$$A = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\, dS\ldots (103).$$

86. — Les formules (101), (102) ou (103), sont générales; pour les appliquer à des cas particuliers, il suffira d'y remplacer a, b, $y_1$, $y_2$, $x_1$, $x_2$, dx, dS, par leurs valeurs relatives à la courbe que l'on considérera.

## Intégration des fonctions de deux variables.

87. — Nous avons appris jusque maintenant à intégrer des fonctions différentielle ne contenant qu'une seule variable. Lorsqu'il y a, dans les équations différentielles à intégrer, deux ou un plus grand nombre de variables, l'intégration se fait à l'aide de méthodes diverses dont nous allons exposer les deux principales. Elle consistent :

1° Dans la séparation des variables pour pouvoir leur appliquer ensuite les procédés que nous avons employés pour une seule variable ;

2° Dans la recherche des facteurs propres à rendre une *différentielle exacte.* On appelle différentielle exacte, une équation différentielle qui, comme m dx+n dy=o, a été obtenue par le seul procédé de la différentiation ; ou qui ne seraitpas égale à zéro, mais qu'on aurait trouvée par le seul moyen de la différentiation. Lorsqu'une équation différentielle M dx+N dy=o n'est pas une différentielle exacte, on ne peut l'intégrer qu'après l'avoir rendue une différentielle exacte par quelque modification qu'on lui aura fait subir.

## Première méthode principale d'intégration des fonctions de plusieurs variables. Séparation des variables ; équation liniaire du premier ordre ; et propriétés des fonctions homogènes.

88. — Nous savons, d'après ce qui précède, que pour être intégrable, toute différentielle doit être de la forme $\varphi x\, dx$ ; on se trouverait donc arrêté dans l'intégration d'une équation si elle contenait des termes tels que $y^2 dx$, $xy dx$, $\frac{dx}{y}$, etc. Cependant il ne résulte pas de cela que l'intégration est impossible ; car, si par des opérations algébriques, nous pouvions faire en sorte que chaque terme ne contint plus qu'une seule variable, c'est-à-dire si nous effectuions la *séparation des variables*, l'intégration pourrait ensuite se faire.

89. — Ainsi, pour premier exemple, soit à intégrer l'équation différentielle $x\, dy + y\, dx = 0$. En divisant cette équation par $xy$, elle devient ;

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0,$$

et, en intégrant, art. 28, C.D., il vient

$$\log y + \log x = \int 0 = \text{constante} = C ;$$

ou en représentant par A le nombre dont C est le logarithme, cette expression pourra se mettre sous la forme

$$\log y + \log x = \log A,$$

et par suite, d'après la théorie des logarithmes (Algèbre) :

$$\log xy = \log A ;$$

passant aux nombres, il vient

$$xy = A.$$

90. — Comme second exemple, soit à effectuer la séparation des variables de l'équation plus générale

$$\varphi x . dy + Fy . dx = 0 ;$$

divisons cette équation par $\varphi x\, Fy$, nous aurons pour équation dans laquelle les variables sont séparées :

$$\frac{dy}{Fy} + \frac{dx}{\varphi x} = 0.$$

*Exemple*. — Soit à intégrer

$$(1+x^2)\, dy = dx\sqrt{y},$$

divisons par $1+x^2$ qui représente $\varphi x$, nous obtiendrons

$$dy = \frac{dx}{1+x^2}\sqrt{y},$$

divisons également par $\sqrt{y}$ qui représente Fy, nous aurons

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dx}{1+x^2},$$

équation dans laquelle les variables sont séparées ; en intégrant, il viendra

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} \text{ ou } \int \frac{1}{\sqrt{y}}\, dy \text{ ou } \int \frac{1}{y^{1/2}}\, dy \text{ ou } \int y^{-1/2}\, dy = \int \frac{dx}{1+x^2},$$

ou

$$\frac{y^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} \text{ ou } \frac{y^{1/2}}{\frac{1}{2}} \text{ ou } \frac{\sqrt{y}}{\frac{1}{2}} \text{ ou } 2\sqrt{y} = \int \frac{dx}{1+x^2},$$

or, art. 13, C. I.

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc}\,(\text{tang} = x) + C;$$

donc, enfin on a pour l'intégrale cherchée

$$2\sqrt{y} = \text{arc tang } x + C.$$

91. — Nous pourrions encore séparer les variables par la division dans la formule

$$\varphi x . Fy . dx + \varphi' x . F'y . dy = 0;$$

en effet, il suffit de diviser par $Fy . \varphi' x$, et il vient

$$\frac{\varphi x . dx}{\varphi' x} + \frac{F'y . dy}{Fy} = 0;$$

*Exemple.* — Soit l'équation

$$x^2 y\, dx + (3y+1)\, dy\sqrt{x^3} = 0;$$

divisons par $y\sqrt{x^3}$, il viendra

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^3}}\, dx + \frac{3y+1}{y}\, dy = 0;$$

équation dans laquelle les variables sont séparées ; il ne reste plus qu'à intégrer.

92. — L'intégration pourrait évidemment encore se faire si la proposée contenait plus de deux variables, et qu'on pût la ramener à ne renfermer dans chaque membre que des différentielles dont nous connaissons l'intégrale ; par exemple, les fonctions

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2},\ x\,dy + y\,dx,\ \text{etc.},$$

dont les intégrales sont, respectivement, $\frac{x}{y}$, art. 11, et $xy$, art. 9, du C.D.

93. — Nous allons faire connaître une équation importante, qui porte le nom d'*équation linéaire du premier ordre*, et qui est obtenue en séparant les variables dans l'équation

$$dy + Py\,dx = Q\,dx \ldots (104),$$

équation dans laquelle P et Q sont des fonctions de x ; en séparant les variables nous obtiendrons donc l'équation linéaire du premier ordre savoir :

$$y = e^{-\int P\,dx}\left(\int Q\,e^{\int P\,dx}\,dx + C\right) \ldots (105).$$

En passant, disons qu'une équation différentielle entre deux variables x et y, est dite linéaire lorsque les expressions $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$ ne sont élevées, dans cette équation, qu'au premier degré ; elle est dite : du premier ordre quand on n'a que les différentielles premières ; du second ordre, quand on a, en outre, des différentielles secondes ; et en général du $n^{ième}$ ordre lorsqu'on arrive jusqu'à des différentielles $n^{ièmes}$ comme $\frac{d^ny}{dx^n}$.

D'après cela, en admettant que A, B, C, D, ... N, X, soient des fonctions de x, l'équation linéaire du $n^{ième}$ ordre sera

$$Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots + N\frac{d^ny}{dx^n} = X.\ (106).$$

Lorsque cette équation est du premier ordre, elle se réduit à

$$Ay + \frac{B\,dy}{dx} = X \ldots\ldots (106^{bis})\,;$$

ceci arrivera quand l'équation qu'on a différentiée est du premier degré en x, car alors $\frac{d^2y}{dx^2}$ et les autres différentielles successives égalent zéro; exemple, si l'on a l'équation $y = 2ax$, il vient $\frac{dy}{dx} = 2a$ ; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\,2a}{dx} = \frac{0}{dx} = 0$.

Chassant le dénominateur dans l'équation $(106^{bis})$ et di-

visant par B, cette équations deviendra $\frac{A}{B}$ y dx + dy = $\frac{X}{B}$ dx, et en faisant $\frac{A}{B} = P$ et $\frac{X}{B} = Q$, nous aurons

$$dy + Py\,dx = Q\,dx.$$

Revenons maintenant à la recherche de l'équation linéaire du premier ordre en séparant les variables dans l'équation

$$dy + Pydx = Q\,dx,$$

P et Q, avons-nous vu, étant des fonctions de x.

A cet effet, égalons y au produit des deux indéterminées X et z, nous aurons

$$y = z\,X, \text{ et par suite, art. 9, C. D.,}$$
$$dy = zdX + Xdz\,;$$

substituant ces valeurs dans l'équation (104), nous obtiendrons $z\,d\,X + X\,dz + Pz\,X\,dx = Q\,dx$, ou

$$zdX + X\,(dz + Pz\,dx) = Q\,dx.$$

X étant une fonction arbitraire, nous la déterminerons en égalant entr'eux les termes qui ne sont pas sous la parenthèse, ce qui décomposera l'équation précédente en les deux suivantes :

$$X\,(dz + Pz\,dx) = 0, \quad z\,d\,X = Q\,dx\,;$$

la première donne $dz + Pz\,dx = 0$, d'où $\frac{dz}{z} = -P\,dx$, ou, (art. 28, C.D.), $\log z = -\int P\,dx$ ; et, en observant que log e équivaut à l'unité, puisque e est la base du système de logarithmes employé ici, ou système Népérien, il vient

$$\log z = -\int P\,dx . \log e = \log (e^{-\int P\,dx})\,;$$

passant aux nombres, nous aurons

$$z = e^{-\int P\,dx}\,;$$

la seconde donne

$$d\,X = \frac{Q\,dx}{z} = Q\,dx\,\frac{1}{e^{-\int P\,dx}} = Q\,dx\,e^{\int P\,dx} = Q\,e^{\int P\,dx}\,dx\,;$$

donc $\qquad X = \int d\,X = \int Q\,e^{\int P\,dx}\,dx + C\,;$

substituant ces valeurs de z et de X dans l'équation

$$y = z\,X,$$

nous aurons enfin, l'équation linéaire du premier ordre (105) :

$$y = e^{-\int P\,dx}\left(\int Q\,e^{\int P\,dx}\,dx + C\right).$$

94. On peut toujours opérer la séparation des variables dans les équations différentielles du premier ordre à deux

variables, lorsqu'elles sont homogènes, et par suite on peut leur appliquer après séparation, les procédés d'intégration que nous avons examinés précédemment.

Nous savons (Algèbre) qu'une équation est dite homogène quand tous ses termes, considérés par rapport aux variables, sont de même dimension. Ainsi, par exemple, l'équation $a\,x^6 + bx^4\,y^2 - c\,x\,y^5 = 0$,
est homogène, parce que la somme des exposants des variables, dans chaque terme, est 6 ; remarquons que y n'entre pas dans le premier terme de l'équation, mais cette variable peut être considérée comme y existant affectée de l'exposant zéro, car nous savons que $y^0 = 1$, algèbre.

95. — Soit une fonction générale z, de x et de y, composée de termes homogènes tels que $A\,x^p\,y^q$, $B\,x^{p'}\,y^{q'}$, $C\,x^{p''}\,y^{q''}$, etc., dont la somme des exposants est n, elle peut être ramenée à la forme

$$z = Q\,x^n,$$

Q étant une fonction de $\frac{y}{x}$.

En effet, n étant la somme des exposants dans chaque terme, nous avons

$$p + q = n,\ p' + q' = n,\ p'' + q'' = n,\ \text{etc.}$$

Cela posé, si nous divisons tous les termes par $x^n$, l'égalité de la somme des exposants, dans chaque terme, après la division, subsistera encore ; et ces termes qui sont donc encore homogènes et de zéro degré ou n—n, peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{A\,x^p\,y^q}{x^n} = \frac{A\,y^q}{x^{n-p}} = \frac{A\,y^q}{x^q} = A\left(\frac{y}{x}\right)^q;$$

$$\frac{B\,x^{p'}\,y^{q'}}{x^n} = \frac{B\,y^{q'}}{x^{n-p'}} = \frac{B\,y^{q'}}{x^{q'}} = B\left(\frac{y}{x}\right)^{q'};$$

etc.,

donc $$\frac{z}{x^n} = A\left(\frac{y}{x}\right)^q + B\left(\frac{y}{x}\right)^{q'} + \text{etc.} = F\left(\frac{y}{x}\right);$$

fonction de zéro degré, n—n.

En faisant $\frac{y}{x} = q$, cette équation deviendra

$$\frac{z}{x^n} = F.\,q,\ \text{ou}\ z = x^n\,Fq\ ;$$

et en représentant Fq par Q, nous aurons enfin

$$z = Q x^n (107);$$

fonction de n degré.

Ce qui précède pourra nous aider à séparer les variables dans les équations dont il s'agit à l'art. 94.

96. — Soit, en effet, maintenant l'équation différentielle

$$M\,dx + N\,dy = 0,$$

dans laquelle les coefficients M et N sont des fonctions homogènes, de deux variables x et y, d'une dimension n. En divisant cette équation par $x^n$, nous pourrons donc, d'après l'article précédent, la mettre sous la forme :

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) dx + F\left(\frac{y}{x}\right) dy = 0;$$

et en faisant $\frac{y}{x} = z$, elle deviendra

$$dx\,\varphi z + dy.\,F z = 0,$$

ou $$\varphi z + F z \frac{dy}{dx} = 0 \ldots (108).$$

Afin d'achever d'éliminer y au moyen de l'équation $\frac{y}{x} = z$, ou plutôt $y = z x$, différentions cette dernière équation et nous obtiendrons

$$dy = d z x = z\,dx + x\,dz, \text{ art. 9, C.D.};$$

d'où $$\frac{dy}{dx} = z + \frac{xdz}{dx};$$

substituant cette valeur dans l'équation (108), il viendra

$$\varphi z + Fz\left(z + \frac{xdz}{dx}\right) = 0,$$

d'où $$\frac{x\,dz}{dx} Fz = -\varphi z - z.\,Fz,$$

ou $$\frac{x\,dz}{dx} = -\frac{\varphi z}{Fz} - z = -\frac{\varphi z + z\,Fz}{Fz},$$

et pour séparer les variables,

$$\frac{dx}{x\,dz} = -\frac{Fz}{\varphi z + z\,Fz},$$

ou $$\frac{dx}{x} = -\frac{dz.\,Fz.}{\varphi z + z\,Fz},$$

par conséquent, en intégrant, (art. 28, C. D.),

$$\int \frac{dx}{x} \text{ ou } \log x = -\int \frac{dz.\,Fz}{\varphi z + z Fz} + C.$$

Après intégration, il suffira de remplacer dans le résultat z par sa valeur.

97. — *Exemple.* — Soit l'équation

$$x^2\,dy = y^2\,dx + xy\,dx,$$

(qui peut être mise sous la forme $(y^2 + xy)\,dx + (-x^2)\,dy = 0$; et la fonction M, art. précédent, est ici $y^2 + xy$, la fonction N est $-x^2$).

Faisons $\frac{y}{x} = z$ ou $y = zx$, nous aurons, art. 9, C. D.

$$dy = z\,dx + x\,dz,$$

et en substituant ces valeurs l'équation deviendra

$$x^2(z\,dx + x\,dz) = z^2x^2dx + x^2z\,dx\,;$$

ou $$x^2z\,dx + x^3dz = z^2x^2dx + x^2z\,dx\,;$$

ou $$x^3dz = z^2x^2dx,$$

et en divisant par $x^2$, (qui remplace ici $x^n$ de l'art. précédent) nous obtiendrons

$$x\,dz = z^2dx,$$

divisant par $z^2$ et par x,

$$\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x},$$

intégrant, il viendra

$$\int \frac{dx}{x} \text{ ou, (art. 28, C.D.), } \log x = \int dz\,z^{-2} = \frac{z^{-2+1}}{-2+1} = \frac{z^{-1}}{-1} =$$

$$-\frac{1}{z} + C = \text{en remplaçant z par } \frac{y}{x} = -\frac{1}{\frac{y}{x}} + C = -\frac{x}{y} + C.$$

98. — En général, lorsqu'on a une fonction homogène des variables x, y, z, etc., on parviendra toujours à séparer l'une des variables, par exemple x, en faisant

$$y = tx,\ z = ux, \text{ etc.}$$

En effet, soit $M\,dx + N\,dy + P\,dz = 0$, une équation homogène dans laquelle M, N, P, sont des fonctions, de même degré, des trois variables x, y, z ; ces fonctions M, N, P, contiennent des termes tels que $A\,x^p\,y^q\,z^r$, $B\,x^{p'}\,y^{q'}\,z^{r'}$, etc., et l'on a $p+q+r = p'+q'+r' =$ etc. $= n$.

Si l'on substitue les valeurs $y = tx$, $z = ux$, dans l'un de ces termes, par exemple, dans $A\,x^p\,y^q\,z^r$, il deviendra

$A x^p y^q z^r = A x^p t^q x^q u^r x^r = x^{p+q+r} A t^q u^r = x^n A t^q u^r$.

La même chose ayant lieu pour les autres termes, si l'on y substitue les valeurs de y et de z en fonction de x, l'équation $M\,dx + N\,dy + P\,dz = 0$ aura $x^n$ pour facteur commun ; supprimant donc ce facteur, et remarquant que dy et dz se changent en d. tx et en d. ux, l'équation donnée prendra la forme

$$(A t^q u^r + B t^{q'} u^{r'} + \text{etc.})dx + (\ldots\ldots)dy + (\ldots)dz = 0,$$

ou $$\varphi(t,u)\,dx + F(t,u)\,dy + f(t,u)\,dz = 0,$$

ou $$\varphi(t,u)\,dx + F(t,u)\,d.\,tx + f(t,u)\,d.\,ux = 0,$$

ou, en effectuant la différentiation de d.tx et d.ux, (art. 9 C.D.),

$$\varphi(t,u)\,dx + F(t,u)(t\,dx + x\,dt) + f(t.u)(u\,dx + x\,du) = 0 ;$$

d'où

$$[\varphi(t,u) + tF(t,u) + uf(t,u)]dx + [F(t,u)dt + f(t,u)du]x = 0,$$

ou

$$[\varphi(t,u) + tF(t,u) + uf(t,u)]\,dx = -[F(t,u)dt + f(t,u)du]x,$$

et, par suite,

$$\frac{dx}{x} = -\frac{F(t,u)dt + f(t,u)du}{\varphi(t,u) + tF(t,u) + uf(t,u)},$$

et la variable x est séparée.

99.— On peut rendre une équation homogène en employant des exposants indéterminés, sous certaine condition.

Soit, par exemple, à rendre homogène l'équation

$$ay^m x^n\,dx + bx^p\,dx + cx^q\,dy = 0 ;$$

la condition qui doit être remplie est que $\frac{p-n}{m} = p - q + 1$.

En effet, faisons $y = z^K$, et puisque l'exposant K n'est pas une variable, mais une constante indéterminée, différentions par l'art. 12 C.D., et nous aurons

$$dy = dz^K = K z^{K-1} dz,$$

$$y^m = z^{Km},$$

substituant ces valeurs dans l'équation donnée, il viendra

$$az^{Km} x^n\,dx + bx^p\,dx + cx^q K z^{K-1}\,dz = 0,$$

ou, en réunissant les constantes dans le dernier terme du premier membre,

$$az^{Km} x^n\,dx + bx^p\,dx + cK x^q z^{K-1}\,dz = 0 ;$$

équation qui sera homogène si l'on a

$$Km + n = p,\ q + K - 1 = p ;$$

éliminant l'indéterminée $K$, nous aurons

$$K = \frac{p-n}{m} = p-q+1,$$

et

$$\frac{p-n}{m} = p-q+1,$$

est donc l'équation de condition qui doit exister pour que l'équation donnée puisse être homogène par la substitution de $y = z^K = z^{p-q+1}$.

100. — Lorsque l'on a une fonction homogène z, de degré n, entre deux variables x et y, et dont la différentielle est $M dx + N dy$, on peut poser l'équation

$$M x + N y = n z \ldots (109).$$

En effet, on a, par hypothèse,

$$M dx + N dy = d.\, z \ldots (110);$$

faisons $\frac{y}{x} = q$, et comme n est la somme des exposants des variables de chacun des termes de la fonction z, nous aurons, art. 95, C.I.,

$$Q x^n = z \ldots (111);$$

en remarquant que Q, art. 95, C.I., ne contient que la seule variable q, puisque la fonction d'où provient Q ne contenait que des termes en $\frac{y}{x}$, qui se sont changés en q par la substitution de q à la place de $\frac{y}{x}$. Cela étant, remplaçons dans l'équation (110), y par sa valeur qx, substitutons $Q x^n$ à z et représentons par M' et N' ce que deviennent alors les fonctions M et N ; l'équation (110) deviendra

$$M' dx + N' d.\, qx = d.\, Q x^n \ldots (112);$$

remplaçons d. qx, par sa valeur (art. 9, C. D.), $q\, dx + x\, dq$, nous aurons

$$M' dx + N' q\, dx + N' x\, dq = d.\, Q x^n,$$

ou

$$(M' + N' q)\, dx + N' x\, dq = d.\, Q x^n;$$

donc, la différentielle totale de $Q x^n$, c'est-à-dire en considérant Q et x comme variables, est

$$(M' + N'q)\, dx + N'x\, dq. \ (113).$$

Mais, (art. 9 et art. 12, C. D.), la différentielle totale de $Q x^n$, (puisque Q est une fonction également des variables), est aussi :

$$Q n x^{n-1} dx + x^n d.\, Q \ldots (114).$$

Or, la différentielle de la fonction Q de q, art. 95, C.I., est, art. 12, C. D., de la forme Fq.dq, donc la différentielle totale de $Qx^n$ peut aussi se mettre sous la forme

$$Q n x^{n-1} dx + x^n Fq . dq \ldots (115).$$

En comparant ces expressions de la différentielle totale de $Qx^n$, nous voyons que les premiers termes représentent également la différentielle de $Qx^n$ prise par rapport à x, c'est-à-dire en considérant x comme seule variable; nous avons donc

$$M' + N'q = n Q x^{n-1};$$

dans cette équation remettons y au lieu de qx, M′ et N′ redeviennent M et N, et il vient

$$M + N \frac{y}{x} = n Q x^{n-1},$$

ou, en multipliant par x,

$$M x + N y = n Q x^n = n z. \text{ C.Q.F.D.}$$

101. — Lorsqu'on a des fonctions homogènes d'un nombre quelconque de variables et de degré toujours n, on peut également leur appliquer le théorème que nous venons de démontrer. Ainsi, par exemple, si l'on avait l'équation différentielle de degré n :

$$M\, dx + N\, dy + P\, dt = dz,$$

il suffirait de faire $\frac{y}{x} = q$, $\frac{t}{x} = r$, pour prouver, par un raisonnement semblable à celui que nous avons employé, qu'on doit avoir, (éq. 111), $z = x^n F(q, r)$, et par conséquent

$$M x + N y + P t = n z.$$

## Conditions d'intégrabilité des fonctions de deux variables.

102. — Une différentielle $M\, dx + N\, dy = 0$, étant donnée, il n'existe pas toujours une équation qui, étant différentiée, donne cette différentielle. Ainsi, par exemple, supposons qu'on différentie l'équation $f(x,y) = 0$, et qu'on obtienne pour différentielle $m\, dx + n\, dy = 0$, m et n étant des fonctions de x et de y. Multiplions cette différentielle par une fonctions de x, soit $\varphi x$, nous aurons $m . \varphi x . dx + n . \varphi x . dy = 0$ ; représentons $m . \varphi x$ et $n \varphi x$, respectivement par

M et N, il viendra $M\,dx + N\,dy = o$, et nous voyons que cette dernière équation, de même forme que $m\,dx + n\,dy = o$, et qui a ses coefficients M et N différents de m et de n, et qui pourrait être donnée à la place de $m\,dx + n\,dy = o$, ne pourrait résulter du seul procédé de la différentiation de $f(x,y) = o$, par conséquent pour intégrer $M dx + N dy = o$, il faudrait d'abord lui faire subir quelque modification, ici, diviser par $\varphi x$, la ramener ainsi à $m\,dx + n\,dy = o$ (qui est intégrable), et en intégrant cette dernière on obtiendrait $f(x, y) = o$.

Il en serait de même si l'on combinait arbitrairement $m\,dx + n\,dy = o$, avec l'équation primitive $f\,(x,y) = o$ ; par exemple, en éliminant un ou plusiers termes entre $m\,dx + n\,dy = o$ et $f(x,y) = o$, on pourrait arriver à une équation $M'\,dx + N'\,dy = o$, dans laquelle les coefficients M′ et N′ seraient différents de m et de n.

103. — Une expression différentielle qui, comme $m\,dx + n\,dy = o$, à été obtenue par le seul procédé de la différentiation, est appelée une différentielle exacte ; on lui donnerait encore ce nom si elle n'était pas égale à zéro, du moment qu'on l'aurait obtenue par le seul procédé de la différentiation.

Une expression différentielle qui, comme $M\,dx + N\,dy = o$, n'est pas une différentielle exacte, comme nous avons vu, ne peut être intégrée qu'après l'avoir rendue différentielle exacte en lui faisant subir quelque modification.

Il résulte donc de ce qui précède qu'une différentielle exacte est intégrable, une différentielle qui n'est pas une différentielle exacte, n'est intégrable qu'après avoir été rendue différentielle exacte.

Mais comment reconnaître une différentielle exacte et quel est le moyen d'intégrer cette équation ; (ces questions constituent le problème appelé problème d'Euler, parce que, le premier, il l'a résolu). C'est ce que nous allons examiner.

104. — Tout d'abord, nous rappellerons que nous avons

convenu, art. 38, calc. dif., que l'expression $\frac{dz}{dx}$ signifiait que la fonction z de x et de y a été différentiée par rapport à x et divisée par dx ; que $\frac{d^2z}{dx\,dy}$ veut dire que la fonction $\frac{dz}{dx}$ a été différentiée par rapport à une autre variable y, puis divisée par dy.

L'expression $\frac{d^2z}{dy\,dx}$, signifie, au contraire, que l'on a pris d'abord le coefficient différentiel de z par rapport à y, et ensuite par rapport à x.

Une expression telle que $\frac{d^3z}{dx\,dy\,du}$ signifie que, dans une fonction z de trois variables x, y, u, on a pris d'abord le coefficient différentiel de z par rapport à x, et ensuite le le coefficient différentiel de $\frac{dz}{dx}$ par rapport à y, et enfin le coefficient différentiel de $\frac{d^2z}{dx\,dy}$ par rapport à u.

De même l'expression $\frac{d^6z}{dx^2\,dy^3\,du}$ signifie que l'on a opéré six différentiations successives sur z, les deux premières par rapport à x, les trois suivantes par rapport à y et la dernière par rapport à u.

Supposons qu'une fonction z de plusieurs variables ait pour différentielle totale, c'est-à-dire par rapport à toutes ses variables :

$$dz = A\,dx + B\,dy + C\,du + \text{etc.} ;$$

le rapport $\frac{dz}{dx}$ n'est rien d'autre que le coefficient différentiel A, ou le coefficient différentiel de z par rapport à x seulement.

*Le rapport de la différentielle totale*, Adx + Bdy + Cdu + etc. *ou dz, à dx*, ne pourrait donc pas se représenter par $\frac{dz}{dx}$ ; on devrait l'indiquer de l'une des manières suivantes : $\frac{d(z)}{dx}$ ou $\frac{1}{dx}$ dz, afin de le distinguer de $\frac{dz}{dx}$ qui n'indique, comme nous venons de voir, que le rapport à dx de la différentielle partielle de z par rapport à x.

105. — Cela étant, le théorème d'Euler est basé sur la proposition suivante, que nous avons démontré à l'art. 97, calcul différentiel.

Une fonction z de deux variables x et y étant donnée, si l'on prend le coefficient différentiel de z, d'abord par rapport à x, et qu'ensuite on prenne le coefficient différentiel de $\frac{dz}{dx}$ par rapport à y ; on aura le même résultat que si l'on eût pris d'abord le coefficient différentiel de z par rapport à y, et ensuite le coefficient différentiel de $\frac{dz}{dy}$ par rapport à x ; on exprime cette proposition par la formule

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} = \frac{d^2z}{dy\,dx}.$$

Par exemple, soit $z = x^2 + xy$,
en différentiant par rapport à x, il viendra

$$dz = 2x\,dx + y\,dx, \text{ d'où } \frac{dz}{dx} = 2x + y;$$

et, en différentiant cette dernière expression par rapport à y, nous aurons

$$d\left(\frac{dz}{dx}\right) \text{ ou } d.(2x+y) = dy, \text{ d'où } d.\frac{dz}{dx} : dy = 1, \text{ ou } \frac{d^2z}{dx\,dy} = 1.$$

De même en différentiant d'abord par rapport à y, nous obtiendrons

$$dz = x\,dy, \text{ d'où } \frac{dz}{dy} = x;$$

différentiant cette dernière expression par rapport à x, il viendra

$$d.\left(\frac{dz}{dy}\right) = d.(x) = dx, \text{ d'où } d.\left(\frac{dz}{dy}\right) : dx = 1, \text{ ou } \frac{d^2z}{dy\,dx} = 1,$$

donc, enfin on a

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} = \frac{d^2z}{dy\,dx} = 1.$$

## Moyen de reconnaitre une différentielle exacte.

106. — Maintenant, nous pouvons démontrer que, pour reconnaître si une différentielle $M\,dx + N\,dy$ est une différentielle exacte, il faut que l'on ait l'équation de condition :

$$\frac{d\,M}{dy} = \frac{d.N}{dx}. \quad (116).$$

En effet, soit z la fonction ayant pour différentielle exacte $M\,dx + N\,dy$ ; nous avons pour différentielle totale $dz = M\,dx + N\,dy$ ; et pour différentielles particulières $M = \frac{dz}{dx}$ et $N = \frac{dz}{dy}$.

Différentions par rapport à y l'expression $M = \frac{dz}{dx}$ nous aurons

$$\frac{dM}{dy} = \frac{d^2z}{dx\,dy};$$

différentions $N = \frac{dz}{dy}$ par rapport à x, il viendra ;

$$\frac{d.N}{dx} = \frac{d^2z}{dy\,dx}.$$

Mais, d'après ce qui précède, $\frac{d^2z}{dx\,dy} = \frac{d^2z}{dy\,dx}$, donc enfin

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Ainsi, par exemple, on reconnaît que l'expression

$$(y^2 + 3x^2)\,dx + (3y^2 + 2xy)\,dy,$$

est une différentielle exacte, car M représente ici $y^2 + 3x^2$ et N représente $3y^2 + 2xy$, donc

$$\frac{dM}{dy} = \frac{d.(y^2 + 3x^2)}{dy} = \frac{2y\,dy}{dy} = 2y,$$

et

$$\frac{dN}{dx} = \frac{d.(3y^2 + 2xy)}{dx} = \frac{2y\,dx}{dx} = 2y,$$

et par conséquent $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx} = 2y$,

la condition est remplie.

L'équation différentielle $y\,dx - x\,dy = 0$ n'est pas une différentielle exacte, car

$$\frac{dM}{dy} = \frac{d.y}{dy} = 1,$$

et

$$\frac{dN}{dx} = \frac{d.(-x)}{dx} = \frac{-dx}{dx} = -1,$$

et la condition $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$, n'est pas remplie.

Et en effet, cette équation différentielle dérive de celle-ci

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = 0,$$

qui est la différentielle exacte de $\frac{x}{y}$, art. 11, C. D.

En multipliant l'expression différentielle précédente par $y^2$, on a eu la proposée $y\,dx - x\,dy = 0$ ; il s'agit donc pour retrouver la différentielle exacte et pouvoir intégrer de restituer le facteur $\frac{1}{y^2}$ qui a été supprimé, et alors la condition $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$ devra être remplie, c'est ce qu'on obtient, en effet, car dans

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2},\ M = \frac{y}{y^2} = \frac{1}{y} \text{ et } N = -\frac{x}{y^2};$$

donc

$$\frac{dM}{dy} = \frac{d.\frac{1}{y}}{dy} = \frac{y\,d.1 - 1.dy}{y^2} : dy = \frac{0 - dy}{y^2} : dy = -\frac{1}{y^2};$$

$$\frac{dN}{dx} = d.\left(-\frac{x}{y^2}\right) : dx = d.\left[\frac{1}{y^2} \times (-x\right] : dx = -\frac{1}{y^2} dx : dx = -\frac{1}{y^2}$$

donc
$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx} = -\frac{1}{y^2}.$$

107. — *En général, pour qu'une fonction différentielle Vdx, des variables x et y et de leurs coefficients différentiels successifs, soit une différentielle exacte, il faut que l'on ait l'équation de condition :*

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} - \frac{d^3 R}{dx^3} + \frac{d^4 S}{dx^4} - \text{etc.} + \text{etc.} = 0 \ldots (117);$$

V étant une fonction de x, de y, de $\frac{dy}{dx} = p$, de $\frac{d^2 y}{dx^2} = q$., etc.,

V dx étant la différentielle d'une fonction z ;

d. V étant $Mdx + Ndy + Pdp + \text{etc.}\ldots$

M égalant $\frac{1}{dx}.\ \frac{d^2 z}{dx}$ ;

N » $\frac{1}{dx}.d.\ \frac{dz}{dy}$ ;

P » $\frac{dz}{dy} + \frac{1}{dx}\ d.\ \frac{dz}{dp}$ ;

Q » $\frac{dz}{dp}$.

## Intégration des fonctions de deux variables reconnues différentielles exactes.

108. — Passons maintenant à l'intégration des expressions à deux variables, qui ont été reconnues des différentielles exactes.

Remarquons d'abord que dans la différentielle totale $Mdx + Ndy$, par exemple, d'une fonction u de x et de y, le terme $M\,dx$, ou différentielle partielle de u par rapport à x, a été obtenu en considérant y comme constant. Par suite, lorsque nous intégrerons la partie $M\,dx$, la constante que nous ajouterons *pourra* renfermer y, et en la représentant par Y, sauf si le cas l'exige, à regarder y comme une constante ordinaire, lorsque y n'existe pas dans Y, nous aurons

$$u = \int M\,dx + Y = o \ldots (118).$$

Cette expression étant celle qui, différentiée ensuite par rapport à y, a dû nous donner pour résultat $M\,dx + N\,dy = o$, il résulte évidemment de là que N n'est autre chose que le coefficient différentiel de $\int Mdx + Y$ ou u par rapport à y, (N dy étant la différentielle, N est le coefficient différentiel).

Effectuant donc la différentiation, nous aurons

$$N = d.(\int M\,dx + Y) : dy = \frac{d.\int M\,dx}{dy} + \frac{d.Y}{dy};$$

d'où

$$\frac{dY}{dy} = N - \frac{d.\int Mdx}{dy}, \text{ donc } d.Y = \left(N - \frac{d.\int M\,dx}{dy}\right) dy;$$

et, en intégrant, il viendra

$$\int d.Y \text{ ou } Y = \int \left(N - \frac{d.\int Mdx}{dy}\right) dy;$$

cette valeur de Y étant substituée dans l'équation (118), nous aurons

$$u = \int Mdx + \int \left(N - \frac{d.\int Mdx}{dy}\right) dy \ldots. (119).$$

Remarquons que $N - \frac{d.\int M\,dx}{dy}$ ne contient pas x, car cette expression multipliée par dy doit donner pour intégrale une fonction Y de la seule variable y, puisque tous les x sont compris dans la première différentielle partielle M dx.

109. — *Toute fonction de deux variables qui satisfait à la condition d'intégrabilité donnée précédemment, art. 106 et 107, peut être intégrée à l'aide de la formule (119) ci-dessus.*

*Exemple.* — Soit à intégrer l'expression différentielle

$$(6\,xy - y^2)\,dx + (3\,x^2 - 2\,x\,y)\,dy \quad \ldots\ (120).$$

Voyons d'abord si cette différentielle satisfait à la condition d'intégrabilité.

Pour cela comparons cette expression à la différentielle type M dx + N dy, nous aurons

$$M = 6xy - y^2 \text{ et } N = 3x^2 - 2xy\,;$$

d'où $\dfrac{dM}{dy} = \dfrac{d.(6\,x\,y - y^2)}{dy} = \dfrac{6x\,dy - 2y\,dy}{dy} = 6x - 2y,$

$$\frac{dN}{dx} = \frac{d\,(3\,x^2 - 2\,x\,y)}{dx} = \frac{2.\,3\,x\,dx - 2\,y\,dx}{dx} = 6\,x - 2\,y,$$

donc

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx},$$

et la condition d'intégrabilité est remplie.

Intégrons maintenant l'expression Mdx ou $(6xy - y^2)dx$, par rapport à x, c'est-à-dire en supposant y constant, nous aurons

$$\int M dx = \int (6xy - y^2)\,dx = \frac{6yx^{1+1}}{1+1} - y^2x = 3x^2y - y^2x\,;$$

substituant cette valeur et celle de N dans l'équation (119), nous aurons

$$u = 3x^2y - y^2x + \int \left[3x^2 - 2xy - \frac{d.(3\,x^2\,y - y^2\,x)}{dy}\right] dy \ldots (121).$$

En effectuant la différentiation indiquée dans la partie affectée du signe d'intégration, nous obtiendrons

$$\int \left[\,3\,x^2 - 2\,x\,y - \frac{(3x^2\,dy - 2\,xy\,dy)}{dy}\right] dy,$$

ou $\qquad \int [3\,x^2 - 2\,x\,y - 3\,x^2 + 2\,x\,y]\,dy,$

ou $\qquad \int [o]\,dy$ ou $\int .\,(o) =$ constante,

donc cette partie affectée du signe d'intégration, c'est-à-dire

$$\int \left[\,3\,x^2 - 2\,x\,y - \frac{d.(3x^2y - y^2x)}{dy}\right] dy$$

est une constante, attendu que toute quantité dont la

différentielle est zéro, est une constante ; par conséquent l'équation (121) se réduit à

$$u = 3\,x^2\,y - y^2\,x + \text{constante},$$

c'est l'intégrale cherchée.

110. — On aurait pu se dispenser d'employer la formule (119) en opérant comme ceci : intégrons d'abord l'expression (118) en considérant y comme constant, nous aurons $u = \int M dx + Y = \int (6xy - y^2)dx + Y = \frac{6\,y\,x^{1+1}}{2} - y^2\,x = 3\,x^2\,y - y^2\,x + Y$, (122).

Différentions maintenant cette équation par rapport à y, nous aurons

$$du = 3\,x^2\,dy - 2\,xy\,dy + d\,Y,$$

ou
$$\frac{du}{dy} = 3\,x^2 - 2\,xy + \frac{d\,Y}{dy}.$$

Or $\frac{du}{dy}$ n'étant rien d'autre que le coefficient de dy dans l'expression (119), c'est-à-dire le coefficient différentiel de u par rapport à y, nous avons également

$$\frac{du}{dy} = 3\,x^2 - 2\,xy\,;$$

en comparant ces valeurs de $\frac{du}{dy}$, nous voyons que $\frac{dY}{dy} = 0$, et par conséquant Y est une constante ; substituant cette valeur dans l'équation (121), nous aurons enfin

$$u = 3\,x^2\,y - y^2\,x + \text{constante}.$$

111. — Nous avons vu, à l'article 106, que l'équation $y\,dx - x\,dy = 0$ n'était pas une différentielle exacte, parce que l'on avait supprimé le facteur commun $\frac{1}{y^2}$, mais qu'en lui restituant ce facteur, on obtenait une différentielle exacte. On comprend donc qu'il peut y avoir d'autres équations que celle-ci qui ne sont pas immédiatement intégrables, mais qui le deviendraient si l'on faisait subir à ces équations certaines modifications, comme par exemple, de leur restituer un facteur.

C'est ce que nous allons examiner.

## Deuxième méthode principale d'intégration des fonctions de plusieurs variables.

RECHERCHE DES FACTEURS PROPRES A RENDRE DIFFÉRENTIELLES EXACTES, C'EST-A-DIRE INTÉGRABLES, LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES QUI NE LE SONT PAS.

112. Soit $M\,dx+N\,dy=0$... (123),
une expression qui, multipliée par le facteur commun z, (facteur que, pour plus de généralité, nous supposerons fonction de x et de y), donne pour produit une différentielle exacte que nous représenterons en général par l'équation $P\,dx+Q\,dy=0$... (124);
la détermination du facteur z dépendra de l'équation

$$\frac{M\,dz}{dy}+\frac{zdM}{dy}=\frac{N\,dz}{dx}+\frac{z\,dN}{dx}\ldots(125).$$

En effet, d'après ce qui précède

$$P=M\,z,\ Q=N\,z;$$

Or, l'équation (124) étant, par hypothèse, une différentielle exacte, nous avons, d'après l'art. 106 :

$$\frac{d\,P}{dy}=\frac{d\,Q}{dx};$$

substituant dans cette équation les valeurs de P et de Q, nous aurons

$$\frac{dMz}{dy}=\frac{dNz}{dx};$$

et en développant, d'après l'art. 9, calc. diff., nous obtiendrons enfin

$$\frac{Mdz+zdM}{dy}=\frac{Ndz+zdN}{dx};$$

ou

$$\frac{Mdz}{dy}+\frac{zdM}{dy}=\frac{Ndz}{dx}+\frac{zdN}{dx}.\ \text{C. Q. F. D.}$$

113. — Lorsque le facteur z est constant, il n'influe pas sur la possibilité de l'intégration, et $Mdx+Ndy=0$ sera une différentielle exacte ; en effet, on le reconnaît par la condition $\frac{dM}{dy}=\frac{dN}{dx}$ qui est remplie dans ce cas, car quand ce facteur z est constant, $\frac{dz}{dy}$ et $\frac{dz}{dx}$ sont nuls, (art. 6, 5°, C. D.), et l'équation (125) se réduit à

$$\frac{zdM}{dy} = \frac{zdN}{dx},$$

ou, en divisant par le facteur constant z,

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}.$$

Donc, on intégrera de préférence $M\,dx + N\,dy = 0$ et puis on multipliera par le facteur constant pour avoir l'intégrale de la proposée. Mais il n'en est plus ainsi quand z est,(comme nous l'avons supposé dans l'article précédent), fonction de x et de y ; alors sa détermination dépend de l'équation (125), laquelle est plus difficile à intégrer que l'équation proposée (124), car celle-ci ne contient que le seul coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ que l'on tire de cette équation, tandis que l'équation (125), de laquelle dépend la détermination de z, renferme les deux coefficients différentiels $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ et contient trois variables x, y et z. Donc, si l'on connaît la proposée (124), on l'intégrera sans simplifier quand z ne sera pas constant.

114. — La détermination du facteur z, fonction de x et de y, est très facile d'autre part quand l'équation donnée est homogène. En effet, soit $Mdx + Ndy = 0$, une équation homogène, qui devient intégrable lorsqu'elle est multipliée par une fonction homogène z de x et de y ; soit u l'intégrale cherchée, c'est-à-dire l'intégrale de l'équation $zMdx + zNdy = 0$, nous avons

$$zMdx + z\,N\,dy = du \;\dots.\; (126)\,;$$

comme cette équation est homogène, nous en déduirons, par l'art 100, en mettant zM, zN et u, respectivement à la place de M, N et z :

$$zMx + zNy = nu \;\dots\; (127).$$

Maintenant soient m et k les dimensions respectives de M et de z, la dimension de l'un quelconque des termes zMx, zNy, sera, par conséquent, $m+k+1$ ; cette valeur étant substituée à la place de n, dans l'équation (127), nous aurons $\qquad zMx + zNy = (m+k+1)\,u$ ;

divisant l'équation (126) par cette dernière, il viendra en

supprimant le facteur z commun aux deux termes du premier membre :

$$\frac{Mdx + Ndy}{Mx + Ny} = \frac{du}{(m + k + 1)u} = \frac{1}{m + k + 1}\frac{du}{u};$$

le second membre de cette équation étant une différentielle exacte, d. log. u × constante, art. 28, C. D, il doit en être de même du premier membre ; d'où il résulte que dans ce premier membre, mis sous la forme $\frac{1}{Mx + Ny}$ M dx + N dy, le facteur $\frac{1}{Mx + Ny}$ doit être un facteur z propre à rendre intégrable l'équation homogène M dx + N dy = 0.

115. — Pour déterminer le facteur commun z qui doit rendre homogène la proposée, lorsque ce facteur n'est fonction que de x, donc ne contient pas y, comme nous avons, dans ce cas, $\frac{dz}{dy} = 0$, l'équation (125) se réduit à

$$\frac{zdM}{dy} = \frac{Ndz}{dx} + \frac{zdN}{dx},$$

d'où

$$\frac{Ndz}{dx} = z\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right),$$

et par suite, en divisant par N et par z, et en multipliant par dx, il viendra

$$\frac{dz}{z} = \left(\frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{N}\right) dx \;..,\; (128);$$

en intégrant, nous aurons, (art. 28, C. D.) :

$$\log z = \int \left(\frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{N}\right) dx = \int \frac{1}{N}\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) dx;$$

multipliant par log e, nous aurons

$$\log z \log e = \left[\int \frac{1}{N}\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) dx\right] \log e,$$

ou, d'après la théorie des logarithmes (logarithme de puissance) :

$$\log z \log e = \log\left(e^{\int \frac{1}{N}\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) dx}\right),$$

or, log e = 1, car il s'agit ici du système Népérien, art. 28, Calc. Diff., donc,

$$\log z = \log\left(e^{\int \frac{1}{N}\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right)dx}\right),$$

et par suite,

$$z = e^{\int \frac{1}{N}\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right)dx} \ldots(129);$$

tel est donc le facteur par lequel il faut multiplier l'équation proposée pour qu'elle devienne une différentielle exacte.

*Exemple.* — Soit l'équation

$$y\,dx - x\,dy = 0\,;$$

nous avons

$$M = y,\ N = -x,\ \frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} = 1 - (-1) = 2\,;$$

ces valeurs étant substituées dans la formule (128), il viendra

$$\frac{dz}{z} = \frac{2\,dx}{-x},$$

d'où

$$\int \frac{dz}{z} = \int -\frac{2dx}{x} = -2\int \frac{dx}{x},$$

et, par suite, (art. 28, C. D.), nous aurons

$\log z = -2 \log x + \text{constante} = -2 \log x + C$ ou $= -2 \log x + \log C = -\log x^2 + \log C = \log \frac{C}{x^2}$;

par conséquent

$$z = \frac{C}{x^2}\,;$$

et, en multipliant l'expression donnée $ydx - xdy = 0$, par ce facteur z, nous aurons pour différentielle exacte

$$\frac{C\,(ydx - xdy)}{x^2} = 0.$$

116. — Une infinité de facteurs jouissent de cette propriété de rendre différentielle exacte l'expression générale $M\,dx + N\,dy = 0$, lorsque cette expression a été multipliée par l'un de ces facteurs, c'est-à-dire qu'en représentant par z l'un quelconque de ces facteurs, l'expression

$$M\,z\,dx + N\,z\,dy = 0,$$

est une différentielle exacte.

En effet, représentons par u l'intégrale de cette équation, nous aurons

$$Mz\,dx + Nz\,dy = du\,;$$

et, en multipliant les deux membres par une fonction quelconque de u, soit $\varphi u$, nous trouverons

$$\varphi u \,(Mz\,dx + Nz\,dy) = \varphi u.\,du\,;$$

$\varphi u$ étant arbitraire, nous pouvons poser, par exemple, $\varphi u = 2u^2$, et alors $2u^2$ du ou $\varphi u$. du étant, (art. 88, C. I.), une différentielle exacte, l'expression

$$2u^2\,(Mz\,dx + Nz\,dy) = 2u^2\,du,$$

sera aussi une différentielle exacte ; cette expression peut se mettre sous la forme :

$2u^2z\,(Mdx + Ndy) = 2u^2.\,du = o =$ différentielle exacte ; par conséquent, le facteur $2zu^2$ jouit de la propriété de rendre intégrable l'expression générale

$$Mdx + Ndy = o,$$

et, comme au lieu de faire $\varphi u = 2u^2$, on peut faire toute autre hypothèse, $\varphi u = nu^3$, etc. etc., ou bien $fu = u^5$ ou $= nu^6$, etc. etc., car on peut prendre une fonction quelconque de u, on voit que le nombre de facteurs jouissant de la propriété de rendre intégrable l'expression générale $Mdx + Ndy = o$, est infini.

## Constantes arbitraires.

117. — Nous avons vu, art. 1, C. I., que l'intégration d'une différentielle amenait l'existence d'une constante. On comprend donc que chacune des intégrations successives engendrent une nouvelle constante, d'où l'on peut dire que le nombre de constantes à obtenir est en rapport avec l'ordre d'une équation différentielle à intégrer.

Ainsi l'intégrale de l'intégrale de $\frac{d^2y}{dx^2}$ ou

$$\int\int\frac{d^2y}{dx^2} = \int\left(\frac{dy}{dx} + b\right) = \int\left(\frac{dy}{dx} + bx^o\right) = y + \frac{bx^{o+1}}{o+1} + C =$$
$y + bx + C$,

y étant une fonction de x.

$\frac{d^2y}{dx^2}$ est du second ordre ; donc, deux intégrations successives à faire pour arriver à l'intégrale, et par suite, deux constantes à obtenir ; donc le nombre de constantes est indiqué par l'ordre de la différentielle ; $\int\frac{dy}{dx} + b$ est l'in-

tégrale première, et $y + bx + C$ l'intégrale seconde de l'équa tion du second ordre $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Une équation représentée par $V = o$, entre x, y et des constantes, peut donc être considérée comme l'intégrale complète, art. 67, C. I., d'une certaine équation différentielle dont l'ordre dépendra du nombre des constantes que $V = o$ renfermera. Ces constantes sont appelées *constantes arbitraires,* parce que si l'une est représentée par a, et que V ou l'une de ses différentielle soit mise sous la forme $f(x, y) = a$, (en mettant la constante a en dehors de la fonction, comme nous avons vu des exemples précédemment dans la détermination des constantes), on voit que a ne sera autre chose que la constante arbitraire que donnera l'intégration de $d. f(x, y)$ ; or, cette dernière quantité varie avec x et y, donc la constante varie également mais est ici toujours égale à l'intégrale de $d. f(x, y)$.

Cela étant, si l'équation différentielle dont il s'agit est de l'ordre n, chaque intégration introduisant une constante arbitraire, il faudra que $V = o$, qui est censé nous être donné par la dernière de ces intégrations, contienne au moins n constantes arbitraires de plus que notre équation différentielle, puisqu'il y a n intégrations.

Si une équation en x et en y, ne renfermait pas n constantes arbitraires de plus que l'équation différentielle de l'ordre n, elle ne pourrait en être regardée comme l'équation primitive. Par exemple, l'équation $y = ax^3$, qui donne $\frac{d^2y}{dx^2} = 6ax$ par deux différentiations successives, n'en est qu'une intégrale particulière, art. 68, C.I. En effet cette intégrale s'obtient en faisant $b = o$ et $C = o$ dans l'intégrale complète, qui est $y = ax^3 + bx + C$, de laquelle on tire aussi $\frac{d^2y}{dx^2} = 6ax$. En effet, on a $\frac{d^2y}{dx^2} = 6ax$, donc une différentielle du second ordre ; d'où deux intégrations successives à faire pour avoir l'intégrale primitive et deux constantes à obtenir dans cette dernière.

Ainsi on obtient

$$\int\int\frac{d^2y}{dx^2} = \int\int 6\,ax \text{ égale}$$

d'abord en décomposant

$\int 6\,ax = \frac{6\,ax^{1+1}}{1+1} + b = \frac{6\,ax^2}{2} + b = 3\,ax^2 + b$, qui peut être mise sous la forme $3\,ax^2 + bx^0$ ;

et ensuite :

$$\int 3\,ax^2 + bx^0 = \frac{3\,ax^{2+1}}{2+1} + \frac{bx^{0+1}}{0+1} + C = ax^3 + bx + C.$$

Remarquons encore qu'on ne doit considérer que comme une seule constante celles qui ensemble affectent une même puissance de x. C'est ainsi que dans l'équation $y = (a+b)\,x+c$, on doit compter $a+b$ que comme une seule constante.

Représentons en général par

$$F(x,y)=0,\ F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0,\ F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0 \ldots (130),$$

l'équation primitive, ou intégrale, d'une équation différentielle du second ordre (intégrale possédant donc deux constantes), et ses deux différentielles immédiates ; nous pourrons, entre les deux premières de ces trois équations, éliminer successivement les constantes a et b, et obtenir

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, b\right) = 0,\ \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, a\right) = 0 \ldots (131),$$

a étant éliminé dans la première équation, et b dans la seconde.

Si, sans connaître $F(x,y)=0$, nous parvenions à trouver ces équations, il suffirait évidemment d'éliminer entre elles $\frac{dy}{dx}$ pour obtenir $F(x,y)=0$, qui serait l'intégrale complète, (art. 67, C.I.), puisqu'elle contiendrait les constantes arbitraires a et b ; c'est ce que nous verrons plus loin.

118. — Une équation différentielle du second ordre peut provenir de deux équations différentielles du premier ordre différant entr'elles par les constantes.

En effet, si nous éliminons la constate b entre la première des équations (131) et sa différentielle immédiate, et si nous éliminons de même la constante a entre la seconde des équations (131) et sa différentielle immédiate,

nous obtiendrons séparément deux équations du second ordre, $\frac{d^2y}{dx^2}$, qui ne différeront point entr'elles, autrement les valeurs de x et de y ne seraient pas les mêmes dans l'une et dans l'autre. Il résulte donc de là qu'une équation différentielle du second ordre peut provenir de deux équations différentielles du premier ordre, qui sont nécessairement différentes, puisque la constante arbitraire de l'une n'est pas la même que la constante arbitraire de l'autre.

Les équations (131) sont donc ce qu'on appelle les intégrales premières d'une équation différentielle du second ordre qui est unique, et dont l'équation primitive $F(x,y)=0$ est l'intégrale seconde,

*Exemple.* — Soit l'équation

$$y = ax + b,$$

qui, à cause de ses deux constantes, peut être regardée comme l'équation primitive d'une équation du second ordre, d'après ce qui précède.

Nous en tirerons, par la différentiation, la valeur de a, savoir

$$dy = a\,dx \text{ ou } \frac{dy}{dx} = a \ldots. (132)\ ;$$

remplaçant a par cette valeur dans l'équation donnée, il viendra

$$y = \frac{dy}{dx}x + b \ldots. (133).$$

Ces deux intégrales premières (éq. 132 et 133), de l'équation du second ordre que nous cherchons, étant différentiées chacune en particulier, conduisent également, par l'élimination de a et de b, à l'équation unique du second ordre $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ; car la première donne $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d.a}{dx} = \frac{d.\ \text{constante}}{dx} = 0$ ; et la seconde $dy = d.\left(\frac{dy}{dx}x + b\right) =$ art. 9, C. D. $= \frac{d^2y}{dx}x + \frac{dy}{dx}dx$, d'où $\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}x + \frac{dy}{dx}$, d'où $0 = \frac{d^2y}{dx^2}x$ ; or x, variable, ne peut pas être égal à zéro, donc $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$.

119. — Dans le cas où le nombre de constantes surpasse

celui des constantes arbitraires requises, art. 117, C. I., les constantes excédentes, par la raison qu'elles sont liées aux mêmes équations, n'amènent aucune relation nouvelle. Cherchons, par exemple, l'équation du second ordre dont la primitive est

$$y = \frac{1}{2} ax^2 + bx + C \ldots (134);$$

en la différentiant, nous aurons

$$dy = 2 . \frac{1}{2} a x dx + bdx,$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = a x + b \ldots (135).$$

L'élimination de b et ensuite celle de a entre ces équations nous donnent séparément les deux intégrales premières suivantes, (en remarquant que l'éq. (135) donne $b = \frac{dy}{dx} - ax$, et $a = \frac{dy}{xdx} - \frac{b}{x}$):

1° $y = \frac{1}{2} ax^2 + \left(\frac{dy}{dx} - ax\right) x + C = \frac{1}{2} ax^2 + \frac{dy}{dx} x - ax^2 + C = \frac{dy}{dx} x - \frac{1}{2} ax^2 + C \ldots (136);$

et 2° $y = \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{xdx} - \frac{b}{x}\right) x^2 + bx + C = \frac{1}{2} \left( x \frac{dy}{dx} - bx \right) + bx + C = \frac{1}{2} x \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2} bx + C. (136).$

Eliminant $\frac{dy}{dx}$ entre les équations (136), nous trouverons l'équation primitive (134), art. 117, C. I.

D'autre part, si nous différentions la première des équations (136), nous aurons, (art. 9, C. D.):

$$\frac{dy}{dx} = d. \left(\frac{dy}{dx} x - \frac{1}{2} ax^2 + C\right) : dx = \frac{d^2y}{dx^2} x + \left(\frac{dy}{dx} dx : dx\right) - 2 . \frac{1}{2} ax = \frac{d^2y}{dx^2} x + \frac{dy}{dx} - ax;$$

d'où

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a \ldots (137).$$

Si, au contraire, nous différentions la seconde des équations (136), nous obtiendrons

$$\frac{dy}{dx}=d\left(\frac{1}{2}x\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}bx+C\right):dx=\frac{1}{2}x\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{1}{2}\frac{dy}{dx}dx:dx\right)+$$
$$\left(\frac{1}{2}bdx:dx\right)=\frac{1}{2}x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{2}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}b,$$

d'où
$$\frac{1}{2}x\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2}\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2}b,$$

d'où
$$x\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx}-b,$$

et comme l'équation (135) donne $\frac{dy}{dx}-b=ax$, l'expression précédente donne

$$x\frac{d^2y}{dx^2}=ax,\text{ d'où }\frac{d^2y}{dx^2}=a\,;$$

équation qui est la même que l'équation (137), ce qui nous montre que les équations (136) conduisent à la même équation par des chemins différents.

*Remarque.* — Si l'équation primitive (134) n'était pas connue, il semble que l'on ne pourrait pas employer comme nous l'avons fait l'équation (135) qui en dérive ; mais dans ce cas, on obtiendrait cette équation (135), en éliminant C entre les équations (136).

120.— Nous pouvons, maintenant, appliquer, à l'équation différentielle du troisième ordre, les considérations qui précèdent.

A cet effet, différentions trois fois de suite l'équation $F(x,y)=0$, nous aurons les trois fonctions :

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0,\ F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0,\ F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\frac{d^3y}{dx^3}\right)=0;$$

ces équations admettant les mêmes valeurs pour chacune des constantes arbitraires que renferme l'intégrale $F(x,y)=0$, nous pouvons, en général, éliminer ces constantes, (au nombre de trois, art. 117, C.I.), entre cette dernière équation et les trois précédentes, et obtenir ainsi un résultat que nous pouvons représenter par

$$f\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\frac{d^3y}{dx^3}\right)=0\ldots(138);$$

cette équation est la *différentielle du troisième ordre* de $F(x,y)=0$, et de laquelle les trois constantes arbitraires sont éliminées ; réciproquement l'équation $F(x,y)=0$ est *l'intégrale troisième* de l'équation (138).

121. — Si nous éliminions successivement chacune des constantes arbitraires entre l'équation $F(x,y,)=0$ et celle que nous en tirerions par la différentiation, nous obtiendrions trois équations du premier ordre qui seraient les *intégrales secondes* de l'équation (138).

122. — Si, maintenant, nous éliminions successivement deux des trois constantes arbitraires, entre l'équation $F(x,y)=0$ et les équations que nous en déduirions par deux différentiations successives, c'est-à-dire si nous éliminions ces constantes entre les équations,

$$F(x,y)=0,\ F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0,\ F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0,..(139)\ ;$$

nous pourrions conserver *successivement* dans l'équation qui proviendra de l'élimination, l'une des trois constantes arbitraires ; par conséquent nous aurions ainsi autant d'équations que de constantes arbitraires.

Soient a,b,c, ces constantes arbitraires ; les équations dont nous parlons, envisagées *seulement* sous le rapport des constantes arbitraires qu'elles renferment, pourront évidemment être représentées comme ceci :

$$\varphi c=0,\ \varphi b=0,\ \varphi a=0...\ (140).$$

Et puisque les équations (139) concourrent *toutes les trois* à l'élimination qui nous donne l'une des équations considérées, il en résulte que ces équations (140) seront chacune du *second ordre* ; on les appelle les *intégrales premières* de l'équation (138).

123. — Concluons donc de tout ce qui précède, qu'en général, une équation différentielle d'un ordre n, aura n intégrales premières, qui renfermeront par conséquent les coefficients différentiels depuis $\frac{dy}{dx}$ jusqu'à $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ inclusivement, c'est-à-dire un nombre $n-1$ de coefficients différentiels ; et nous voyons que quand ces équations, (intégrales premières), sont connues, pour avoir *l'équation primitive*, il suffit

d'éliminer entre elles ces coefficients différentiels. (Art. 117, C. I.).

## Solutions particulières des équations différentielles du premier ordre.

124. — Comme nous avons vu, art. 68, C. I., une intégrale particulière peut toujours être déduite de l'intégrale complète en donnant une valeur *convenable* à la constante arbitraire contenue dans cette dernière.

Ainsi, par exemple, soit l'équation différentielle

$$x\,dx + y\,dy = dy\sqrt{x^2 + y^2 - a^2},$$

de laquelle on tire

$$dy = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}} \text{ ou} = \frac{1}{2}\,\frac{2x\,dx + 2y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}} = \frac{1}{2}\,\frac{2x\,dx + 2y\,dy}{(x^2 + y^2 - a^2)^{1/2}} =$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{(x^2 + y^2 - a^2)^{1/2}}(2x dx + 2y dy) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - a^2)^{-1/2}\,d.(x^2 +$$

$$y^2 - a^2) = d.(x^2 + y^2 - a^2)^{1/2} = d.\sqrt{x^2 + y^2 - a^2},$$

et par suite, en intégrant et ajoutant une constante, $\int dy = \int d.\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}$,

ou $$y + c = \sqrt{x^2 + y^2 - a^2};$$

expression qui est l'intégrale complète de l'équation différentielle donnée.

Pour plus de facilité dans les calculs, faisons évanouir les radicaux en élevant au carré la différentielle donnée et l'intégrale complète trouvée, nous aurons

$$x^2 dx^2 + 2\,x\,y\,dx.\,dy + y^2 dy^2 = dy^2(x^2 + y^2 - a^2)$$

ou, en divisant par $dx^2$, $x^2 + 2\,x\,y\,\frac{dy}{dx} + y^2\,\frac{dy^2}{dx^2} = x^2\,\frac{dy^2}{dx^2} + y^2\,\frac{dy^2}{dx^2} - a^2\,\frac{dy^2}{dx^2}$,

ou enfin pour la différentielle

$$(a^2 - x^2)\frac{dy^2}{dx^2} + 2\,x\,y\,\frac{dy}{dx} + x^2 = 0 \;\ldots (141);$$

et pour l'intégrale

$$y^2 + 2\,cy + c^2 = x^2 + y^2 - a^2,$$

ou $$2\,cy + c^2 - x^2 + a^2 = 0 \;\ldots (142).$$

Maintenant si nous donnons à c une valeur constante

arbitraire 2 a, nous trouverons pour intégrale particulière,

$$4\,ay+4\,a^2-x^2+a^2=0, \text{ ou } 4\,ay+5\,a^2-x^2=0,$$

laquelle satisfera à la différentielle proposée (141) aussi bien qu'à l'intégrale complète (142).

En effet, cette intégrale particulière donne

$$y=\frac{x^2-5\,a^2}{4\,a} \text{ et } \frac{dy}{dx}=\frac{2\,x}{4a}=\frac{x}{2\,a};$$

valeurs qui substituées dans la différentielle proposée (141) donnent

$$(a^2-x^2)\frac{x^2}{4a^2}+2\,x\left(\frac{x^2-5\,a^2}{4a}\right)\frac{x}{2a}+x^2=0,$$

ou

$$(a^2-x^2)\frac{x^2}{4a^2}+\frac{x^2}{4a^2}(x^2-5\,a^2)+\frac{4a^2\,x^2}{4a^2}=0,$$

ou

$$(a^2-x^2)\frac{x^2}{4a^2}+\frac{x^2}{4a^2}(x^2-5\,a^2+4a^2)=0,$$

ou enfin

$$\frac{x^2}{4a^2}(x^2-5\,a^2+4a^2)=(x^2-a^2)\frac{x^2}{4a^2},$$

ou

$$\frac{x^2}{4a^2}(x^2-a^2)=(x^2-a^2)\frac{x^2}{4a^2},$$

expression identique, donc l'intégrale particulière satisfait à la différentielle proposée; et comme cette intégrale particulière est déduite de l'intégrale complète, elle satisfait donc aux deux équations (141) et (142).

125. — Mais s'il est vrai qu'une intégrale particulière peut toujours être déduite de l'intégrale complète, il n'en résulte pas pour cela que toute équation satisfaisant à une différentielle donnée soit un cas particulier de son intégrale complète, c'est-à-dire soit comprise dans l'intégrale complète ; mais si une telle équation n'est pas comprise dans l'intégrale complète, elle en dépend cependant.

Ainsi, par exemple, l'équation du cercle, (géom. analyt.) :

$$x^2+y^2=a^2\ldots(143),$$

qui satisfait à l'équation différentielle (141), n'est point cependant comprise dans son intégrale complète, l'équation (142). En effet, l'équation (143) étant différentiée donne $2\,x\,dx+2\,y\,dy=0$, ou $x\,dx=-y\,dy$, cette valeur et celle de $x^2+y^2=a^2$, étant substituées dans l'équation (141) ou plutôt dans cette équation non élevée au

carré, c'est-à-dire dans la proposée $x\,dy + y\,dy = \sqrt{x^2+y^2-a^2} \times dy$, donne

$$-y\,dy + y\,dy = \sqrt{a^2-a^2} \times dy,$$

ou $$0 = 0,$$

donc cette équation du cercle satisfait à la différentielle proposée, et cependant n'est pas comprise dans l'intégrale complète, car quelle que soit la valeur constante que l'on donne à c dans l'intégrale complète (142), jamais cette équation qui est celle d'une parabole (géom. analytique), ne pourra amener l'équation (143) qui est celle d'un cercle. Une équation qui, comme l'équation (143), satisfait à la proposée sans être comprise dans l'intégrale complète est appelée une *solution particulière ou singulière de la proposée.*

On crut, à tort, néanmoins, pendant longtemps, que la propriété de l'intégrale complète était générale, c'est-à-dire que lorsqu'une équation différentielle en x et en y était donnée, on ne pouvait trouver une équation finie entre les mêmes variables qui ne fût un cas particulier de l'intégrale complète, en donnant comme nous l'avons fait, une valeur arbitraire à une constante.

Après cela, on crut, à tort également, que ces sortes d'équations ou solutions singulières n'étaient pas liées à l'intégrale complète. C'est Lagrange qui démontra qu'elles en dépendaient en exposant la théorie que nous allons examiner.

126. — On conçoit qu'une équation différentielle du premier ordre $Mdx+Ndy=0$, d'une fonction de deux variables x et y, peut être considérée comme provenant de l'élimination d'une constante c entre une certaine équation différentielle du même ordre, que nous représenterons par $mdx + ndy=0$, et l'intégrale complète $F(x, y, c)=0$ de celle-ci, intégrale que nous représenterons par u. (Voir article 102, Calcul Intégral).

On conçoit également que si tout se réduit à prendre la constante c de manière que l'équation $Mdx+Ndy=0$ soit le résultat de l'élimination, il est permis de faire varier

cette constante, du moment que l'équation $Mdx + Ndy = o$ résulte de l'élimination.

Alors, on comprend que l'intégrale complète $F(x,y,c) = o$ prendra plus de généralité, puisque c peut varier ; alors cette intégrale représentera donc une infinité de courbes du même genre, différant les unes des autres par un paramètre, c'est-à-dire par une constante, c variant.

On peut admettre cette hypothèse, car l'équation $Mdx + Ndy = o$ étant donnée, il est dans l'esprit de l'analyse d'adopter tous les moyens pouvant amener cette expression.

127. — Examinons maintenant comment on reconnaîtra qu'il existe une solution particulière ou singulière.

A cet effet, supposons que l'intégrale complète, étant différentiée en considérant c comme variable, on ait

$$dy = \frac{dy}{dx} dx + \frac{dy}{dc} dc \ldots (144),$$

expression que pour simplifier nous mettrons sous la forme

$$dy = p\, dx + q\, dc\ (145)\,;$$

équation différentielle dans laquelle l'expression q dc, ou différentielle par rapport à la *constante variable* c, est supposée nulle, puisqu'on peut donner à c une valeur en conséquence.

Or, il est certain que si p restant fini, q dc est nul, le *résultat* de l'élimination de c variable (lequel est par hypothèse $M\,dx + N\,dy = o$, art. 126), entre l'intégrale complète $F(x,y,c) = o$ et sa différentielle (145), obtenue en différentiant aussi par rapport à c, donc en supposant c variable, sera le même que celui de c constant entre $F(x,y,c) = o$ et l'équation $dy = p\,dx$, obtenue en supposant c constant dans la différentiation, car l'expression (145), par la raison que q dc est nul, ne diffère pas de $dy = pdx$ ; mais pour que $q\,dc = o$, l'un des facteurs de cette expression doit être nul, donc on doit avoir

$$dc = o \text{ ou } q = o.$$

Dans le premier cas, $d.c = o$ donne $c =$ constante, comme cela a lieu pour les intégrales particulières ; le second cas seul pourra donc convenir à une solution sin-

gulière où c est variable et q nul. Or, q étant le coefficient de dc de l'équation (145), on voit d'après l'équation (144), que q = o donne

$$\frac{dy}{dc} = o \ldots (146).$$

Cette équation renfermera c ou en sera indépendante.

1° Si elle renferme c, il peut se présenter deux cas ; ou l équation q=o ne renfermera que c et des constantes, ou elle contiendra c avec des variables. Dans le premier cas, l'équation q=o donnera encore c=constante, qui ne peut convenir, et dans le second cas elle donnera c=f (x,y), qui renferme comme cas particuliers ceux où l'on aurait c=fx ou c=fy ; cette valeur c=f (x,y), qui satisfait à la diff. 144, étant substituée dans l'intégrale complète F (x, y, c) = o de cette différentielle, changera cette dernière en une autre fonction de x et de y, qui satisfera à la différentielle proposée (144) sans être comprise dans son intégrale complète, et par suite en sera une solution singulière, art. 125. Mais ce serait une intégrale particulière que l'on obtiendrait, si l'équation c=f(x, y), qui satisfait à la différentielle proposée (144), se réduisait à une constante au moyen de l'intégrale complète.

2°. — Si le facteur q = o de l'équation qdc = o ne contient pas la constante arbitraire c, pour reconnaître si l'équation q = o donne lieu à une solution singulière, nous combinerons cette équation avec l'intégrale complète.

Ainsi, par exemple, si de q = o nous tirons x = M, et que nous substituons cette valeur dans l'intégrale complète F (x,y,c) = o, nous obtiendrons évidemment

c = constante = B, par exemple,

ou bien c = fy.

Dans le premier cas, q = o donne une intégrale particulière ; puisque changer c en B dans l'intégrale complète n'est autre chose que donner une valeur particulière à la constante, tout comme on le fait quand on passe de l'intégrale complète à une intégrale particulière, art. 68, C.I.

Dans le second cas, au contraire, la valeur fy substituée à la place de c, dans l'intégrale complète, établira entre

x et y une relation différente de celle qui existait quand on ne faisait que remplacer c par une valeur constante arbitraire ; par conséquent, dans le présent cas, c'est une solution particulière que l'on obtiendra.

On peut évidemment appliquer à x ce que nous disons de y.

128. — S'il arrivait que la valeur de c se présentat sous la forme $\frac{0}{0}$, cela indiquerait un facteur commun qu'il faudrait faire disparaître.

129. — Nous allons appliquer maintenant la théorie que nous venons d'exposer à la recherche des solutions particulières ou singulières, l'intégrale complète étant donnée ou obtenue.

Soit donnée l'équation différentielle

$$y\,dx - x\,dy = a\sqrt{dx^2 + dy^2} \ldots. (147),$$

et cherchons-en donc tout d'abord l'intégrale complète.

A cet effet, divisons par dx cette équation et faisons $\frac{dy}{dx} = p$, nous aurons premièrement

$$y - px = a\sqrt{\frac{dx^2}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2}} = a\sqrt{1 + p^2} \ldots (148)\ ;$$

différentions cette expression par rapport à x et à p, nous obtiendrons, (art. 9, C. D.) :

$$dy - pdx - xdp = a.d.(1+p^2)^{1/2} = \frac{1}{2}a.(1+p^2)^{-1/2}d.(1+p^2) = \frac{1}{2}a\frac{1}{(1+p^2)^{1/2}}\,2\,p\,dp = \frac{a.p.dp}{\sqrt{1+p^2}},$$

et comme $\frac{dy}{dx} = p$ donne $dy = pdx$, l'équation précédente devient

$$pdx - pdx - xdp = \frac{a\,p\,d\,p}{\sqrt{1+p^2}},\ \text{ou}\ x\,d\,p + \frac{a.p.\,d\,p}{\sqrt{1+p^2}} = 0,$$

équation à laquelle on satisfait en faisant $dp = 0$, d'où $p = \text{constante} = c$, valeur qui, substituée dans l'équation (148), la transforme en

$$y - cx = a\sqrt{1 + c^2} \ldots. (149).$$

Cette expression contenant une constante arbitraire c, ne figurant pas dans la proposée (147), en est donc l'intégrale *complète*.

Cette intégrale étant obtenue, la partie qdc de l'équation (145) s'obtiendra en différentiant l'équation (149) par rapport à c, considéré comme seule variable ; nous aurons ainsi

$$-x\,dc = a.d.\sqrt{1+c^2} = a\,d.(1+c^2)^{1/2} = a.\frac{1}{2}.(1+c^2)^{-1/2}$$

$$d.(1+c^2) = \frac{1}{2}\,a\,\frac{1}{(1+c^2)^{1/2}}\,2\,cdc = \frac{a.c.dc}{\sqrt{1+c^2}},$$

ou
$$x.dc + \frac{a.c.dc}{\sqrt{1+c^2}} = 0;$$

par conséquent le coefficient q de dc est ici :

$$x + \frac{ac}{\sqrt{1+c^2}},$$

et en l'égalant à zéro, nous en tirerons

$$x = -\frac{ac}{\sqrt{1+c^2}} \ldots (150);$$

élevons au carré, nous trouverons,

$$x^2 = \frac{a^2 c^2}{1+c^2},\ \text{d'où}\ x^2 + c^2 x^2 = a^2 c^2,\ \text{ou}\ x^2 = (a^2 - x^2)\,c^2,$$

et delà :

$$c^2 = \frac{x^2}{a^2-x^2},\ 1+c^2 = 1 + \frac{x^2}{a^2-x^2} = \frac{a^2-x^2+x^2}{a^2-x^2} = \frac{a^2}{a^2-x^2},$$

et enfin
$$\sqrt{1+c^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}};$$

cette dernière valeur substituée dans l'équation (150) donne

$$x = -\frac{ac}{\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}} = -\frac{ac\sqrt{a^2-x^2}}{a} = -c\sqrt{a^2-x^2},$$

d'où
$$c = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \ldots (151).$$

Nous n'affectons pas la valeur ci-dessus de $\sqrt{1+c^2}$ du double signe, parce que x et c étant de signes contraires, dans l'équation (150), il doit en être de même dans l'équation (151).

La valeur de c, éq. (151), et celle de $\sqrt{1+c^2}$ étant substituées dans l'équation (149), nous aurons

$$y + \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

d'où

$$y = \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sqrt{a^2 - x^2},$$

équation qui, élevée au carré donne

$$y^2 = a^2 - x^2 \; ... \; (152) \, ;$$

et l'on voit que cette équation est une solution particulière, car en la différentiant, nous obtiendrons $2\,y\,dy = -2\,x\,dx$, d'où $dy = -\frac{x\,dx}{y}$, valeur qui substituée dans l'équation (147), transforme en

$$y\,dx + \frac{x^2\,dx}{y} = a\sqrt{dx^2 + \frac{x^2\,dx^2}{y^2}},$$

ou, en réduisant au même dénominateur,

$$\frac{y^2dx + x^2dx}{y} = a\,\frac{\sqrt{y^2dx^2 + x^2dx^2}}{y},$$

ou $\quad (y^2 + x^2)dx = a\sqrt{(y^2 + x^2)\,dx^2} = a \times \sqrt{y^2 + x^2} \times dx,$

ou, en divisant par dx,

$$y^2 + x^2 = a\sqrt{y^2 + x^2};$$

mais l'équation (152) donne $y^2 + x^2 = a^2$ ; substituant cette valeur dans l'équation précédente nous aurons enfin

$$a^2 = a^2;$$

donc l'équation (152), différentiée, satisfait à l'équation différentielle (147) proposée et n'est pas comprise dans l'intégrale complète ; c'est donç bien une solution particulière.

130. — *Remarque.* — En appliquant, comme nous venons de le faire dans l'article précédent, les principes que nous avons démontrés à l'article 127, nous avons déterminé la valeur de c en égalant à zéro q ou coefficient différentiel $\frac{dy}{dc}$. Il peut arriver parfois que ce procédé soit insuffisant, car l'équation (145)

$$dy = p\,dx + q\,dc,$$

étant mise sous la forme

$$A\,dx + B\,dy + C\,dc = o,$$

équation dans laquelle A, B et C sont des fonctions de x et de y, nous en tirerons

$$dy = -\frac{A}{B}dx - \frac{C}{B}dc, \; dx = -\frac{B}{A}dy - \frac{C}{A}dc \; ... \; (153),$$

et d'après ces expressions, nous pouvons remarquer que si nous appliquons à x considéré comme fonction de y, tout ce que nous avons dit de y considéré comme fonction de x, la valeur du coefficient de dc ne sera pas la même et qu'il suffirait seulement que quelque facteur de B détruisit dans C un autre facteur que celui que pourrait y détruire un facteur de A, pour que les valeurs du coefficient de dc, dans les deux hypothèses, parussent entièrement différentes. Donc, quoique généralement les équations $\frac{C}{B} = o$ et $\frac{C}{A} = o$ donnent la même valeur pour c, cela n'arrive pas toujours. Par conséquent, lorsqu'on aura déterminé c au moyen de l'équation $\frac{dy}{dc} = o$, il conviendra de voir si l'on arrive également au même résultat dans l'hypothèse de $\frac{dx}{dc} = o$.

131. — Il existe une classe générale d'équations qui sont susceptibles d'une solution particulière; ces équations sont renfermées dans l'équation différentielle générale

$$y = \frac{dy}{dx} x + F\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

expression qui, en faisant $\frac{dy}{dx} = p$, pourra se mettre sous la forme

$$y = px + Fp \ldots (154).$$

En la différentiant, nous aurons, (article 9, C.D., et art. 38. C.D.):

$$dy = pdx + xdp + \frac{d. Fp}{dp} dp\,;$$

et comme $dy = pdx$, d'après ce qui précède, l'équation précédente devient

$$pdx = pdx + xdp + \frac{d.Fp}{dp} dp,$$

ou

$$x.dp + \frac{d.Fp}{dp} dp = o,$$

ou

$$\left(x + \frac{d.Fp}{dp}\right) dp = o.$$

Cette équation est satisfaite en faisant $dp = o$, d'où $p =$ constante $= c$; par suite, cette valeur substituée dans l'équation (154), donne

$$y = cx + Fc\,;$$

expression qui est l'intégrale complète de l'équation différentielle proposée, puisque nous avons introduit une constante arbitraire c par l'intégration.

Différentions cette intégrale complète par rapport à c, nous aurons

$$o = x\,dc + \frac{d.Fc}{dc}\,dc, \text{ ou } \left(x + \frac{d.Fc}{dc}\right)dc = o,$$

par suite, en égalant à zéro le coefficient de dc, conformement aux principes que nous avons exposés, il viendra

$$x + \frac{d.Fc}{dc} = o,$$

équation à l'aide de laquelle on trouvera la valeur de c que l'on substituera dans l'intégrale complète et l'on obtiendra la solution particulière.

## Intégration des équations différentielles du second ordre.

132. — Les équations différentielles du second ordre à deux variables, art. 93, C.I., sont comprises dans la formule générale

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = o \ldots (155).$$

Nous ne chercherons pas à intégrer cette équation dans ce degré de généralité ; nous examinerons seulement les moyens de trouver l'intégrale dans des cas particuliers.

133. — Supposons donc d'abord le cas où l'on aurait l'équation

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = o \;(156) ;$$

faisons $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, et l'équation précédente prendra la forme plus simple :

$$f\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = o \ldots (157).$$

Si cette équation est intégrable et qu'on en tire $p = X$ ou fonction de x, on trouvera facilement la valeur de y ; car l'équation $\frac{dy}{dx} = p$ nous donnant $y = \int pdx$, en substituant dans cette équation la valeur de p, nous aurons $y = \int X\,dx$, expression qui est intégrable, (art. 88, C. I.), on arrivera ainsi à l'intégrale pour ce cas ; mais

si l'équation (157), au lieu de donner la valeur de p en x, donnait celle de x en fonction de p, de façon qu'on eût $x = P$ ou fonction de p, en intégrant par parties, art. 16, C. I., l'expression $dy = pdx$, on aurait d'abord

$$\int dy \text{ ou } y = \int pdx = px - \int xdp\,;$$

substituant ensuite dans cette équation (dernier terme), la valeur de x, il viendrait

$$y = px - \int Pdp,$$

sous cette forme on sait trouver également l'intégrale du dernier terme, art. 88, C. I., et après substitution, l'expression ci-dessus deviendra alors l'intégrale cherchée, pour le second cas, quand on y aura éliminé p au moyen de l'équation $x = P$.

134. — Supposons maintenant qu'on ait le cas où

$$f\left(y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0 \ldots (158).$$

Posons $\frac{dy}{dx} = p$, nous aurons $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$; et, comme de $\frac{dy}{dx} = p$ on tire $dx = \frac{dy}{p}$, en substituant cette valeur dans l'expression précédente, il viendra

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{\frac{dy}{p}} = \frac{pdp}{dy}.$$

Substituant ces valeurs de $\frac{dy}{dx}$ ou p et de $\frac{d^2y}{dx^2}$ ou $\frac{pdp}{dy}$ dans l'équation (158), elle deviendra

$$f\left(y, p, \frac{pdp}{dy}\right) = 0 \text{ ou } f\left(y, p, \frac{dp}{dy}\right) = 0.$$

Maintenant, si cette équation peut donner p en fonction de y ou $p = Y =$ fonction de y, on substituera cette valeur dans l'équation $dx = \frac{dy}{p}$, et il viendra en intégrant

$$\int dx \text{ ou } x = \int \frac{dy}{Y} = \int Y^{-1}\,dy,$$

expression intégrable (art. 88, C.I.), et qui fournira l'intégrale cherchée.

Si, au contraire, y se détermine en fonction de p, et que l'on ait, par conséquent, $y = P$ ou fonction de p, pour

obtenir x, nous devrons intégrer par parties l'équation $dx = \frac{dy}{p}$, et il viendra, (art. 16, C. I., et art. 11, C. D.) :

$$\int dx \text{ ou } x = \int \frac{dy}{p} = \int \frac{1}{p} dy = \frac{1}{p} y - \int \left( y\, d.\frac{1}{p} \right) = \frac{y}{p} - \int \left( y \times \frac{p.d.1 - 1.dp}{p^2} \right) = \frac{y}{p} - \int y \left( \frac{-dp}{p^2} \right) = \frac{y}{p} + \int y \frac{dp}{p^2};$$

et, en remplaçant dans cette équation y par sa valeur P, nous aurons

$$x = \frac{P}{p} + \int P \frac{dp}{p^2};$$

expression intégrable (art, 88, C. I.) ; après intégration, nous éliminerons ensuite p au moyen de l'équation $y = P$, et nous obtiendrons ainsi l'intégrale cherchée.

135. — Dans le cas où l'équation générale (155) est réduite à

$$f\left( \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = 0 \ldots (159),$$

pour trouver l'intégrale, faisons $\frac{dy}{dx} = p =$ (coefficient différentiel de y par rapport à x), et par suite $\frac{d^2 y}{dx^2} = d.\left(\frac{dy}{dx}\right)$: $dx = \frac{dp}{dx}$; l'équation (159) devient

$$f\left(p, \frac{dp}{dx}\right) = 0,$$

de laquelle on tire $\frac{dp}{dx} = P \ldots (160)$,

d'où $dx = \frac{dp}{P}$ et $x = \int dx = \int \frac{dp}{P} = \int P^{-1}\, dp \ldots (161)$,

expression intég., art. 88, C. I.

D'autre part de l'expression $\frac{dy}{dx} = p$, on tire

$$dy = pdx, \text{ d'où } y = \int dy = \int p\, dx;$$

et, en remplaçant dans cette dernière équation dx par sa valeur $\frac{dp}{P}$, nous aurons

$$y = \int p \frac{dp}{P} = \int p P^{-1} dp \ldots (162),$$

éq. intég., art. 88, C. I.

Après avoir intégré les équations (161) et (162), nous éliminerons entre elles la quantité p pour avoir une équa-

tion en x et en y, et l'on obtiendra ainsi l'intégrale cherchée.

136. — Dans le cas où $\frac{d^2y}{dx^2}$ ne se trouve combiné dans l'équation générale qu'avec une fonction de x, c'est-à-dire est donné en fonction de x, on a donc à intégrer

$$\frac{d^2y}{dx^2} = X;$$

multipliant par dx, il viendra

$$\frac{d^2y}{dx} = Xdx,$$

intégrant nous aurons

$$\int \frac{d^2y}{dx} \text{ ou } \int d.\left(\frac{dy}{dx}\right) \text{ ou } \frac{dy}{dx} = \int Xdx + C,$$

expression intégrable, art. 88, C. I.

Soit X′ l'intégrale indiquée dans cette équation, celle-ci prendra la forme

$$\frac{dy}{dx} = X' + C, \text{ d'où } dy = (X' + C)\,dx = X'dx + C\,dx,$$

et en intégrant, il viendra enfin

$\int dy$ ou $y = \int X'dx + \int C\,dx +$ constante ou $C' = \int X'dx + Cx + C'$.

137. — Finalement, si $\frac{d^2y}{dx^2}$ ne se trouve combiné dans l'équation générale qu'avec une fonction de y, c'est-à-dire est donné en fonction de y, il faut donc intégrer

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Y$$

A cet effet, multiplions par 2 dy, nous aurons

$$\frac{d^2y}{dx^2}\,2\,dy \text{ ou } \frac{d^2y}{dx}\,2\,\frac{dy}{dx} \text{ ou } 2.\frac{dy}{dx} \times \frac{d^2y}{dx} \text{ ou enfin}$$

$$2.\frac{dy}{dx} \times d.\left(\frac{dy}{dx}\right) = 2\,Y\,dy.$$

Le premier membre est composé de la même manière que la différentielle du carré d'une quantité monôme, comme, par exemple, de $y^2$ dont la différentielle est $2.y\,dy$ ; donc dans l'équation ci-dessus l'expression $2.\frac{dy}{dx}.d.\left(\frac{dy}{dx}\right)$ est la différentielle du carré de $\frac{dy}{dx}$, on a donc

$$d.\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \text{ ou } d.\frac{dy^2}{dx^2} = 2\,Y\,dy,$$

et en intégrant, il viendra

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \int 2\,Y\,dy + C \text{ ou } = 2\int Y\,dy + C\,;$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2\int Y\,dy + C},$$

d'où

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{2\int Y\,dy + C}},$$

et par suite, en intégrant, on aura enfin

$$x \text{ ou } \int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{2\int Y\,dy + C}} + C'.$$

## EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE.

138. — Quand une expression ne contient qu'une seule variable, et qu'on la différentie, on obtient une différentielle ordinaire. Mais si cette expression renferme plusieurs variables, pour la différentier par rapport à l'une des variables, on doit considérer les autres variables comme des constantes, et la différentielle qu'on obtient dans ce cas est une différentielle partielle ; la somme des différentielles d'une expression, par rapport à toutes les variables qu'elle contient est encore une différentielle partielle.

Donc, une équation qui existe entre des coefficients différentiels combinés, selon le cas, avec des variables et des constantes, est, en général, une équation différentielle partielle, ou, selon l'ancienne dénomination, est une équation aux différences partielles.

On a désigné ainsi ces équations, parce que la notation des coefficients différentiels qu'elles contiennent indique, comme nous l'avons vu à l'art, 38, C. D. que la différentiation ne peut être effectuée que partiellement, c'est-à-dire en considérant certaines variables comme constantes. Cela suppose donc que la fonction proposée contient plusieurs variables. Pour plus de simplicité, nous n'en admettrons d'abord que deux, et nous examinerons les moyens d'intégrer les équations différentielles partielles du premier

ordre, qui sont celles qui ne renferment qu'un ou plusieurs coefficients différentiels du premier ordre, art. 93, C. I.

139. — Dans le cas où il n'y a, dans l'équation différentielle donnée, qu'un coefficient différentiel partiel du premier ordre, c'est-à-dire lorsqu'on a différentie une fonction de x, y, que par rapport à une seule variable, le procédé d'intégration est le même que celui employé pour l'intégration des équations différentielles ordinaires, sauf que l'on suppose constante l'une des deux variables, et que, par suite, l'on introduit dans l'intégrale une constante fonction de cette variable. Les exemples suivants vont éclaircir et démontrer cette proposition.

140. En effet, soit d'abord à intégrer l'équation :

$$\frac{dz}{dx} + a,$$

expression qui est la différentielle de z par rapport à x, et dans laquelle z est fonction de x et de y. Si, contrairement à cette hypothèse, z ne contenait que x, nous aurions une équation différentielle ordinaire dont l'intégrale serait z ou $\int dz = \int a\,dx = a\,x + C$. Mais comme z est fonction de x et de y, et que nous n'avons différentié que par rapport à x, c'est-à-dire en ne considérant y que comme une constante, il en résulte que les y renfermés dans z ont dù disparaître par la différentiation et que nous devons les restituer dans l'intégrale trouvée ci-dessus ; nous pouvons donc, en général, considérer la constante C comme une fonction de y, et ainsi nous aurons pour l'intégrale de l'équation proposée $z = ax + \varphi\,y$,

$\varphi\,y$ pouvant contenir une constante ordinaire.

141. — Soit maintenant l'équation

$$\frac{dz}{dx} = X,$$

dans laquelle X est une fonction de x ; multipliant par dx, et intégrant, il viendra

$$\int dz \text{ ou } z = \int X\,dx + C\,;$$

et en remplaçant, comme dans l'exemple précédent, C par une fonction de y, nous aurons enfin pour l'intégrale

$$z = \int X\,dx + \varphi\,y.$$

*Exemple.* — Soit $X = x^2 + a^2$, l'intégrale devient $z = \int (x^2 + a^2)\, dx + \varphi y = \int (x^2 dx + a^2 dx) + \varphi y = \frac{x^{2+1}}{2+1} + a^2 x + \varphi y = \frac{x^3}{3} + a^2 x + \varphi y$.

142. — Soit encore $\frac{dz}{dx} = Y$,

d'où $dz = Y\, dx$ et $z = \int Y\, dx + \varphi y = Yx + \varphi y$.

143. — Enfin, toute équation dans laquelle $\frac{dz}{dx}$ égale une fonction de deux variables x et y, sera intégrée de la même manière. Ainsi, par exemple, si nous avons l'équation :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x}{\sqrt{ay + x^2}},$$

nous en tirerons $dz = \frac{x\, dx}{\sqrt{ay + x^2}} = x \frac{1}{(ay + x^2)^{1/2}} dx = x (ay + x^2)^{-1/2} dx$ ; donc

$$z \text{ ou } \int dz = \int (ay + x^2)^{-1/2} x\, dx ;$$

mais la différentielle de $ay + x^2$, en regardant y comme une constante, est $2x dx$ et ne diffère donc de $x\, dx$ que par la constante 2 ; posons donc, comme nous avons déjà fait antérieurement (art. 9, C. I.), $ay + x^2 = v$ et par conséquent $2x\, dx = dv$, d'où $x\, dx = \frac{dv}{2}$ ; substituant ces valeurs dans l'expression à intégrer ci-dessus, il viendra

$$z = \int (v^{-1/2}) x\, dx = \int v^{-1/2} \frac{dv}{2} = \frac{1}{2} \int v^{-1/2} dv = \frac{1}{2} \left( \frac{v^{-1/2+1}}{\frac{-1+1}{2}} \right) + C = \frac{1}{2} \left( \frac{v^{1/2}}{\frac{1}{2}} \right) + C = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{v}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{v} + C = \sqrt{ay + x^2} + C = \sqrt{ay + x^2} + \varphi y.$$

144. — Finalement, soit à intégrer

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}},$$

nous en tirerons $dz = \frac{dx}{\sqrt{y^2 - x^2}}$, d'où, en considérant toujours y comme une constante

$$z = \int \frac{dx}{\sqrt{y^2 - x^2}} + \varphi y ;$$

or,(art. 11, C.I.rem.), la partie qui est sous le signe d'intégration peut être mise sous la forme

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y^2 - x^2}} = \text{arc}\left(\sin = \frac{x}{y}\right),$$

donc l'intégrale cherchée est

$$z = \text{arc}\left(\sin = \frac{x}{y}\right) + \varphi y.$$

145. — Enfin, pour intégrer l'équation

$$\frac{dz}{dx} dx = F(x, y)\, dx,$$

qui est l'expression générale de la différentielle de z par rapport à x, nous prendrons donc l'intégrale par rapport à x, et nous ajouterons ensuite une constante fonction de y, pour la compléter, nous trouverons ainsi

$$\int \frac{dz}{dx} dx \text{ ou } \int dz \text{ ou } z = \int F(x,y)\, dx + \varphi y.$$

146. — Nous allons maintenant examiner les moyens d'intégrer les équations différentielles partielles qui au lieu de ne renfermer qu'un seul coefficient différentiel du premier ordre, en contiennent deux ; c'est-à-dire les équations différentielles partielles qui expriment la somme des différentielles par rapport aux deux variables x et y, de la fonction, z par exemple, de ces deux variables.

147. — Soit donc d'arbord l'équation

$$M \frac{dz}{dx} + N \frac{dz}{dy} = 0, \text{ .. (163)},$$

dans laquelle M et N représentent des fonctions données de x et de y. Nous en tirerons

$$\frac{dz}{dy} = - \frac{M}{N} \frac{dz}{dx};$$

substituant cette valeur dans l'expression suivante

$$dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy \text{.... (164)},$$

qui est une formule générale dont le sens est uniquement d'exprimer la condition que z est fonction de x et de y, c'est-à-dire est la somme des différentielles de z par rapport à x et par rapport à y, il viendra

$$dz = \frac{dz}{dx}\left(dx - \frac{M}{N} dy\right),$$

ou
$$dz = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{N dx - M dy}{N} \dots (165).$$

Soit $\lambda$ l'un des facteurs propres à rendre $Ndx—Mdy$ une différentielle exacte que nous représenterons par $dv$, nous aurons donc

$$\lambda(Ndx—Mdy) = dv, \text{ ou } Ndx—Mdy = \frac{dv}{\lambda} \dots(166).$$

A l'aide de cette équation, éliminons $Ndx — Mdy$ de l'équation (165), nous obtiendrons

$$dz = \frac{dz}{dx} \frac{dv}{\lambda N} = \frac{1}{\lambda N} \frac{dz}{dx} dv.$$

Enfin, comme la valeur de $\frac{1}{\lambda N}$ n'est point déterminée, nous pouvons la prendre telle que $\frac{1}{\lambda N} \frac{dz}{dx} dv$ puisse s'intégrer, ce qui exige que $\frac{1}{\lambda N} \frac{dz}{dx}$ soit une fonction de $v$, car nous savons que la différentielle de toute fonction donnée de $v$, doit être de la forme $F v. d v.$ (art. 88 du Calc.Int.). Il résulte donc de là que nous devons avoir

$$\frac{1}{\lambda N} \frac{dz}{dx} = F v,$$

équation qui transformera la précédente en

$$dz = F v. dv ;$$

d'où nous tirerons, d'après ce qui précède :

$$\int dz \text{ ou } z = \int Fv. dv = \varphi v \dots (167).$$

*Exemple.* — Soit à intégrer par ce moyen l'équation

$$x \frac{dz}{dy} - y \frac{dz}{dx} = 0 \dots (168),$$

dans ce cas, nous avons, par comparaison avec l'équation proposée (163), $M = -y$, $N = x$, et par suite l'équation (166), deviendra $\lambda(x\,dx + y\,dy) = dv.$

Or, à la seule inspection, nous voyons que le facteur $\lambda$, propre à rendre intégrable le premier membre de cette équation, est 2, car $\int 2xdx + 2ydy = x^2 + y^2$.

Substituant donc 2 à $\lambda$ et intégrant, il viendra :
$\int dv$ ou $v = \int 2(xdx + ydy) = \int(2xdx + 2ydy) = x^2 + y^2$; substituant cette valeur dans l'équation (167) nous aurons

$$z = \varphi(x^2 + y^2),$$

expression qui est l'intégrale cherchée de l'équation (168).

148. — Soit maintenant à intégrer l'équation

$$P\frac{dz}{dx}+Q\frac{dz}{dy}+R=0\ldots(169),$$

dans laquelle P, Q et R sont des fonctions des variables x, y et z. Divisons par P, et faisons $\frac{Q}{P}=M$, $\frac{R}{P}=N$, cette équation pourra se mettre sous la forme

$$\frac{dz}{dx}+M\frac{dz}{dy}+N=0\ldots.(170);$$

et faisons $\frac{dz}{dx}=p$, $\frac{dz}{dy}=q$, elle deviendra

$$p+Mq+N=0\ldots.(171),$$

de laquelle on tire $p=-Mq-N$ et $q=-\frac{p}{M}-\frac{N}{M}$.

*La présente proposition se divisera entre les art. 148 à 150 inclus, l'art 150 donnera l'intégrale générale $U=\Phi v$.*

L'équation (171) établit une relation entre les coefficients p et q de la formule générale (164) mise sous la forme

$$dz=p\,dx+q\,dy\ldots.(172);$$

sans cette relation p et q seraient entièrement arbitraires dans cette formule ; car, comme nous l'avons déjà dit, art. 147, elle n'a d'autre sens que d'indiquer que z est une fonction de deux variables x et y, et cette fonction peut être évidemment quelconque ; par conséquent nous devons considérer, dans l'équation (172), p et q comme deux indéterminées liées par la relation que cette équation exprime. Substituant dans l'équation (172) la valeur ci-dessus de p, tirée de l'équation (171), nous éliminerons p et il viendra

$dz=(-Mq-N)dx+q\,dy=-Mq\,dx-N\,dx+q\,dy$, d'où

$dz+N\,dx=q(dy-M\,dx)\ldots(173)$;

q restant toujours indéterminé ; mais l'on sait, (art. 150 du calc. diff.), que lorsqu'une équation du genre de l'équation (173) a lieu quel que soit q, l'on doit avoir séparément

$$dz+Ndx=0,\ dy-Mdx=0\ldots(174).$$

149. — Lorsque P, Q et R ne contiennent pas la variable z, il en sera évidemment de même de M et de N, qui égalent respectivement $\frac{Q}{P}$ et $\frac{R}{P}$, voir ci-dessus, alors la

seconde des équations (174) sera une équation à deux variables x et y, et pourra devenir une différentielle exacte à l'aide d'un facteur que nous représenterons par $\lambda$ ; et nous obtiendrons

$$\lambda(dy - Mdx) = o \ldots (175).$$

L'intégrale de cette équation sera une fonction de x et de y à laquelle nous devrons ajouter une constante arbitraire $\omega$ que nous prendrons négative pour que transposée dans le second membre, elle soit positive, de sorte que cette intégrale sera

$$F(x, y) + (-\omega) = o \text{ ou } F(x, y) = \omega,$$

de laquelle nous tirerons

$$y = f(x, \omega),$$

telle sera la valeur de y qui nous sera donnée comme l'intégrale de la seconde des équation (174) ; et pour établir que les deux équations (174) ont lieu simultanément, nous devrons substituer cette valeur de y, dans la première de ces équations ; or, quoique cette variable y n'y soit pas en évidence, on conçoit qu'elle peut être contenue dans N.

Cette substitution, d'après la valeur que nous venons de trouver pour y, revient à considérer, dans la première des équations (174), y comme une fonction de x et de la constante arbitraire $\omega$.

Intégrons donc cette première équation dans cette hypothèse, nous trouverons enfin pour l'intégrale cherchée $dz = -Ndx$, d'où $z = \int -Ndx + \text{constante} = -\int Ndx + \varphi\omega$, (art. 139, C. I.).

*Exemple.* — Comme application de cette manière de procéder, soit à chercher l'intégrale de l'équation

$$x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} = a\sqrt{x^2 + y^2},$$

qui peut être mise sous la forme $\frac{dz}{dx} + \frac{y}{x}\frac{dz}{dy} = a\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$,

et en la comparant à l'équation (170), nous aurons

$$M = \frac{y}{x},\ N = -a\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} \ldots (176).$$

Substituant ces valeurs dans les équations (174), elles deviendront

$$dz - a\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}dx = 0,\ dy - \frac{y}{x}dx = 0 \ldots (177).$$

Soit $\lambda$ l'un des facteurs propres à rendre intégrable cette dernière équation, nous aurons

$$\lambda\left(dy - \frac{y}{x}dx\right) = 0,$$

ou plutôt

$$\lambda\left(\frac{x\,dy - y\,dx}{x}\right) = 0,$$

équation intégrable si nous faisons $\lambda = \frac{1}{x}$, car alors son premier membre devient

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = 0,$$

qui est une différentielle exacte, art. 115, C.I., exemple; (et nous savons que son intégrale est $\frac{y}{x}$, art. 11, Calc. diff.).

Egalant donc l'intégrale de cette équation à une constante arbitraire $\omega$, nous aurons

$$\frac{y}{x} = \omega,$$

et par suite $y = \omega x$.

Au moyen de cette valeur de $y$, nous changerons la première des équations (177) en

$$dz - a\frac{\sqrt{x^2+\omega^2x^2}}{x}dx = 0, \text{ ou } dz = a.dx\sqrt{\frac{x^2+\omega^2x^2}{x^2}} =$$
$$a.dx\sqrt{1+\omega^2};$$

et intégrons, en considérant $\omega$ comme constant, nous aurons, d'après l'art. 139, C.I.,

$$z = \int a.dx\sqrt{1+\omega^2} = a\sqrt{1+\omega^2}\int dx = a\sqrt{1+\omega^2}(x) + \varphi\omega =$$
$$ax\sqrt{1+\omega^2} + \varphi\omega;$$

et, en remplaçant $\omega$ par sa valeur, nous obtiendrons enfin

$$z = ax\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} + \varphi\frac{y}{x} = ax\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}} + \varphi\frac{y}{x} = a\sqrt{x^2+y^2} + \varphi\frac{y}{x}.$$

150. — Dans le cas le plus général, où les coefficients P, Q, R, de l'équation (169), contiennent les trois variables $x, y, z$, au lieu de deux (art. 149), il peut arriver que les équations (174) ne renferment chacune que les deux varia-

bles qui sont en évidence, et que, par conséquent, nous puissions les mettre sous les formes

$$dz = f(x, z)\,dx = 0, \qquad dy = F(x, y)\,dx = 0.$$

Nous ne pouvons intégrer isolément ces équations, en écrivant, comme dans l'article (145, C.I.),

$$z = \int f(x,z)\,dx + \varphi z, \; y = \int F(x,y)\,dx + \varphi y\,;$$

car alors nous voyons qu'il faudrait supposer z constant dans la première équation, et y constant dans la seconde, art. 139 et 145, C.I.; et nous aurions ainsi deux hypothèses contradictoires, puisque l'une des trois coordonnées x, y, z, ne peut être supposée constante dans la première équation sansqu'elle le soit dans la seconde.

Voici donc comment nous intégrerons les équations (174), dans le cas où elles ne renferment chacune que les deux variables qui sont en évidence. Soient $\lambda$ et $\mu$ les facteurs qui rendent les équations (174) des différentielles exactes; en représentant ces différentielles par dU et par dV, nous aurons

$$\lambda(dz + Ndx) = dU, \qquad \mu(dy - Mdx) = dV\,;$$

ces valeurs changent l'équation (173) en

$$\frac{d.U}{\lambda} = q\,\frac{dV}{\mu} \text{ ou } dU = q\,\frac{\lambda}{\mu}\,dV \dots. \; (178).$$

Le premier membre de cette équation étant une différentielle exacte, par hypothèse, il doit en être de même du second, ce qui exige que $q\frac{\lambda}{\mu}$ soit une fonction de V, (art. 88, C. I.) ; représentant donc cette fonction par $\varphi V$, l'équation (178) deviendra

$$d.\,U = \varphi V.dV\,;$$

et en intégrant, art. 147, C.I.,

$$U = \int \varphi V.dV = \Phi V = \text{une fonction de V}.$$

*Exemple.* — Comme application de ce procédé, soit à trouver l'intégrale de l'équation

$$xy\,\frac{dz}{dx} + x^2\,\frac{dz}{dy} = yz,$$

que nous mettrons sous la forme suivante, en divisant par xy et en transposant

$$\frac{dz}{dx}+\frac{x}{y}\frac{dz}{dy}-\frac{z}{x}=0\,;$$

en la comparant à l'équation (170), nous aurons

$$M=\frac{x}{y},\ N=-\frac{z}{x}\,;$$

ces valeurs changent les équations (174) en

$$dz-\frac{z}{x}dx=0,\ dy-\frac{x}{y}dx=0\,;$$

ces équations ne renferment chacune que deux variables, et en faisant évanouir les dénominateurs, nous aurons

$$xdz-zdx=0,\ ydy-xdx=0.$$

Nous voyons, à la première inspection, que les facteurs propres à rendre ces équations intégrables sont $\frac{1}{x^2}$ et $2$ ; car en les substituant et en intégrant, nous trouverons pour intégrales $\frac{z}{x}$ et $y^2-x^2$, (art. 149 et 147, C.I.).

Substituant donc ces valeurs à la place de U et de V, dans l'équation $U=\Phi V$, nous obtiendrons enfin pour l'intégrale de l'équation proposée

$$\frac{z}{x}=\Phi(y^2-x^2).$$

151. — Remarquons que si nous avions éliminé q au lieu de p, art. 148, les équations (174) eussent été remplacées par celle-ci :

$$Mdz+Ndy=0,\ dy-Mdx=0\ \dots (179)\,;$$

en effet, de l'équatiou (171), on tire, avons nous vu, $q=-\frac{p}{M}-\frac{N}{M}$, donc, d'après l'équation (172), on a $dz=pdx-\frac{p}{M}dy-\frac{N}{M}dy$, d'où $dz+\frac{N}{M}dy=pdx-\frac{p}{M}dy$, d'où $dz+\frac{N}{M}dy=p\left(dx-\frac{1}{M}dy\right)$, d'où $Mdz+Ndy=p(Mdx-dy)=-p(dy-Mdx)$ ; cette équation ayant lieu quel que soit p, on a :

$$Mdz+Ndy=0 \text{ et } dy-Mdx=0.$$

Maintenant, comme tout ce que nous avons dit des équations (174) peut s'appliquer à celles-ci, il en résulte que dans le cas où la première des équations (174) ne serait

pas intégrable, nous pourrions remplacer ces équations par le système des équations (179), ce qui revient à employer la première des équations (179) à la place de la première des équations (174), alors on examinera si l'intégration est possible. (Remarquons que la seconde des équations (179) est la même que la seconde des équations (174).

Par exemple, si nous avons l'équation

$$az\frac{dz}{dx} - zx\frac{dz}{dy} + xy = 0,$$

ou, en divisant par az,

$$\frac{dz}{dx} - \frac{x}{a}\frac{dz}{dy} + \frac{xy}{az} = 0\;;$$

en la comparant à l'équation (170), nous aurons

$$M = -\frac{x}{a}, N = \frac{xy}{az}\;;$$

par conséquent, les équations (174) deviendront

$$dz + \frac{xy}{az}dx = 0, \quad dy + \frac{x}{a}dx = 0;$$

et, en chassant les dénominateurs, nous obtiendrons

$$az\,dz + xy\,dx = 0,\ ady + xdx = 0 \ldots (180).$$

La première de ces équations, qui contient trois variables, ne pouvant s'intégrer immédiatement, nous la remplacerons par la premièredes équations (179), et nous aurons au lieu des équations (180), celles-ci :

$$-\frac{x}{a}dz + \frac{xy}{az}dy = 0,\ ady + xdx = 0\;;$$

supprimant $\frac{x}{a}$ comme facteur commun dans la première de ces équations, et multipliant l'une par $2z$ et l'autre par $2$, il viendra

$$-2z\,dz + 2y\,dy = 0,\ 2ady + 2xdx = 0,$$

et en intégrant nous trouverons

$$y^2 - z^2,\ \text{et}\ 2ay + x^2\;;$$

ces valeurs étant mises à la place de U et de V, art. 150, nous aurons enfin

$$y^2 - z^2 = \phi\,(2ay + x^2).$$

152. — Nous pouvons également observer que la pre-

mière des équations (179) n'est autre chose que le résultat de l'élimination de dx entre les équation (174). En effet, on tire de ces dernières

$$dx = -\frac{dz}{N} = \frac{dy}{M}, \text{ d'où } -Mdz = Ndy \text{ ou } Mdz + Ndy = o.$$

En général, on peut éliminer toute variable contenue dans les coefficients M et N, et enfin, combiner d'une manière quelconque ces équations ; et si, après avoir exécuté ces opérations, on obtient, pour ces équations ainsi modifiées, deux intégrales représentées par $U = a$ et par $V = b$, a et b étant deux constantes arbitraires, on pourra toujours en conclure que l'intégrale est $U = \Phi V$, art. 150, C. I.

En effet, puisque a et b sont deux constantes arbitraires, ayant pris b à volonté, nous pouvons composer a en b d'une manière quelconque ; ce qui revient à dire que l'on a la faculté de prendre pour a une fonction arbitraire de b ; cette condition sera exprimée par l'équation $a = \Phi b$ ; par conséquent, nous aurons les équations $U = a = \Phi b$, $V = b$, dans lesquelles x, y et z représentent les mêmes coordonnées ; si nous éliminons b entre ces équations, nous aurons donc $U = \Phi V$.

Remarquons encore que cette équation nous apprend qu'en faisant $V = b$, nous devons avoir $U = \Phi b =$ constante ; c'est-à-dire que U et V sont constantes en même temps, sans que a et b dépendent l'un de l'autre, puisque la fonction représentée par le signe $\Phi$ est arbitraire. Or, c'est précisément la condition qu'expriment les équations $U = a$ et $V = b$.

153. — Comme application de cette proposition, soit à intégrer l'équation

$$zx\frac{dz}{dx} - zy\frac{dz}{dy} - y^2 = o\ ;$$

en la divisant par zx, elle deviendra

$$\frac{dz}{dx} - \frac{y}{x}\frac{dz}{dy} - \frac{y^2}{zx} = o,$$

et puis, en la comparant à l'équation (170), nous aurons

$$M = -\frac{y}{x} \text{ et } N = -\frac{y^2}{zx}\ ;$$

ces valeurs, substituées dans les équations (174) donnent

$$dz - \frac{y^2}{zx}\,dx = 0,\ dy + \frac{y}{x}\,dx = 0.$$

ou

$$z\,x\,dz - y^2\,dx = 0, \quad x\,dy + y\,dx = 0.$$

La première de ces équations contenant trois variables, pour l'intégrer nous la transformerons de façon à ce qu'elle ne contienne que deux variables et devienne facilement intégrable ; c'est-à-dire que nous éliminerons une variable, art. 152, C. I. A cet effet nous y substituerons la valeur de $y\,dx$, ou $-x\,dy$, tirée de la seconde, nous aurons ainsi $z\,x\,dz - y\,(-x\,dy) = 0$, ou $z\,x\,dz + y\,x\,dy = 0$, ou en supprimant le facteur commun x,

$$z\,dz + y\,dy = 0,$$

et il n'y a qu'à la multiplier par 2, comme on voit, pour qu'elle devienne intégrable ; et comme la seconde équation est aussi intégrable, nous aurons donc en les intégrant $\int 2z dz + 2y\,dy = z^2 + y^2$, et $\int x\,dy + y dx =$ (art. 9, C. D.) $= xy$, et comme on peut poser

$$z^2 + y^2 = a \text{ et } xy = b,$$

on a donc, art. précédent,

$$z^2 + y^2 = \Phi\,xy.$$

154. — Nous allons maintenant examiner le moyen de *trouver l'équation différentielle partielle dont l'intégrale, contenant une fonction arbitraire d'une ou de plusieurs variables, est donnée.*

Soit donc donnée l'équation

$$z = F\,(x^2 + y^2),$$

F étant une fonction arbitraire.

Posons $$x^2 + y^2 = u \ldots (181),$$

et l'équation donnée deviendra

$$z = Fu\,;$$

la différentielle de Fu devant être, en général, une fonction de u mulpliée par du, (art. 88, C.I.), nous pouvons mettre l'expression précédente sous la forme

$$dz = \varphi\,u.\,du\,;$$

maintenant, si nous prenons la différentielle de z, par rapport à x seulement, c'est-à-dire donc en regardant y comme une constante, nous devrons prendre aussi la

différentielle de u dans la même hypothèse ; par suite, nous aurons

$$\frac{dz}{dx} = \varphi u . \frac{du}{dx} \ldots (182).$$

De même, si nous considérons x comme constant et y comme variable, nous aurons

$$\frac{dz}{dy} = \varphi u . \frac{du}{dy} \ldots (183) ;$$

les valeurs des coefficients différentiels $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dy}$, qui entrent dans les équations (182) et (183) s'obtiendront en différentiant successivement l'équation (181) par rapport x et à y, et nous aurons ainsi

$$\frac{du}{dx} = 2x, \frac{du}{dy} = 2y ;$$

substituant ces valeurs dans les équations (182) et (183), nous obtiendrons

$$\frac{dz}{dx} = \varphi u . 2x = 2x . \varphi u ; \frac{dz}{dy} = \varphi u . 2y = 2y . \varphi u ;$$

éliminant $\varphi u$ entre ces équations, il viendra d'abord

$$\varphi u = \frac{dz}{2x . dx.} = \frac{dz}{2y . dy},$$

d'où l'on tire $\frac{dz}{xdx} = \frac{dz}{ydy}$ ou $\frac{ydz}{dx} = \frac{xdz}{dy}$, et par suite, nous aurons enfin pour la différentielle partielle cherchée

$$y\frac{dz}{dx} = x\frac{dz}{dy}.$$

*Exemple.* — Soit donnée l'équation

$$z^2 + 2ax = F(x - y) ;$$

posons $x - y = u \ldots (184)$,

l'équation donnée deviendra

$$z^2 + 2ax = Fu ;$$

et, en différentiant, nous aurons, (art. 88, C.I.) :

$$d.(z^2 + 2ax) = \varphi u . du ;$$

prenant la différentielle indiquée par rapport à x, en considérerant z, fonction de x, y, comme une variable en vertu de x qui y est contenu, et divisant par dx, nous aurons

$$\frac{2z\,dz}{dx} + \frac{2a\,dx}{dx} = \varphi u . \frac{du}{dx}.$$

ou $$2z\frac{dz}{dx}+2a=\varphi u.\frac{du}{dx}\ldots.(185);$$

opérant de même par rapport à y, en considérant z, comme une fonction qui ne varie qu'à cause de y, et divisant par dy, nous obtiendrons

$$2z\frac{dz}{dy}=\varphi u.\frac{du}{dy}(186);$$

éliminons les coefficients différentiels $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dy}$ ; à cet effet, de l'équation (184), tirons, en différentiant d'abord par rapport à x, puis à y,

$$du=dx,\text{ d'où }\frac{du}{dx}=1,$$

et $$du=-dy,\text{ d'où }\frac{du}{dy}=-1,$$

puis substituons ces valeurs dans les équations (185) et (186), nous obtiendrons

$$2z\frac{dz}{dx}+2a=\varphi u,\quad 2z\frac{dz}{dy}=-\varphi u;$$

éliminant $\varphi$ u entre ces équations, nous aurons

$$2z\frac{dz}{dx}+2a=-2z\frac{dz}{dy},$$

ou $$\frac{dz}{dx}+\frac{2a}{2z}=-\frac{dz}{dy},\text{ ou }\frac{dz}{dx}+\frac{a}{z}=-\frac{dz}{dy},$$

ou enfin $$\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}+\frac{a}{z}=0.$$

Détermination des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations différentielles partielles du premier ordre.

155. — Les fonctions arbitraires qui complètent les intégrales des équations différentielles partielles, (fonctions telles que $\varphi$ y, $\Phi$y, etc., art. 139, C.I., et suivants), se déterminent par des conditions inhérentes à la nature des problèmes qui ont donné lieu à ces équations différentielles. Ces problèmes appartiennent, pour la plupart, à des questions physico-mathématiques ; mais afin de ne point nous écarter de notre sujet, nous nous bornerons donc ici à quelques questions purement analytiques.

Examinons d'abord les *conditions* contenues dans quelques équations différentielles partielles du premier ordre.

156. — Soit premièrement l'équation

$$\frac{dz}{dx} = a \ldots (187),$$

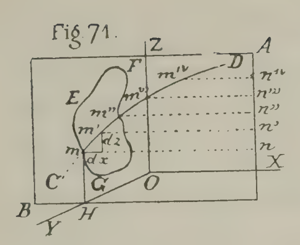
et son intégrale, art. 140, C.I.,

$$z = ax + \varphi y \ldots \quad (188).$$

Tout d'abord, on comprend que lorsque z est une fonction de x et de y, l'équation différentielle (187) peut être considérée comme celle d'une surface, c'est-à-dire comme la différentielle de l'équation d'une surface (géométrie analytique à trois dimensions). Cette surface, d'après la nature de son équation, jouit de la propriété suivante, que le coefficient différentiel $\frac{dz}{dx}$, tiré de son équation, doit toujours être une quantité constante.

Il résulte de là : 1°. *que la condition renfermée dans l'équation (187), est que tous les plans sécants menés parallèlement à celui des $x$, $z$, conperont la surface suivant des lignes droites qui seront parallèles, et qui formeront, chacune, avec une parallèle à l'axe des $x$ un angle dont la tangente trigonométrique sera $a$*; *et 2° que la condition, que nous fournit l'intégrale (188), est que les droites, dont il s'agit précédemment, passent toutes par une courbe tracée sur le plan des $y$, $z$, courbe obtenue par l'intersection de ce plan avec la surface considérée, et dont l'équation $z = \varphi y$, (de cette courbe), est la fonction arbitraire $\varphi y$.*

En effet, 1°, soit, fig. 71, un plan quelconque AB, parallèle à celui des x, z, et dont l'intersection avec la surface est la ligne CD; il s'agit donc de démontrer que cette section CD est une ligne droite faisant un angle constant, dont la tangente trigonométrique est a, avec l'axe des abscisses. Pour cela, quelle que soit la nature de la section CD, si on la divise en un nombre infini de parties $mm'$, $m'm''$ $m''m'''$, $m'''m^{IV}$, etc., ces parties, vu leur peu d'étendue, pourront




être considérées comme des lignes droites, et représenteront les éléments (ou parties infiniment petites) de la section ; l'un de ces éléments mm′ faisant, avec une parallèle mn à l'axe des abscisses O X, un angle dont la tangente trigonométrique est représentée par $\frac{dz}{dx}$, (art. 3, calc. diff.); comme cet angle est constant, d'après l'équation $\frac{dz}{dx} = a$, il en résulte que tous les angles $m'mn$, $m''m'n'$, $m'''m''n''$, $m^{IV}m'''n'''$, etc., formés par les éléments de la courbe, avec des parallèles $mn$, $m'n'$, $m''n''$, $m'''n'''$, $m^{IV}n^{IV}$, etc., à l'axe des abscisses, seront tous égaux ; ce qui démontre que la section CD est une ligne droite.

On arriverait au même résultat en considérant l'intégrale, équation (188), car pour tous les points de la surface qui se trouvent dans le plan A B, l'ordonnée y est égale à une constante C, (distance du plan A B au plan des x, y), représentée par O H dans la figure 71 ; remplaçant donc $\varphi$ y par $\varphi$ c, (car c varie avec les plans plus ou moins éloignés de celui des x, z, c'est-à-dire avec les y), et faisant $\varphi$ c = C, pour le cas du plan déterminé A B, l'équation (188) deviendra

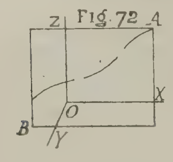
$$z = ax + C. \dots (189) ;$$

cette équation étant celle d'une droite (géom. analytique à trois dimensions, recueil des formules, du même auteur, p. 188), et appartenant à la section C D, il en résulte que cette section est une ligne droite.

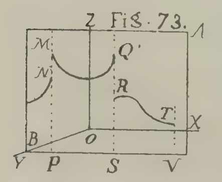
La même chose ayant lieu par rapport à tout autre plan sécant parallèle à celui des x, z, nous pouvons donc conclure que tous ces plans couperont la surface suivant des lignes droites qui sont parallèles, puisqu'elles forment, chacune, comme nous avons vu, avec une parallèle à l'axe des abscisses o X, un angle dont la tangente trigonométrique est exprimée par a.

2°. — Si dans l'équation intégrale (188), nous faisons $x=o$, c'est-à-dire si nous considérons la section faite dans la surface que cette équation représente, par le plan des y, z, cette équation se réduira à $z=\varphi\, y$, et sera celle d'une courbe EFG, par exemple, tracée sur le plan des y, z ; cette courbe renfermant tous les points de la surface dont les coordonnées sont $x=o$, rencontrera le plan A B en un point m, fig. 71, qui aura $x=o$ pour l'une de ses coordonnées ; et comme l'on a également $y=OH=C$, la troisième coordonnée en vertu de l'équation (189) sera $z=o+C=C$, valeur représentée par H m dans la figure. Ce que nous disons du plan A B pouvant s'appliquer à tous les autres plans qui lui sont parallèles, il s'ensuit que par tous les points de la courbe EFG représentée, comme nous avons vu, par l'équation $z=\varphi\, y$, partiront des droites parallèles à l'axe des x ; et comme cette condition est toujours remplie quelle que soit la figure de la courbe représentée par l'équation $z=\varphi\, y$, *il en résulte que cette courbe est arbitraire*, et que, par conséquent, elle peut être composée d'arcs de différentes courbes, qui se joigent les uns les aures, fig. 71 par exemple ; ou qui laissent entre eux des interruptions, en certaines parties, comme dans la figure 72, autre exemple.

On nomme *courbe continue* celle dont toutes les parties se joignent les unes les autres, fig. 71. On appelle *courbe discontinue* une courbe telle que celle représentée fig. 72, dont les parties laissent entr'elles des interruptions.




On entend par *courbe discontiguë* celle dans laquelle il y a interruption entre les parties, sans que, dans les endroits où a lieu cette interruption, son cours soit suspendu, comme dans la fig. 73, où nous voyons, par exemple, les points M et N, ainsi que Q et R, ne laissant entre eux aucun vide bien que ne se succédant pas ; et l'on voit qu'à chaque discontiguïté, les deux ordonnées différentes MP, NP ou QS, RS, correspondent à une



même abscisse. Enfin, *une courbe irrégulière* est celle qui est composée d'une suite infinie d'arcs infiniment petits, qui appartiennent chacun à des courbes différentes, comme seraient, par exemple, des traits de plume que l'on tracerait au hazard.

Mais quelle que soit la courbe arbitraire représentée par l'équation $z = \varphi y$, pour construire la surface, il suffira de faire mouvoir une droite toujours parallèlement à elle-même, avec cette condition, que son point m parcoure la courbe, (par exemple EFG de la figure 71), dont $z = \varphi y$ est l'équation, et qui est tracée au hasard sur le plan des $yz$.

157. — Soit maintenant l'équation

$$\frac{dz}{dx} = X,$$

dans laquelle X est une fonction de x, et dont l'intégrale est, art. 141, C.I., $z = \int X\, dx + \varphi y$.

Menons encore, comme dans la fig. 71, un plan AB parallèle à celui des x, z ; la surface sera coupée suivant une certaine section CD, qui ne sera plus une ligne droite, comme dans le cas précédent ; car pour tout point m', pris sur cette section, la tangente trigonométrique $\frac{dz}{dx}$ de l'angle $n'm'm''$ formé par le prolongement de l'élément $m'm''$ de la section, avec une parallèle à l'axe des x, sera égale à une fonction X de l'abscisse x de ce point, d'après l'équation donnée ; et comme l'abscisse x est différente pour chaque point, il en résulte que l'angle $n'm'm''$ sera différent à chaque point de la section, et, par conséquent, la ligne CD, ne sera plus une ligne droite. La surface se construira, comme dans le cas précédent, en faisant mouvoir la section CD parallèlement à elle-même, de façon que son point m touche continuellement la courbe arbitraire EFG, représentée par l'équation $z = \varphi y$, obtenue en faisant $x = o$ dans l'intégrale ou équation de la surface.

154. — Soit encore l'équation

$$\frac{dz}{dx} = P,$$

dans laquelle P est une fonction de x et de y. Comme

cette équation renferme trois variables, elle représente encore une surface courbe (géom. analytique à trois dimensions p. 258 recueil, du même auteur).

En coupant, comme dans les cas précédents, cette surface par un plan parallèle à celui des x, z, nous aurons une section dans laquelle donc y sera constant ; et comme dans tous les points de cette section, $\frac{dz}{dx}$ égalera une fonction de la variable x, (puisque $\frac{dz}{dx} = P =$ fonction de x et de y, et y étant constant, $\frac{dz}{dx} =$ fonction de x), il faudra donc, d'après le cas précédent, que cette section soit courbe.

Or, de l'équation $\frac{dz}{dx} = P$, on tire $dz = P\,dx$ et $z = \int P\,dx + \varphi y$, qui est l'intégrale représentant la surface, art. 156. C.I. Si maintenant, dans cette équation, nous faisons successivement $y = y' = y'' = y'''$, etc.. et que nous représentions par $P', P'', P'''$, etc., ce que devient alors la fonction P, nous aurons les équations
$z = \int P'dx + \varphi y'$, $z = \int P''dx + \varphi y''$, $z = \int P'''dx + \varphi y'''$, etc..(190);
et comme $y', y'', y'''$, etc., sont des constantes, ces équations représentent des sections faites par des plans parallèles à celui des x, z ; et nous voyons aussi que ces équations représenteront des courbes de même nature, mais différentes de formes, puisque les valeurs de la constante y n'y sont pas les mêmes ; et, en rencontrant le plan des y, z, ces courbes formeront une courbe dont l'équation s'obtiendra en égalant à zéro la valeur de x dans celle de la surface, car on obtient ainsi la section faite dans la surface par le plan des y, z, et les courbes précédentes ne peuvent évidemment rencontrer ce plan que sur cette section, puisque ces courbes appartiennent à la surface. Représentons donc par Y ou fonction de y, ce que devient $\int P\,dx$ dans ce cas, (P étant fonction de x et de y et x égalant o), nous aurons pour la courbe du plan Y O Z ;

$$z = Y + \varphi y \ldots \ (191),$$

et nous voyons qu'à cause de $\varphi y$, la courbe déterminée

par cette équation doit être arbitraire ; donc, en traçant à volonté, fig. 74, la courbe EFG sur le plan des y, z, et en représentant par KH, la section dont $z = \int P'dx + \varphi y'$ est l'équation, nous ferons mouvoir cette dernière section en tenant son extrémité K constamment appliquée à la courbe EFG, mais de telle façon que, dans ce mouvement, cette section KH prenne les formes successives déterminées par les équations (190), et nous construirons ainsi la surface que l'intégrale de $\frac{dz}{dx} = P$ représente.

159. — Soit enfin l'équation générale

$$\frac{dz}{dx} + M\frac{dz}{dy} + N = 0,$$

dont l'intégrale est, art. 148, C. I., $U = \Phi V$.

Lorsque nous avons $U = a$ et $V = b$, (art. 152, C.I.), ces équations existant chacune entre les trois coordonnées x, y, z, (même article), nous pouvons considérer ces équations comme celles de deux surfaces, (géom. analytique à trois dimensions : une éq. entre trois coordonnées représente une surface éq. 258 du recueil même auteur), et comme ces coordonnées sont communes aux deux équations, il en résulte que ces équations prises simultanément doivent représenter la courbe d'intersection de ces deux surfaces, autrement dit, ces coordonnées communes doivent appartenir à cette courbe d'intersection des deux surfaces. Cela étant, a et b étant des constantes arbitraires, si dans $U = a$, nous donnons à x et à y les valeurs $x'$ et $y'$, nous obtiendrons pour z une fonction de $x'$, de $y'$ et de a, qui déterminera un point de la surface dont $U = a$ est l'équation. Ce point quelconque variera de position si nous donnons successivement diverses valeurs à la constante arbitraire a, ce qui revient à dire qu'en faisant varier a, nous ferons passer la surface, dont $U = a$ est l'équation, par un nouveau système de points. Et, ce que nous disons de $U = a$ pouvant s'appliquer à $V = b$, nous pouvons donc conclure que les deux surfaces changeant continuellement de position avec a et

b, c'est-à-dire passant continuellement par d'autres systèmes de points, la courbe d'intersection de ces deux surfaces changera constamment de position, et, par suite, décrira une surface courbe, dans laquelle a et b pourront être considérés comme deux coordonnées ; et puisque la relation $a = \Phi b$, qui lie entre elles ces deux coordonnées, (art. 152, C.I.), est arbitraire, la section est aussi arbitraire, et l'on conçoit que la détermination de la fonction représentée par le signe $\Phi$ revient au problême de faire passer une surface par une courbe tracée arbitrairement.

160. — Passons maintenant à la détermination de quelques fonctions arbitraires.

Soit d'abord l'équation différentielle partielle

$$y\frac{dz}{dx} = x\frac{dz}{dy} \ldots (192);$$

dont l'intégrale, avons-nous vu, (art. 147, C.I., exemple), est $$z = \varphi\,(x^2 + y^2) \ldots\ldots (193),$$
et proposons-nous de déterminer cette fonction.

Par réciprocité, on tire de l'intégrale (éq. 193),

$$x^2 + y^2 = \Phi z\,;$$

et si nous coupons la surface par un plan parrallèle à celui des x, y, en faisant $z = c$, par exemple, la section aura pour équation $$x^2 + y^2 = \Phi c\,;$$
et en représentant par $a^2$ la constante arbitraire $\Phi c$, nous aurons $$x^2 + y^2 = a^2\,.$$

Cette équation est celle d'un cercle (géom. anal. p. 141 du recueil, même auteur) ; par conséquent la surface possède cette propriété, c'est que toute section faite par un plan parallèle à celui des x, y, est un cercle.

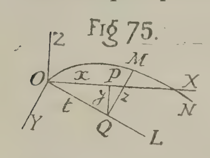
161. — Cette propriété peut encore se déduire de l'équation (192), car on en tire, en vertu de l'art. 45, C. D.,

$$x = y\frac{dz}{dx} : \frac{dz}{dy} = y\frac{dz}{dx} \times \frac{dy}{dz} = y\frac{dy}{dx};$$

or, cette équation est celle de la sous-normale à la courbe, art. 48, C.D., et elle nous apprend que cette sous-normale doit toujours être egale à l'abscisse, ce qui est la propriété du cercle avec l'origine au centre, car alors toute normale passant par le centre passe par l'origine.

162. — L'équation (193) ne nous apprend donc rien d'autre que ceci, c'est que toutes les sections parallèles au plan des x, y, sont des cercles ; il en résulte que la loi suivant laquelle les rayons des sections, de la surface, parallèles au plan des x, y, doivent s'augmenter d'après la génératrice, n'est pas comprise dans l'équation (193), et que, par suite, toute surface de révolution satisfera au problème, puisque dans ces sortes de surfaces, les sections parallèles au plan des x,y, sont toujours des cercles, bien entendu quand l'axe est vertical, et il n'est pas nécessaire de dire que la génératrice qui, dans une révolution, décrit la surface, peut être une courbe quelconque : discontinue, discontiguë, régulière ou irrégulière.

163. — Comme cas particulier, cherchons donc la surface pour laquelle cette génératrice serait une parabole ON, fig. 75, et supposons que, dans cette hypothèse, la surface soit coupée par un plan OB, qui passerait par l'axe des z ; la trace de ce plan sur celui des x, y, sera une droite OL qui, menée par l'origine O, aura pour équation $y = ax$, (géom. analyt. à deux dim. p. 124 du recueil du même auteur).




En représentant par t l'hypothénuse OQ du triangle rectangle OPQ, construit sur le plan des x, y, nous aurons

$$t^2 = x^2 + y^2 ,$$

x et y étant les coordonnées du point Q de la trace OL, dans le plan des x, y ; mais t étant l'abscisse O Q du point M de la parabole ON, dont $QM = z$ est l'ordonnée, cette abscisse et cette ordonnée étant prises dans le plan sécant ZOL, nous aurons par la nature de cette courbe, (parabole), comprise dans le plan ZOL :

$$t^2 = b\,z,$$

équation de la parabole, (géom. analytique à deux dimensions, p. 166, recueil) ; substituant à la place de $t^2$ sa valeur $x^2 + y^2$, il viendra

$x^2 + y^2 = bz$, d'où $z = \frac{1}{b}(x^2 + y^2)$ ; mais de l'équation

ci-dessus $y = ax$, on tire $y^2 = a^2 x^2$, et en mettant cette valeur dans l'équation précédente, nous aurons

$$z = \frac{1}{b}(x^2 + a^2 x^2) = \frac{1}{b} x^2 (1 + a^2);$$

et en faisant $\frac{1}{b}(1 + a^2) = m$, nous obtiendrons

$$z = m x^2;$$

par suite, la condition prescrite dans l'hypothèse où la génératrice doit être une parabole, est que l'on doive avoir

$$z = m x^2 \text{ lorsque } y = ax.$$

Cherchons maintenant à déterminer, au moyen de ces conditions, la fonction arbitraire qui entre dans l'équation (193). A cet effet, représentons par U la quantité $x^2 + y^2$ qui est affectée du signe $\varphi$, et l'équation (193) deviendra

$$z = \varphi U \ldots (194);$$

nous aurons ainsi les trois équations

$$y = ax, \ z = m x^2 \text{ et } x^2 + y^2 = U.$$

Au moyen de la première et de la dernière, nous éliminerons y, et nous aurons la valeur de $x^2$ qui étant mise dans la seconde, nous donnera

$$z = m \frac{U}{1 + a^2}, \ \ldots\ldots (195),$$

en effet, la première donne $y^2 = a^2 x^2$, valeur qui mise dans la troisième produit $x^2 + a^2 x^2$ ou $x^2(1 + a^2) = U$, d'où $x^2 = \frac{U}{1 + a^2}$, et en substituant cette valeur dans la seconde, on obtient l'équation (195).

Cette équation (195), en remarquant que ci-dessus, nous avons $\frac{1}{b}(1 + a^2) = m$, se réduit à

$$z = \frac{1}{b}(1 + a^2) \frac{U}{1 + a^2} = \frac{1}{b} U.$$

Substituant cette valeur de z dans l'équation (194), nous aurons

$$\varphi U = \frac{1}{b} U.$$

remplaçant U par sa valeur, nous obtiendrons

$$\varphi (x^2 + y^2) = \frac{1}{b}(x^2 + y^2),$$

*et l'on voit ainsi que la fonction est déterminée ;* substi-

tuant cette valeur de $\varphi(x^2 + y^2)$ dans l'équation (193), nous aurons enfin pour l'intégrale cherchée

$$z = \frac{1}{b}(x^2 + y^2);$$

équation qui possède la propriété requise, puisque l'hypothèse de $y = ax$ transforme cette équation en

$$z = \frac{1}{b}(x^2 + a^2x^2) = \frac{1}{b}x^2(1 + a^2) = \frac{1}{b}(1 + a^2)x^2 = mx^2.$$

164. — *Le procédé que nous venons d'indiquer pour déterminer la fonction arbitraire, est général*; car supposons que les conditions qui doivent déterminer la fonction arbitraire, représentée par $\varphi$, soient que l'intégrale donne $F(x, y, z) = 0$, lorsqu'on a $f(x, y, z) = 0$; nous procurerons, dans ce cas, une troisième équation en égalant à $U$ la quantité qui est précédée du signe $\varphi$; et alors, en éliminant, entre ces trois équations, successivement deux des variables $x, y, z$, nous obtiendrons chacune des variables en fonction de $U$. Substituant ces valeurs dans l'intégrale, nous arriverons à une équation dont le premier membre sera $\varphi U$, et dont le second membre sera une expression composée en $U$; pour déterminer ensuite la fonction arbitraire, il n'y aura plus qu'à substituer dans la dernière équation la valeur de $U$ en fonction des variables.

## Intégration des équations différentielles partielles du second ordre.

165. — D'après ce que nous avons vu, à l'article 93, (Calc. Int.), une équation différentielle partielle du second ordre, dans laquelle $z$ est une fonction de deux variables $x$ et $y$, doit toujours contenir, indépendemment des coefficients différentiels du premier orde qu'elle peut renfermer, un ou plusieurs des coefficients différentiels $\frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dy^2}, \frac{d^2z}{dx\,dy}$.

Nous allons examiner comment on peut intégrer les plus simples, seulement, de ces équations différentielles du second ordre.

166. — Soit d'abord l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2}=0\,;$$

en multipliant par dx, et en intégrant par rapport à x, nous ajouterons à l'intégrale une constante arbitraire fonction de y, (art. 139, C. I.), et nous aurons successivement :

$$\frac{d^2z}{dx}=0,\ \text{ou}\ d.\left(\frac{dz}{dx}\right)=0,\ \text{d'où}\ \int d.\left(\frac{dz}{dx}\right)\ \text{ou}\ \frac{dz}{dx}=0+\varphi\, y=\varphi\, y\,;$$

et en multipliant de nouveau par dx et en représentant par $\psi\, y$ une nouvelle fonction de y qu'on doit ajouter à l'intégrale, nous obtiendrons successivement :

$$dz=dx.\,\varphi\, y,\ \text{d'où}\ \int dz\ \text{ou}\ z=\int dx.\,\varphi\, y.=x.\,\varphi\, y+\psi\, y.$$

167. — Soit ensuite l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2}=P,$$

dans laquelle P est une fonction de x et de y ; en opérant comme ci-dessus, nous aurons d'abord

$$\frac{d^2z}{dx}=Pdx,\ \text{ou}\ d.\left(\frac{dz}{dx}\right)=Pdx,\ \text{d'où}\ \int d.\left(\frac{dz}{dx}\right)=\int Pdx,$$

ou
$$\frac{dz}{dx}=\int Pdx+\varphi\, y\,;$$

en intégrant une seconde fois par le même procédé, il viendra successivement

$$dz=(\int Pdx+\varphi y)\,dx,\ \text{d'où}\ \int dz\ \text{ou}\ z=\int[(\int Pdx+\varphi y)\,dx]+\psi y.$$

168. — Soit l'équation

$$\frac{d^2z}{dy^2}=P,$$

dans laquelle y tient la place de x ; en opérant de la même manière nous aurions donc le même résultat que celui qu'on obtient en mettant partout, dans l'exemple précédent, x à la place de y, et y à la place de x, on a ainsi

$$z=\int[(\int Pdy+\varphi x)\,dy]+\psi x.$$

169. — Soit encore l'équation

$$\frac{d^2z}{dy\,dx}=P,$$

dont le premier membre signifie que z à été différentié d'abord par y, puis par rapport à x, nous intégrerons donc

d'abord par rapport à l'une des variables, puis par rapport à l'autre, et il viendra

$$\frac{d^2 z}{dy\,dx} = d.\left(\frac{dz}{dy}\right) : dx = P, \text{ d'où } d.\left(\frac{dz}{dy}\right) = Pdx, \text{ et } \int d.\left(\frac{dz}{dy}\right)$$

ou $\frac{dz}{dy} = \int Pdx +$ constante arbitraire ou $\varphi y$ ; ensuite $dz = (\int Pdx + \varphi y)\,dy$, et, en intégrant $\int dz = \int [(\int Pdx + \varphi y)\,dy] +$ constante ou $\varphi x$, ou

$$z = \int [(\int Pdx + \varphi y)\,dy] + \varphi x.$$

170. — On traiterait, en général, de la même manière l'une des équations suivantes :

$$\frac{d^n z}{dy^n} = P, \quad \frac{d^n z}{dx\,dy^{n-1}} = Q, \quad \frac{d^n z}{dx^2\,dy^{n-2}} = R, \text{ etc.},$$

dans lesquelles P, Q, R, etc., sont des fonctions de x et de y, ce qui donnerait lieu à une suite d'intégrations qui introduiraient chacune une fonction arbitraire dans l'intégrale, comme nous venons de voir des exemples.

171. — Pour intégrer l'équation

$$\frac{d^2 z}{dy^2} + P\frac{dz}{dy} = Q, \ldots (196);$$

dans laquelle P et Q représentent deux fonctions de x et de y, faisons

$$\frac{dz}{dy} = u, \ldots (197);$$

l'équation (196), pouvant être mise sous la forme :

$$d.\frac{dz}{dy} : dy + P\frac{dz}{dy} = Q,$$

si l'on y substitue la valeur de $\frac{dz}{dy}$ donnée par l'équation (197), elle deviendra

$$d.(u) : dy + Pu = Q, \text{ ou } \frac{du}{dy} + Pu = Q \ldots\ldots (198).$$

Cette équation peut être mise sous la forme suivante, en multipliant par dy ;

$$du + Pu\,dy = Q\,dy, \ldots\ldots (199);$$

et, pour l'intégrer, nous considérerons x comme constant de sorte qu'alors cette équation ne renfermera censément que deux variables y et u, et aura la même forme que l'équation

$$dy + Py\,dx = Qdx \ldots. (200),$$

dont l'intégrale, art. 93, C. I., est

$$y = e^{-\int P dx} [\int Q e^{\int P dx} dx + C] \ldots. (201).$$

En comparant donc les équations (199) et (200), nous voyons que u, dans la première, tient la place de y dans la seconde, et que x de celle-ci tient la place de y de l'autre; nous avons donc à remplacer dans la formule (201), y par u et x par y, et il viendra

$$u = e^{-\int P dy} [\int Q e^{\int P dy} dy + C],$$

et comme nous avons supposé x constant dans l'intégration, la constante C sera une fonction de x, art. 139, C.I., et nous aurons

$$u = e^{-\int P dy} [\int Q e^{\int P dy} dy + \varphi x] ;$$

et en remplaçant, dans l'équation (197), u par cette valeur, nous aurons, après avoir multiplie par dy :

$$dz = u. dy = e^{-\int P dy} [\int Q e^{\int P dy} dy + \varphi x] dy,$$

et en intégrant de nouveau, il viendra enfin pour l'intégrale cherchée, en ajoutant une nouvelle fonction de x :

$$z = \int [e^{-\int P dy} (\int Q e^{\int P dy} dy + \varphi x] dy + \psi x.$$

172. — Si l'on avait les équations

$$\frac{d^2 z}{dx\, dy} + P \frac{dz}{dx} = Q, \frac{d^2 z}{dx\, dy} + P \frac{dz}{dy} = Q,$$

dans lesquelles P et Q représentent des fonctions de x, ou les intégrerait par le même procédé, et, comme nous voyons par le premier terme de chacune de ces équations, on a pris la différentielle de z par rapport à x, puis par rapport à y, nous concevons donc bien que la valeur de z ne contiendrait pas des fonctions arbitraires de la même variable, mais l'une fonction de y et l'autre fonction de x, comme nous avons vu un exemple à l'article 169.

## Détermination des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations différentielles partielles du second ordre. Génératrice et directrice.

173. — Lorsqu'on intègre les équations différentielles partielles du second ordre, on obtient une intégrale contenant deux fonctions arbitraires, comme nous avons pu le voir dans les exemples précédents. La détermination de ces fonctions revient à faire passer la surface, que cette

intégrale représente, par deux courbes qui peuvent être quelconques : continues ou discontinues, discontiguës, régulières ou irrégulières.

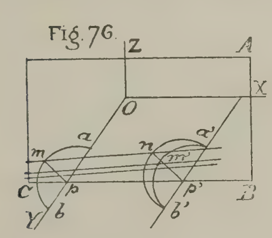
Comme exemple, soit l'équation

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = o,$$

dont l'intégrale est, art. 166,

$$z = x\varphi y + \psi y \dots (202).$$

Soit, fig. 76, un plan AB parallèle à celui des x, z ; ce plan coupera la surface, représentée par l'intégrale, suivant une ligne droite, car pour tous les points de cette section, y étant constant et égal à OP, que nous représenterons par c, les fonctions $\varphi$ y et $\psi$ y deviennent $\varphi$ c et $\psi$ c, et, par suite, peuvent être remplacées par deux constantes a et b ; de façon que l'équation (202) donnera pour l'équation de la section, (points communs au plan AB et à la surface réprésentée par l'équation (202)) :




$$z = ax + b \dots (203),$$

qui, d'après la géométrie analytique (p. 124 du recueil), est celle d'une droite.

Pour savoir le point où cette section perce le plan des y, z, faisons x = o ; l'équation (202) deviendra

$$z = \psi y, (204),$$

équation qui représente une courbe amb tracée sur le plan des y, z. On peut facilement démontrer, (comme dans l'art. 156, 2°) que la section rencontre la courbe amb en un point m ; et, puisque cette section est une ligne droite, pour en déterminer la position, il suffit de trouver un second point par lequel cette ligne passe. A cet effet, remarquons que quand x=o, l'équation (202) se réduit, avons nous vu, à $z = \psi y$, tandis que lorsque x est égal à l'unité, la même équation se réduit à $z = \varphi y + \psi y$ ; faisant donc, comme précédemment, y = Op = c, ces deux valeurs de z deviennent z = b et z = a + b, et déterminent deux points m et n pris sur la même section, puisque OP = c dans les

deux cas, et nous avons vu que cette section est une ligne droite. Pour construire ces points, nous tracerons arbitrairement sur le plan des y, z, la courbe amb, et par le point p, où le plan sécant AB rencontre l'axe des y, nous élèverons la perpendiculaire $pm = b$, qui sera une ordonnée à la courbe ; nous prendrons ensuite à l'intersection CB, trace du plan sécant sur celui des x, y, la partie $pp'$ égale à l'unité, et par le point $p'$ nous mènerons un plan parallèle à celui des y, z, et dans ce plan nous construirons la courbe $a' m' b'$ identique à la courbe amb, et de manière qu'elle soit semblablement disposée ; alors l'ordonnée $m' p'$ sera donc égale à mp ; et en prolongeant $m' p'$ d'une quantité arbitraire $m' n$, qui représentera a, nous déterminerons le point n de la section en ligne droite dans le plan AB.

Si nous prolongeons ensuite, par le même procédé, toutes les ordonnées de la courbe $a' m' b'$, nous construirons une nouvelle courbe $a' n b'$, qui sera telle qu'en menant par cette courbe et par amb, un plan parallèle à celui des x, z, ou au plan AB donc, les deux points où les courbes seront coupées appartiendront à la même section de la surface, laquelle section est, comme nous avons vu, en ligne droite. Il résulte donc de ce que nous venons de voir, que la surface, représentée par l'équation intégrale (202), peut être engendrée par une ligne droite m n, que l'on appelle *génératrice*, glissant le long des deux courbes a m b, $a' n b'$, que l'on nomme *directrices*.

Donc dans la surface représentée par l'équation (202) ou

$$z = x \varphi y + \psi y,$$

la génératrice est représentée par l'équation (203) ou

$$z = \varphi c . x + \psi c = ax + b,$$

a et b étant des constantes variant avec y; enfin la directrice située dans le plan des y z est représentée par l'équation (204) savoir $z = \psi y$,

et la directrice située dans un plan parallèle à celui des y, z, et à une distance de ce plan $x = 1$, est

$$z = \varphi y + \psi y.$$

**Fin du calcul intégral.**

# TABLE DES MATIÈRES

## CALCUL DIFFÉRENTIEL



## CALCUL INTÉGRAL.

**Première méthode principale d'intégration des fonctions de plusieurs variables, etc.**



**Deuxième méthode principale d'intégration des fonctions de plusieurs variables.**

# COURS D'ANALYSE

DEUXIÈME PARTIE

## CALCUL DES DIFFÉRENCES ET CALCUL DES VARIATIONS

**Suite au Calcul différentiel et au Calcul intégral faisant l'objet de la première partie.**

# COURS D'ANALYSE

DEUXIÈME PARTIE

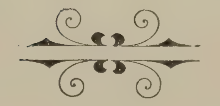
**Calcul des Différences et Calcul des Variations**

**Suite au Calcul différentiel et au Calcul intégral faisant l'objet de la première partie.**

PAR

ALBERT J. M. CREFCŒUR,

ADJOINT DU GÉNIE



ANVERS
IMPRIMERIE DE VLIJT, RUE NATIONALE, 54

1905

# ERRATA

---

**Pages** 11.— 1°, 15e ligne $\Delta u$ au lieu de $\Delta y$.

15.— 3e avant-dernière ligne, mettre une virgule après membre.

20.— 5e ligne $m'p'$ et non $m'p''$.

22.— Dernière ligne de Remarque, lire $f(op+pP)$.

24.— 17e ligne, $n^3$ et non $n_3$.

28.— Bas page, lire $\Delta_2$ y ou $c=b_1-b$.

34.— 18e ligne, $3\,a^2\,b$ au lieu de $a^2\,b$. — 19e ligne, $\frac{3a^2\,bx^2}{2h}$. — 20e ligne, $\frac{3a^2\,bx}{2}$. — 25e ligne, 4e terme du 2d membre lire $\frac{a^2\,b}{2h}$ et non $\frac{a^2\,b}{2b}$.

36.— 29e ligne, depuis o à $n-1$.

41.— 25e ligne, lire $v^{m-2}u+v^{m-1}$ ; de même pour la formule (66).

52.— Art. 5, 10e ligne, lire courbe MM′.

59.— 8e ligne, lire $\delta V$ et non $\delta^2 V$.

63.— 2e avant-dernière ligne, art. 11, lire éq. (29) et non (28).

65.— 6e avant-dernière ligne, lire $dU$ et non $du$.

67.— Fin avant-dernière ligne, mettte un point.

68.— 1er terme avant-dernière ligne, fermer la parenthèse avant $\delta y$ et le crochet après $\delta y$.

72.— Ligne 7, membre et non nombre.

72.— Ligne 12, contiennent et non contient.

76.— Art. 19. 1re ligne, lire la variation et non l'intégration.

**Pages** 79.— 3e ligne, $(\delta y - p\delta x)$ au lieu de $(dy - p\delta x)$.

80.— 24e ligne, après intégrale, mettre : (voir éq. (51), p. 74) ;

86.— La courbe proposée dont il s'agit à la 9e ligne est la courbe que décrit le point mobile $x', y'$.

86.— Éq. (66) et non (69).

88.— 23e ligne, lire $\int \omega'' dx$ et non $\int \omega''$.

89.— Avant-dernière ligne, il faut lire brachystochrone.

94.— 1re ligne ; au lieu de $=$ dp c'est : dp.

97.— 15e ligne, lire : pour le point $D, x = d$ et $y = o$ et supprimer $D = d$.

98.— 5e ligne, lire l'unité au lieu de l'imité.

99.— 9e ligne, 1er terme du 2d membre, au dénominateur, c'est $\sqrt{y}$ et non $\sqrt{x}$.

99.— 15e ligne, art. 29 au lieu de 19.

100.— 3e ligne, entre les deux 1ers termes, c'est $+$ au lieu de $=$.

100.— 11e ligne, c'est $\frac{\delta y'}{\delta x'} = -$ etc. $= M'$.

101.— 3e ligne, il faut $\frac{dy'}{dx'} = -\frac{1}{M_1} = -\frac{1}{a}$ et $\frac{dy''}{d_1x''} = -\frac{1}{N_1} = -\frac{1}{a}$ ; donc $\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy''}{dx''}$.

102.— Dernier alinea, c'est $\alpha^2$ au lieu de $a^2$.

104.— 23e ligne, fermer la parenthèse.

106.— 7e et 8e lignes $\frac{dY}{dy}$ au lieu de $\frac{dY}{dx}$.

106.— 12e ligne, $1 + p^2$ divise la fraction numérateur.

107.— 4e ligne, $z^{-1/2}$ au lieu de $z^{-3/2}$. — 12e ligne. $dy^2$ au lieu de $dy^1$.

---

# CALCUL DES DIFFÉRENCES

## Du Calcul direct des Différences

1. — Si l'on prend une suite de quantités quelconques, et si l'on retranche chacune d'elles de la suivante, on a ce que l'on appelle les *différences premières* de ces quantités. Si, ensuite, chacune de ces différences, est retranchée encore de celle qui la suit, on obtient une nouvelle suite de quantités qui sont les *différences secondes* des quantités proposées. De même les différences premières des différences secondes sont les *différences troisièmes*. En continuant de la sorte, on trouve les différences des divers ordres des quantités proposées.

Pour abréger, ces différences se désignent par le caractère grec $\Delta$ placé devant la quantité, caractère que l'on affecte d'un chiffre indiquant l'ordre de la différence : par exemple, $\Delta_2$ signifie *différence deuxième*.

Soient donnés les nombres 2, 4, 3, 15 et 39. On peut former le tableau de leurs différences en adoptant la disposition ci-après :

| Nombres | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ | $\Delta_3$ | $\Delta_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | —3 | 16 | —17 | |
| 4 | —1 | 13 | —1 | | |
| 3 | 12 | 12 | | | |
| 15 | 24 | | | | |
| 39 | | | | | |

1°. — Pour former ce tableau, on retranche chaque nombre de celui qui est placé au-dessous de lui et l'on écrit la différence à droite du premier. — La première colonne verticale renferme les nombres ; la seconde, les différences premières $\Delta_1$ ; la troisième, les différences secondes $\Delta_2$ ; etc. Dans chaque colonne, il y a une différence de moins, jusqu'à la dernière qui ne renferme qu'une différence quatrième.

2°.— Réciproquement, si l'on donne le premier nombre 2 et ses quatre différences successives 2, -3, 16 et -17, c'est-à-dire la première ligne horizontale, on peut reconstituer le tableau et retrouver les autres nombres 4, 3, 15 et 39, en remarquant que chaque nombre du tableau s'obtient en faisant la somme du nombre qui est placé au-dessus de lui et du nombre qui est à la droite de celui-ci.

2.—La différence d'une fonction variable est l'accroissement ou la diminution que subit cette fonction lorsqu'elle passe d'un certain état de grandeur à un autre.

Cette différence s'indique également comme pour toute quantité par le signe $\Delta$ placé devant la fonction variable. Par exemple, lorque la fonction $y=ax^2$ devient $y'$ par un accroissement h donné à la variable x, on a

$$y'=a(x+h)^2=a(x^2+2xh+h^2)=ax^2+2axh+ah^2$$

et $\quad y'-y=ax^2+2axh+ah^2-ax^2=2axh+ah^2$ ,

d'où $\quad \Delta y=2axh+ah^2$ .

En général, lorsque x se changeant en $x+h$, la fonction y de x devient $y'$; le théorème de Taylor, (page 46 de la première partie), nous donne, pour le développement de $y'$, une suite de cette forme

$$y'=y+Ah+Bh^2+Ch^3+\text{etc}\ldots$$

et alors la différence de la fonction sera exprimée par

$$y'-y \text{ ou } \Delta y=Ah+Bh^2+Ch^3+\text{ etc.}(1)$$

Si nous nous reportons à la page 14 de la première partie, nous voyons que

$$y'-y=Bh+Ch^2+\text{ etc.},$$

ou pour conserver les mêmes coefficients que ci-dessus,

$$y'-y=Ah+Bh^2+\text{etc.},$$

d'où
$$\frac{y'-y}{h}=A+Bh+\text{ etc.},$$
ou enfin, en passant à la limite, où h est nul,
$$\frac{dy}{dx}=A \text{ d'où } dy=Adx\ldots(2)$$

En comparant les équations (1) et (2), on voit que la différentielle de la fonction y ne se compose que du premier terme de la différence de cette fonction, terme dans lequel on changera l'accroissement h en dx. En effet, si la différence h devient infiniment petite dans l'équation(1), on tombe dans le cas de la différentielle, car alors $\Delta y$ et h ou $\Delta x$ se changent en dy et en dx, (art. 3 de la 1re partie), on doit donc supprimer, dans l'équation(1)(expression de la différence), les termes affectés de $h^2$, $h^3$, etc., qui se sont changés en $dx^2$, $dx^3$, etc., car ce sont des infiniment petits des ordres supérieurs (art. 141, 1re partie), alors l'équation(1) devient pour le cas de la différentielle
$$dy=Adx$$
comme dans l'équation(2).

3. — De même que nous indiquons l'accroissement positif ou négatif de la fonction y en plaçant devant y la caractéristique $\Delta$, de même nous indiquerons par $\Delta x$ l'accroissement positif ou négatif de x.

Par exemple, pour connaître la différence de $y=x^m$, nous développerons d'abord, par la formule du binôme (voir p. 56 de notre recueil en y remplaçant a par $\Delta x$), l'équation
$$y'=(x+\Delta x)^m$$
et nous trouverons
$$y' = x^m + \frac{m}{1} x^{m-1} \Delta x + \frac{m\,(m-1)}{1.2} x^{m-2} (\Delta x)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \quad 2 \quad 3} x^{m-3} (\Delta x)^3 + \text{etc.},$$
d'où
$$\Delta y \text{ ou } y'-y = mx^{m-1} \Delta x + \frac{m(m-1)}{1 \quad 2} x^{m-2} (\Delta x)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3.} x^{m-3} (\Delta x)^3 + \text{ etc.}$$

*Remarque.* — Nous pourrions nous dispenser de renfermer $\Delta x$ entre des parenthèses, en admettant que $\Delta x^2$, $\Delta x^3$, etc., représentent la seconde, la troisième puissance, etc., de $\Delta x$ ; mais pour éviter de confondre $\Delta x^2$, $\Delta x^3$, etc., avec les différences de $x^2$, de $x^3$, etc., nous désignerons ces différences par $\Delta . x^2$, $\Delta . x^3$, etc. De cette manière vous pourrons écrire l'équation précédente comme ceci :

$$\Delta y = m\, x^{m-1}\, \Delta x + \frac{m(m-1)}{2} x^{m-2}\, \Delta x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} x^{m-3}\, \Delta x^3$$
$+$ etc.

Observons que quand la différence devient infiniment petite, cas auquel $\Delta x$ et $\Delta y$ se changent en dx et dy (voir art. 3, calc. diff. 1^re^ partie), on doit supprimer les terme affectés de $dx^2$, de $dx^3$, etc., comme des infiniment petits des ordres supérieurs, (voir art. 141, calc. diff. 1^re^ partie), par suite la formule se réduit à

$$dy = m\, x^{m-1}\, dx\,;$$

et comme $y = x^m$, on a

$$d\, x^m = m\, x^{m-1}\, dx\,;$$

résuitat conforme à celui trouvé à l'art. 12 calc. diff. de la première partie par une autre méthode.

4. — On peut parfois se dispenser de développer la fonction y de x suivant les puissances ascendantes de $\Delta x$ pour obtenir la différence $\Delta y$. Ainsi, si l'on avait l'équation

$$y = \frac{x^2 - b^2}{x}, \text{ d'où } y' = \frac{(x+\Delta x)^2 - b^2}{x+\Delta x},$$

la différence $y' - y$ ou $\Delta y$ étant $\dfrac{(x+\Delta x)^2 - b^2}{x+\Delta x} - \dfrac{x^2 - b^2}{x}$ ;

en élevant au carré $(x+\Delta x)$, réduisant ensuite au même dénominateur, et effectuant la réduction, on trouverait successivement

$$\frac{x^2 + 2x\, \Delta x + \Delta x^2 - b^2}{x+\Delta x} - \frac{x^2 - b^2}{x}$$

ou $$\frac{x^3 + 2x^2\, \Delta x + x\, \Delta x^2 - b^2\, x - (x^2 - b^2)(x+\Delta x)}{(x+\Delta x)x}$$

ou $$\frac{x^3 + 2x^2\, \Delta x + x\, \Delta x^2 - b^2\, x - x^3 + b^2\, x - x^2\, \Delta x + b^2\, \Delta x}{(x+\Delta x)x}$$

ou enfin $$\frac{(x^2+b^2)\Delta x + x\,\Delta x^2}{x(x+\Delta x)}$$

5. — Si la différence $\Delta x$ était négative, on changerait x en $x-\Delta x$ dans la fonction.

Soit, par exemple, à déterminer la différence $\Delta y$ pour la fonction $$y=\frac{\sqrt{a^2+bx}}{c},$$

en changeant d'abord x en $x-\Delta x$, on trouverait

$$y'=\frac{\sqrt{a^2+b(x-\Delta x)}}{c}=\frac{\sqrt{a^2+bx-b\Delta x}}{c},$$

et la différence

$$y'-y \text{ ou } \Delta y = \frac{\sqrt{a^2+bx-b\Delta x}}{c} - \frac{\sqrt{a^2+bx}}{c} = \frac{\sqrt{a^2+bx-b\Delta x}-\sqrt{a^2+bx}}{c}.$$

6. — La différence de la fonction

$$y = \log x,$$

est égale à $$\Delta y = \log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\ldots(1)$$

ou encore $$\Delta y = \frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta x^2}{2x^2} + \frac{\Delta x^3}{3x^3} - \text{etc}\ldots (2)$$

En effet, $y'=\log(x+\Delta x)$,

et par suite $y'-y=\log(x+\Delta x)-\log x$ ;

ou d'après la propriété des logarithmes (p. 41 de mon recueil), $$y'-y=\log\frac{(x+\Delta x)}{x},$$

ou en effectuant la division par x,

$$y'-y \text{ ou } \Delta y=\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)..(1) \text{ C.Q.F.D.}$$

Pour obtenir la formule (2), remarquons que nous avons (p. 51 de la première partie),

$$\log(x+h)-\log x = \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \text{etc.};$$

cette équation nous donne d'après la propriété des logarithmes rappelée ci-dessus ;

$$\log(x+h) - \log x \text{ ou } \log\left(\frac{x+h}{x}\right) \text{ ou,}$$

en effectuant la division par x

$$\log\left(1+\frac{h}{x}\right) = \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \text{etc};$$

et en remplaçant h par $\Delta x$, nous aurons

$$\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta x^2}{2x^2} + \frac{\Delta x^3}{3x^3} - \text{etc};$$

substituant cette valeur dans l'équation (1), nous trouverons enfin

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta x^2}{2x^2} + \frac{\Delta x^3}{3x^3} - \text{etc...} \quad (2).$$

*Remarque.* — Lorsque $\Delta y$ et $\Delta x$ deviennent infiniment petits, en négligeant les infiniment petits des ordres supérieurs (p. 162, 1re partie), on obtiendra, puisque $y = \log x$ par hypothèse:

$$dy \text{ ou } d.\log x = \frac{dx}{x}$$

conformément à ce qui a été trouvé dans le calcul différentiel (p 37, 1re partie).

7. — La différence de $y=a^x$, est

$$\Delta y \text{ ou } \Delta a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1).$$

En effet, nous avons

$y'=a^{x+\Delta x}$, et $y'-y$ ou $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1)$; et en remplaçant y par sa valeur, il viendra enfin

$$\Delta a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1).$$

8. — La différence de $y=\sin x$ est

$$\Delta y \text{ ou } \Delta \sin x = \sin \Delta x \cos x + (\cos \Delta x - 1)\sin x.$$

En effet, $y' = \sin(x+\Delta x)$

ou (voir mon recueil p. 70),

$$y' = \sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x,$$

et $y'-y = \sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x$,

ou, en réduisant

$y'-y$ ou $\Delta y$ ou $\Delta \sin x = \sin x (\cos \Delta x - 1) + \cos x \sin \Delta x = \sin \Delta x \cos x + (\cos \Delta x - 1) \sin x$. C. Q. F. D.

9. — La différence de $y = \cos x$ est :

$$\Delta y \text{ ou } \Delta \cos x = -\sin x \sin \Delta x + \cos x(\cos \Delta x - 1).$$

En effet, on a $y' = \cos(x + \Delta x)$,
ou, en développant, (voir mon recueil p. 70),

$$y' = \cos x \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x,$$

d'où $y' - y = \cos x \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x - \cos x =$
$= \cos x(\cos \Delta x - 1) - \sin x \sin \Delta x,$
donc enfin

$$\Delta y \text{ ou } \Delta \cos x = -\sin x \sin \Delta x + \cos x (\cos \Delta x - 1).$$

10. — Lorsque la fonction y contient non-seulement la variable x, mais encore d'autres variables z, t, u, etc., on obtiendrait la différence $\Delta y$ en remplaçant x par $x + \Delta x$, z par $z + \Delta z$, t par $t + \Delta t$, etc., et en opérant comme précédemment.

Ainsi, la différence de $y = azu$, (a, étant le coefficient) est $\Delta y = az\Delta u + au\Delta z + a\Delta z\Delta u$.

En effet, on a d'abord

$$y' = a(z + \Delta z)(u + \Delta u),$$

et en développant, il vient

$$y' = azu + a\Delta zu + az\Delta u + a\Delta z\Delta u,$$

puis en retranchant la fonction primitive, on a enfin
$y' - y$ ou $\Delta y = azu + a\Delta zu + az\Delta u + a\Delta z\Delta u - azu = a\Delta zu + az\Delta u + a\Delta z\Delta u = az\Delta u + au\Delta z + a\Delta z\Delta u$ ;
et l'on peut remarquer que lorsque $\Delta y$ et $\Delta z$ deviennent infiniment petits, cette différence devient

$$dy = azdu + audz + adzdu,$$

et en supprimant le dernier terme, comme infiniment petit du second ordre, (art. 136, p. 162 de la 1ere partie), nous aurons enfin,

$$dy = azdu + audz,$$

conformément à ce que nous avons trouvé en calcul différentiel, p. 15 de la 1ere partie.

11. — La différence de la fration $y = \frac{u}{z}$ est

$$\Delta y = \frac{z\Delta u - u\Delta z}{z(z + \Delta z)}.$$

En effet, on a d'abord

$$y' = \frac{u + \Delta u}{z + \Delta z},$$

et par suite, $$y' - y \text{ ou } \Delta y = \frac{u+\Delta u}{z+\Delta z} - \frac{u}{z},$$
d'où en réduisant au même dénominateur et simplifiant, il vient enfin
$$\Delta y = \frac{uz + z\Delta u - zu - u\Delta z}{z(z+\Delta z)} = \frac{z\Delta u - u\Delta z}{z(z+\Delta z)}.$$

Lorsque les différences sont infiniment petites, $\Delta z$ s'évanouit au dénominateur (art. 136, p. 162, 1ere partie) parce que $\Delta z$ est infiniment petit par rapport à z ; $\Delta y$, $\Delta u$ et $\Delta z$ se changent en dy, en du et en dz, et la formule précédente se réduit à
$$dy = \frac{zdu - udz}{z^2};$$
conformément à ce que nous avons trouvé à la p. 16 de la 1ere partie pour la différentielle d'une fraction.

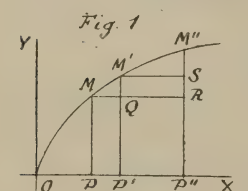
On voit donc, par ce qui précède, que le calcul des différences conduit au calcul différentiel.

12. — Dans le calcul différentiel, p. 25 de la 1ere partie, nous avons considéré des différentiellles de divers ordres.

On établit une semblable division dans le calcul des différences, comme nous avons déjà pu remarquer à l'art. 1 qui précède.

Ainsi, en considérant $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$, etc., comme des différences premières de x, de y, de z, etc., ces fonctions auront pour différences secondes $\Delta_2 x$, $\Delta_2 y$, $\Delta_2 z$, etc.;pour différences troisièmes $\Delta_3 x$, $\Delta_3 y$, $\Delta_3 z$, etc.; et ainsi de suite.

13. — La *différence seconde* d'une fonction, c'est donc la différence de la différence de cette fonction ; de même, la *différence troisième* c'est la différence dela différenceseconde, et ainsi desuite.




Soit donc la fonction représentée par $y = fx$.
et soit OMM'M''... la courbe que représente cette équation (fig.1).Si OP=x, MP=y sont les coordonnées d'un point M de cette courbe ; on peut consi-

dérer $MQ = PP'$ comme l'accroissement $\Delta x$ de $x$, et $M'Q = M'P' - MP$ ou $y' - y$ comme étant l'accroissement correspondant de $y$ ; on a donc $M'Q = \Delta y =$ déférence première de la fonction. De même $QR = P'P''$ peut être considéré comme étant l'accroissement $h$ de $MQ$ en supposant l'origine des coordonnées en $M$, et $M''S$ représente la différence des ordonnées correspondantes ou $M''R - M'Q$. Donc $M''S = M''R - M'Q = \Delta M'Q$. Mais $M'Q = \Delta y$, et par conséquent $M''S = \Delta\Delta y = \Delta_2 y =$ différence seconde de $y$, (Art. 1).

Concluons donc que $M''S = y'' - y' = \Delta y' =$ différence première de $y'$, et $M''S = \Delta_2 y =$ différence seconde de $y$ —

En considérant les ordonnées comme des fonctions des abscisses correspondantes, et comme nous avons

$$M'Q = M'P' - MP = y' - y,$$

nous aurons $M'Q$ ou $\Delta y = y' - y = f(x + \Delta x) - fx$,

ou $$\Delta y = f(x + \Delta x) - fx \ldots (3) ;$$

équation dont le second membre s'obtient en faisant $x = x + \Delta x$ dans la fonction donnée $y$ ou $fx$, pour avoir $y'$ ou $f(x + \Delta x)$, et en retranchant ensuite de cette fonction $y$ ou $fx$.

Nous avons ensuite

$$M''S = M''P'' - M'P' = y'' - y',$$

ou $$\Delta_2 y = f(x + \Delta x + h) - f(x + \Delta x) \ldots (4).$$

Or, il peut se présenter deux cas : ou la différence $P'P'' = h$ sera égale à $PP' = \Delta x$, ou elle ne le sera pas.

Dans le premier cas, l'équation (4) deviendra

$$\Delta_2 y = f(x + 2\Delta x) - f(x + \Delta x) \ldots (5) ;$$

et il est facile de voir qu'elle peut se déduire de l'équation (3), en regardant $\Delta x$ comme une quantité constante, et en changeant $x$ en $x + \Delta x$, c'est-à-dire qu'il viendra

$\Delta_2 y = f[(x + \Delta x) + \Delta x] - f(x + \Delta x) = f(x + 2\Delta x) - f(x + \Delta x)$, ce qui est l'équation (5).

Mais dans l'hypothèse où $h$ différera de $\Delta x$, nous indiquerons cette différence de $h$ à $\Delta x$, différence qui pourra être positive ou végative, par $\Delta_2 x$, en sorte que nous aurons

$$h = \Delta x + \Delta_2 x,$$

ce qui changera l'équation (4) en

$\Delta_2 y = f(x+\Delta x+\Delta x+\Delta_2 x) - f(x+\Delta x) = f(x+2\Delta x+\Delta_2 x) - f(x+\Delta x)$, (6) ;
et il est facile de voir que dans le second cas, la valeur de $\Delta_2 y$ se déduira de celle de $\Delta y$ (éq. (3)), en changeant $\Delta x$ en $\Delta x+\Delta_2 x$ et $x$ en $x+\Delta x$, de sorte que nous aurons $\Delta_2 y = f[(x+\Delta x)+(\Delta x+\Delta_2 x)] - f(x+\Delta x) = f(x+2\Delta x+\Delta_2 x) - f(x+\Delta x)$,
ce qui est bien l'équation (6).

Donc, l'équation (3) peut servir, dans ces conditions, dans les deux cas.

14. — *Exemple.* — Soit à trouver la différence seconde de la fonction $y=x^2$, dans laquelle nous supposons d'abord $\Delta x$ constant, (1^er^ cas) et nous aurons $y'=(x+\Delta x)^2 = x^2+2x\,\Delta x+\Delta x^2$ et $y'-y$ ou $\Delta y = 2x\,\Delta x+\Delta x^2$ .....(7) ; ensuite, en changeant $x$ en $x+\Delta x$, dans l'éq. (7) tenant lieu de l'éq. (3) (toujours 1^er^ cas), et en retranchant du résultat, comme à l'éq. (3), le second membre de cette éq. (7) non modifiée, il viendra

$\Delta\Delta y$ ou $\Delta_2 y = 2(x+\Delta x)\Delta x+\Delta x^2 - (2x\,\Delta x+\Delta x^2)$. ..(8) ;
en développant et réduisant, il vient successivement

$$\Delta_2 y = 2x\,\Delta x+2\Delta x^2+\Delta x^2-2x\,\Delta x-\Delta x^2 = 2\Delta x^2,$$

ou $$\Delta_2 y = 2\Delta x^2 \;\ldots.\; (9).$$

15. — *Exemple.* — Si, au lieu de supposer $\Delta x$ constant, on considérait $\Delta x$ comme une quantité variable (2^d^ cas), l'équation (7) au lieu d'amener l'équation (8), donnerait la suivante, obtenue en remplaçant non seulement comme précédement $x$ par $x+\Delta x$, mais encore $\Delta x$ par $\Delta x+\Delta_2 x$ dans l'équation (7) ; et en retranchant ensuite le second membre de l'équation (7), comme nous l'avons fait pour l'équation (8), on a donc ainsi

$\Delta_2 y = 2(x+\Delta x)(\Delta x+\Delta_2 x)+(\Delta x+\Delta_2 x)^2 - (2x\Delta x+\Delta x^2)$ (10),
ou, en développant et réduisant

$$\Delta_2 y = 2x\,\Delta x+2x\Delta_2 x+2\Delta x^2+2\Delta x\,\Delta_2 x+\Delta x^2+2\Delta x\Delta_2 x+(\Delta_2 x)^2-2x\Delta x-\Delta x^2 = 2x\Delta_2 x+4\Delta x\Delta_2 x+2\Delta x^2+(\Delta_2 x)^2 =$$
$$=(2x+4\Delta x)\Delta_2 x+2\Delta x^2+(\Delta_2 x)^2 =$$
$$=2\Delta x^2+(2x+4\Delta x)\Delta_2 x+(\Delta_2 x)^2 \;\ldots(11).$$

16. — Par des considérations analogues, nous prouve-

rions également qu'en donnant l'accroissement $\Delta_3$ x à $\Delta_2$ x, nous devrions, dans cette hypothèse, changer x en $x+\Delta x$, $\Delta x$ en $\Delta x+\Delta_2 x$ et $\Delta_2 x$ en $\Delta_2 x+\Delta_3 x$ dans la fonction(11), pour obtenir l'expression de $\Delta_3 y$ ; et ainsi de suite.

17.— En ce qui concerne le choix de l'une des hypothèses que nous avons considérées, il est évident que lorsque rien ne s'y oppose, il est toujours préférable de faire accroître x par des différences égales ; aussi est-ce l'hypothèse que l'on choisit ordinairement. Cependant il peut arriver qu'il ne dépende pas de notre choix de donner des valeurs constantes à $\Delta x$. Par exemple, si x et y étaient des fonctions d'une troisième variable t et que l'on eût $x=\varphi t$, et $y=\psi t$, on sent que l'accroisement $\Delta x$ de x dépendrait, comme celui de y, de l'accroissement $\Delta t$, et ainsi, n'étant plus arbitraire, ne pourrait être supposé constant.

18.— Maintenant, si nous remplaçons par h la différence $\Delta x$ que nous avons prise pour constante dans l'art. 14 et si nous cherchons les différences successives de la fonction $y=x^3$, par exemple, nous trouverons (éq. (3), art. 13, 14 et 15), en changeant x en x+h dans les résultats successifs ; et en retranchant les seconds membres de chaque éq. qui précède

$\Delta y=(x+h)^3-x^3=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3=3x^2h+3xh^2+h^3;$

(en remplaçant donc encore x par x+h dans le second membre de l'éq. ci-dessus et retranchant ce membre (art. 14) nous aurons

$\Delta_2 y=3(x+h)^2h+3(x+h)h^2+h^3-(3x^2h+3xh^2+h^3)=6xh^2+6h^3;$

en remplaçant x par x+h dans le second membre de l'éq. précédente et retranchant ce second membre, on a :

$$\Delta_3 y=6(x+h)h^2+6h^3-(6xh^2+6h^3)=6h^3;$$

(en opérant toujours comme précédemment, mais en observant que puisque x n'existe plus on a le second membre de l'éq. précédente moins ce membre ou zéro), donc puisqu'on a une expression indépendante de x, il vient

$$\Delta_4 y=6h^3-6h^3=0.$$

On peut remarquer que dans cet exemple, comme dans tout autre semblable d'une fonction rationelle, les exposants de x diminuant successivement d'une unité, les différences qu'on déduit ainsi les unes des autres doivent diminuer, et finir par devenir nulles.

Par exemple, si l'on écrit dans une ligne horizontale la suite des nombres triangulaires, (voir mon recueil p. 60 et 61), et que l'on place au-dessous leurs différences successives, comme cela est indiqué ci-après :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, | 3, | 6, | 10, | 15, | 21, | etc., |
| | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | etc., |
| | | 1, | 1, | 1, | 1, | etc., |
| | | | 0, | 0, | 0, | etc., |

on voit qu'à la quatrième ligne seulement, les différences finissent par être nulles.

19. — Si nous prenons maintenant une suite de termes

$$a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots\ a_n \ldots \quad (12),$$

ayant pour différences premières,

$$b,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ \ldots\ b_n \ldots \quad (13),$$

pour différences secondes,

$$c,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ \ldots\ c_n \ldots \quad (14),$$

pour différences troisièmes,

$$d,\ d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4 \ldots,\ d_n \ \ldots, \quad (15),$$

et ainsi de suite,

on en déduira

$$\left.\begin{array}{llll} a_1-a=b, & a_2-a_1=b_1, & a_3-a_2=b_2, & a_4-a_3=b_3, \text{ etc.,} \\ b_1-b=c, & b_2-b_1=c_1, & b_3-b_2=c_2, & b_4-b_3=c_3, \text{ etc.,} \\ c_1-c=d, & c_2-c_1=d_1, & c_3-c_2=d_2, & c_4-c_3=d_3, \text{ etc.,} \\ d_1-d=e, & d_2-d_1=e_1, & d_3-d_2=e_2, & d_4-d_3=e_3, \text{ etc.,} \\ \text{etc,} & \text{etc.,} & \text{etc,} & \text{etc.} \end{array}\right\} (16).$$

On tirera de la première colonne de ces équations,

$$a_1=a+b,\ b_1=b+c,\ c_1=c+d,\ d_1=e+d, \text{ etc.}, \quad (17);$$

de la seconde colonne,

$$a_2=a_1+b_1,\ b_2=b_1+c_1,\ c_2=c_1+d_1, \text{ etc.}, \quad (18);$$

de la troisième colonne

$$a_3=a_2+b_2,\ b_3=b_2+c_2,\ c_3=c_2+d_2, \text{ etc.}, \quad (19);$$

et ainsi de suite.

20. Pour exprimer les différents termes des suites (12) et (13) en fonction des quantités a, b, c, d, etc., remarquons que nous avons d'abord, par les deux premières équations (17), $a_1 = a + b$, $b_1 = b + c$;
ensuite en substituant ces valeurs de $a_1$ et de $b_1$ dans la première des équations (18), nous aurons la valeur $a_2$, savoir : $a_2 = a_1 + b_1 = a + b + b + c = a + 2b + c$;
on trouve, de même, par les équations (18) et (17),

$$b_2 = b_1 + c_1 = b + c + c + d = b + 2c + d,$$
$$c_2 = c_1 + d_1 = c + d + d + e = c + 2d + e;$$

et en substituant ces valeurs de $a_2$ et de $b_2$ dans celle de $a_3$, donnée par l'éq. (18), nous aurons

$$a_3 = a_2 + b_2 = a + 2b + c + b + 2c + d = a + 3b + 3c + d,$$

on aura également

$$b_3 = b_2 + c_2 = b + 2c + d + c + 2d + e = b + 3c + 3d + e.$$

En continuant de la sorte, on trouvera

$$a_4 = a + 4b + 6c + 4d + e. \quad (20).$$
$$b_4 = b + 4c + 6d + 4e + f. \quad (21);$$

et, par analogie, on a, en général

$$a_n = a + \frac{n}{1} b + \frac{n(n-1)}{1.2} c + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} d + \text{etc.} \quad (22).$$
$$b_n = b + \frac{n}{1} c + \frac{n(n-1)}{1.2} d + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} e + \text{etc.} \quad (23).$$

21. — Cette série s'arrête si l'on rencontre des différences constantes dans l'une des lignes horizontales des équations (16). Par exemple, si l'on avait

$$b = b_1 = b_2 = b_3, \text{ etc.},$$

et qu'on substituât ces valeurs dans les équations (16), les premiers membres de celles qui composent la seconde ligne se reduiraient à zéro, ce qui donnerait

$$c = 0, \ c_1 = 0, \ c_2 = 0, \ c_3 = 0, \text{ etc.};$$

ces valeurs de c, de $c_1$, de $c_2$, etc., substituées dans les mêmes équations (16), feraient à leur tour évanouir les premiers membres des équations de la troisième ligne, d'où il résulterait

$$d = 0, \ d_1 = 0, \ d_2 = 0, \ d_3 = 0, \text{ etc.};$$

et en continuant de la sorte on comprend que les équa-

tions de toutes les lignes suivantes, comprises dans les etc., se réduiraient à zéro.

22. — Les équations (22) et (23) ont été trouvées par analogie. Pour en prouver l'exactitude, remarquons que quand $n=4$, les équations (22) et (23) deviennent les équations (20) et (21) ; et, comme celles-ci sont démontrées, nous avons donc une valeur de n pour laquelle les équations (22) et (23) se vérifient ; mais nous ignorons encore si, en augmentant n d'une unité, les valeurs de $a_n$ et de $b_n$ se composeront d'une manière analogue, et si, par conséquent les équations (22) et (23) subsisteront toujours ; autrement ce serait conclure du particulier au général ; tout ce que nous pouvons admettre, c'est que la démonstration ayant eu lieu pour le cas où $n=4$, il est du moins constaté que dans une certaine hypothèse de n (celle de $n=4$), les valeurs $a_n$ et $b_n$ se forment suivant la loi qui est indiquée par les équations (22) et (23) ; nous allons démontrer que si l'on augmente n d'une unité et que l'on obtienne par conséquent

$$a_{n+1}=a+(n+1)b+\frac{(n+1)n}{1.2}c+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}d+\text{etc}\ldots(24),$$

la valeur de $a_{n+1}$ sera exacte.

A cet effet, nous partirons de ce point que, puisque nous considérons les équations (22) et (23), qui ont lieu pour une hypothèse de n, comme légitime, nous aurons un résultat qui sera encore exact, si nous ajoutons ensemble ces équations de cette façon, nous trouverons

$$a_n+b_n=a+n\,b+\frac{n(n-1)}{2}c+\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1.2.3}d+\text{etc.},$$
$$+b+nc+\frac{n\,(n-1)}{2}d+\text{etc.}$$

Mais, en vertu des équations (16) et (18), $a_n+b_n=a_n+1$, substituant dans l'équation précédente et réduisant, il vient

$$a_{n+1}=a+(n+1)b+\frac{n(n-1)+2n}{2}c+\frac{n(n-1)(n-2)+3n(n-1)}{1.2.3}d+\text{etc.}=$$

$$a+(n+1)\,b+\frac{n^2-n+2\,n}{2}c+(n-1)d\,\frac{n^2-2n+3n}{1.2.3.}+\text{etc.}=$$

$$a+(n+1)b+\frac{n^2+n}{2}c+(n-1)d\frac{n^2+n}{1.2.3.}+\text{etc.}=a+(n+1)b+\frac{n(n+1)}{2}c+\frac{n(n+1)(n-1)}{1.2.3.}d+\text{etc.}\ (25).$$

Cette équation dont nous venons de démontrer l'exactitude, est la même que l'équation (24), et elle prouve donc que celle-ci est exacte.

Il résulte donc de là que puisque l'équation (22), est vraie pour $n=4$, l'équation (24), qui a lieu pour l'indice $n+1=5$, sera vraie également. Faisant ensuite $n=5$, l'équation (22) sera donc vérifiée pour cet indice, et par suite l'équation (24) prouvera qu'il en sera de même de l'indice $n+1=6$. En continuant de la sorte, on prouvera que l'équation (22) aura lieu en augmentant successivement l'indice à partir de la valeur 4 jusqu'à une valeur quelconque n. De même pour la formule (23).

23. — L'équation (22) peut nous conduire à une formule analogue à celle dite de Newton.

En effet, puisque b est la différence des deux premiers termes a et $a_1$ de la suite (12), l'accroissement de a que nous représenterons, (art. 1) par $\Delta a$, sera donc égal à b ; de même c étant la différence des deux premiers termes b et $b_1$ de la suite (13), sera donc égal à l'accroissement de b ou $\Delta b$ ; et ainsi de suite pour d, e, etc., à l'égard des termes dont ces lettres représentent les accroissements ; nous aurons donc

$$b=\Delta a,\ c=\Delta b,\ d=\Delta c,\ e=\Delta d,\ \text{etc.}\ \ldots(26)\ ;$$

au moyen de la première de ces équations (26), éliminons b de la seconde, il viendra

$$c=\Delta.\Delta a=\Delta_2\, a\ ;$$

substituant cette valeur de c dans la troisième, nous obtiendrons

$$d=\Delta.\ \Delta_2\, a=\Delta_3\, a\ ;$$

cette valeur mise dans la quatrième, nous donnera

$$e=\Delta.\ \Delta_3\, a=\Delta_4\, a\ ;$$

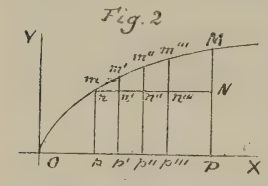
et ainsi de suite.

Substituant ces valeurs de b, de c, de d, de e, etc., dans l'équation (22), celle-ci nous donnera enfin

$$a_n = a + \frac{n}{1}\Delta a + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta_2 a + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta_3 a + \text{etc.} \ (27);$$

expression désignée sous le nom de formule de Newton.

24. — Si nous supposons que l'on prenne pour la suite $a, a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$, les ordonnées mp, m'p", m"p", etc., d'une courbe OM, fig. 2, et que la première et la dernière de ces ordonnées soient représentées par y et par y' nous aurons ainsi $a = y$, $a_n = y'$.




Substituant ces valeurs dans l'équation (27), il viendra

$$y' = y + \frac{n}{1}\Delta y + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta_2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta_3 y + \text{etc.} (28).$$

25. — Nous pouvons, à l'aide de cette équation (28), démontrer que le calcul des différences conduit à la formul de Taylor, (p. 47 de la 1[re] partie).

En effet, supposons que l'accroissement h=pP, (fig. 2), donné à l'abscisse op, soit partagé en n parties pp', p'p", p"p‴, etc., égales chacune à $\Delta x$, nous aurons

$$h = n.\Delta x,$$

d'où

$$n = \frac{h}{\Delta x} \ldots (29).$$

Cette valeur de n, substituée dans l'équation (28), donne

$$y' = y + \frac{h}{\Delta x}\Delta y + \frac{\frac{h}{\Delta x}\left(\frac{h}{\Delta x} - 1\right)}{1.2}\Delta_2 y + \frac{\frac{h}{\Delta x}\left(\frac{h}{\Delta x} - 1\right)\left(\frac{h}{\Delta x} - 2\right)}{1.2.3}\Delta_3 y$$

+ etc. ;

réduisant au même dénominateur les quantités qui sont entre les parenthèses, nous aurons

$$y' = y + \frac{h}{\Delta x}\Delta y + \frac{\frac{h}{\Delta x}\left(\frac{h-\Delta x}{\Delta x}\right)}{1.2}\Delta_2 y + \frac{\frac{h}{\Delta x}\left(\frac{h-\Delta x}{\Delta x}\right)\left(\frac{h-2\Delta x}{\Delta x}\right)}{1.2.3}\Delta_3 y$$

+ etc.,

ou, en plaçant les $\Delta x$ sous les $\Delta y$ :

$$y' = y + h\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{h(h-\Delta x)}{1.2}\frac{\Delta_2 y}{\Delta x^2} + \frac{h(h-\Delta x)(h-2\Delta x)}{1.2.3}\frac{\Delta_3 y}{\Delta x^3}$$

+ etc. (30).

Lorsque les ordonnées sont infiniment proches les unes des autres, $\Delta x$, qui exprime la distance de l'une à l'autre, devient une quantité infiniment petite qui s'évanouit, art. 136, p. 162, de la 1ere partie), devant la quantité finie h, représentée par pP, fig. 2 ; en outre, $\Delta x$ devient la différentielle de x, (art. 1, 1ere partie). De même $\Delta y$ devient la différentielle de y, et les rapports $\frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{\Delta_2 y}{\Delta x^2}, \frac{\Delta_3 y}{\Delta x^3}$, etc. se réduisent aux coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}, \frac{d_2 y}{dx^2}, \frac{d_3 y}{dx^3}$, etc., qui substitués dans l'équation (30), la transforme en l'équacherchée, quand on néglice $\Delta x$ qui s'évanouit vis à-vis de h :

$$y' = y + \frac{dy}{dx} h + \frac{d_2 y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d_3 y}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.} (31).$$

26. — Dans la démonstration précédente, nous avons partagé l'accroissement pP de x, fig. 2., en un certain nombre de parties égales, et nous avons prix pour $\Delta x$ l'une de ces parties ; nous aurions pu, au contraire, désigner par $\Delta x$ l'accroissement pP, et considérer $\Delta x$ comme composé d'un nombre n de parties égales chacune à une quantité constante h. En admettant cette deuxième hypothèse, nous aurons $x' - x$ ou $\Delta x = nh$,

d'où

$$n = \frac{\Delta x}{h} \ldots (32);$$

substituant cette valeur dans l'équation (28), il viendra

$$y' = y + \frac{\Delta x}{h} \Delta y + \frac{\frac{\Delta x}{h}\left(\frac{\Delta x}{h} - 1\right)}{1.2} \Delta_2 y + \frac{\frac{\Delta x}{h}\left(\frac{\Delta x}{h} - 1\right)\left(\frac{\Delta x}{h} - 2\right)}{1.2.3}$$

$\Delta^3 y$ + etc ;

ou en réduisant au même dénominateur les quantités entre parenthèses

$$y' = y + \frac{\Delta x}{h} \Delta y + \frac{\frac{\Delta x}{h}\left(\frac{\Delta x - h}{h}\right)}{1.2} \Delta_2 y + \frac{\frac{\Delta x}{h}\left(\frac{\Delta x - h}{h}\right)\left(\frac{\Delta x - 2h}{h}\right)}{1.2.3}$$

$\Delta_3 y$ + etc.;

ou

$$y' = y + \frac{\Delta x}{h} \Delta y + \frac{\Delta x (\Delta x - h)}{1.2\, h^2} \Delta_2 y + \frac{\Delta x (\Delta x - h)(\Delta x - 2h)}{1.2.3\, h^3}$$

$\Delta_3 y$ + etc. (33).

et, en prenant h pour unité, cette équation (33) devient

$$y' = y + \Delta x \Delta y + \frac{\Delta x\,(\Delta x - 1)}{1.2} \Delta_2 y + \frac{\Delta x\,(\Delta x - 1)(\Delta x - 2)}{1.2.3} \Delta_3 y + \text{etc. } (34).$$

Remarquons que cette équations peut se mettre sous une autre forme ; en effet, l'hypothèse de $h=1$, réduit l'équation (32) à $n = \Delta x$. Cette valeur de $\Delta x$ transforme l'équation (34) en celle-ci :

$$y' = y + n.\Delta y + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta_2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \Delta_3 y + \text{etc.} (35),$$

ce qui nous ramène à l'équation (28).

*Remarque.* — Observons que ce que nous appelons $\Delta y$, dans la formule (33), n'est pas la même chose que $y'-y$ ; car $\Delta y$ exprime la différence, telle que $m'n'$, (fig, 2.), qui existe entre deux coordonnées consécutives telles que $mp$ et $m'p'$ ; tandis que $y'-y$ est la différence $MN$ qui existe entre $y'=MP$ et $y=mp$ ; puisque $y=f(x)=f(op)=mp$ et $y'=f(x+h)=f(op=pP)=f(oP)=MP$.

27. — Comme application de la formule (35), nous allons chercher l'ordonnée répondant à l'indice n dans la suite 4, 7, 12, 19, 28, 39, etc...(36) ;

à cet effet, comparons cette suite à la formule (12), savoir

$$a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ \text{etc. :}$$

et désignons le premier terme a par y, nous aurons (art. 19):

$$\begin{aligned}
\Delta y \text{ ou } b &= a_1 - a = 7 - 4 = 3,\\
b_1 &= a_2 - a_1 = 12 - 7 = 5,\\
b_2 &= a_3 - a_2 = 19 - 12 = 7,\\
b_3 &= a_4 - a_3 = 28 - 19 = 9,\\
b_4 &= a_5 - a_4 = 39 - 28 = 11,\\
&\dots\dots\dots\\
\Delta_2 y \text{ ou } c &= b_1 - b = 5 - 3 = 2,\\
c_1 &= b_2 - b_1 = 7 - 5 = 2,\\
c_2 &= b_3 - b_2 = 9 - 7 = 2,\\
c_3 &= b_4 - b_3 = 11 - 9 = 2,\\
&\dots\dots\dots\\
\Delta_3 y \text{ ou } d &= c_1 - c = 2 - 2 = 0\ ;\\
d_1 &= c_2 - c_1 = 2 - 2 = 0\ ;
\end{aligned}$$

toutes les autres différences sont également nulles. Par suite, l'équation (35) se réduit à ses trois premiers termes, de sorte qu'on a

$$y' = y + n\Delta y + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta_2 y \ldots (37) ;$$

substituant dans cette équation ces valeurs de y, de $\Delta y$ et de $\Delta_2 y$, on aura

$$y' = 4 + n\,3 + \frac{n(n-1)}{1.2}\,2 = 4 + 3n + n^2 - n = 4 + 2n + n^2 \quad (38).$$

Cette formule donne le moyen de déterminer le terme cherché, de la suite (36), qui répond à l'indice n. Ainsi, si l'on prend successivement pour n ces valeurs.

0, 1, 2, 3, 4, 5, etc.

et qu'on les mette dans la formule (38), on retrouvera tous les termes de la suite (36).

Ainsi, $n=0$ donne $y'=4$ ;

$n=1$, id. $y'=4+2.1+1^2=4+2+1=7$ ;

$n=2$, id. $y'=4+2.2+2^2=4+4+4=12$ ;

et ainsi de suite.

28, — On appelle *terme général* d'une suite de termes ou d'une série, une formule qui, comme la formule (38), détermine tous les termes de cette suite ou série, à commencer par la valeur $n=0$. On dit aussi que le terme général est une fonction de n.

Soit donc la suite de termes

$$a,\ a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots\ a_n,\ (39),$$

correspondant aux indices

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots n ;$$

il est facile de voir que $a_n$ est le terme général de la formule (39) ; car un terme quelconque de cette suite $a_3$, par exemple, s'obtient en donnant à n la valeur particulière 3. Le premier terme a équivant à $a_0$, ce qui veut dire simplement que a n'a point d'indice. — En ce qui concerne $a_n$, l'indice de ce terme indique le nombre de ceux qui le précèdent ; car en comptant les termes de la suite (39), à partir de $a_1$ inclusivement, ce nombre de termes sera exprimé par n, et par suite deviendra $n+1$, si nous y ajoutons a.

D'où il résulte que le nombre total des termes étant $n+1$, le nombre de ceux qui précèdent $a_n$ dans la suite (39) sera exprimé par n. Cette observation est basée entièrement sur ce que la première des valeurs qu'on substitue à n, pour obtenir tous les termes de la série, doit être zéro.

Ainsi ce que nous appellerons le terme général de la suite des nombres naturels.

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \text{etc.}\ldots(40),$$

ne sera pas n, parce que, bien que nous obtenions tous les termes de cette suite en faicant successivement

$$n=1,\ n=2,\ n=3,\ n=4,\ \text{etc.}.$$

nous ne commençons pas par $n=0$. Le terme général, dans ce cas, sera donc $n+1$, car en faisant $n=0, n=1, n=2$, etc., on obtiendra tous les termes de la suite (40).

On trouverait de même que les termes généraux des suites

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots.+n^2,$$
$$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots.+n_3,$$
$$1^4+2^4+3^4+4^4+\ldots.+n^4,$$

qui sont celles des nombres carrés, des nombres cubes et des quatrièmes puissances, sont

$(n+1)^2$, terme général de la suite des carrés,
$(n+1)^3$, id. id. des cubes,
$(n+1)^4$, id. id. des quatrièmes puissances ;

car en faisant successivement $n=0$, $n=1$, $n=2$, etc., dans ces séries, on en obtient tous les termes.

29. — Si l'on fait suivre l'unité des sommes des deux, des trois, des quatre, etc., premiers termes de la suite (40) des nombres naturels, nous obtiendrons la suite des nombres, dits *nombres triangulaires*; c'est-à-dire, si l'on prend d'abord le premier terme 1, puis la somme des deux premiers, $1+2=3$, puis la somme des trois premiers $1+2+3=6$, et ainsi de suite, nous aurons pour la suite des nombres triangulaires :

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, \text{etc.} (41).$$

Pour trouver le terme général de cette suite, écrivons au-dessous la suite

$$a, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \text{etc.} (42),$$

nous aurons (art. 27) :

$$y = a = 1,$$
$$\Delta y \text{ ou } b = a_1 - a = 3 - 1 = 2,$$
$$b_1 = a_2 - a_1 = 6 - 3 = 3,$$
$$b_2 = a_3 - a_2 = 10 - 6 = 4,$$
$$b_3 = a_4 - a_3 = 15 - 10 = 5,$$
$$b_4 = a_5 - a_4 = 21 - 15 = 6,$$
. . . . . . . . . . .
$$\Delta_2 y \text{ ou } c = b_1 - b = 3 - 2 = 1,$$
$$c_1 = b_2 - b_1 = 4 - 3 = 1,$$
$$c_2 = b_3 - b_2 = 5 - 4 = 1,$$
. . . . . . . . .
$$\Delta_3 y \text{ ou } d = c_1 - c = 1 - 1 = 0$$
. . . . . . . .
$$\Delta_4 y \text{ ou } e = d_1 - d = 0 - 0 = 0,$$
etc.

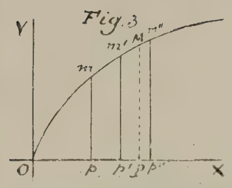
et puisque a, b, c, etc., sont censés posséder l'indice o, on a les indices o, 1, 2, 3, 4, etc. qui suivent l'ordre des nombres naturels ; leur différence est l'unité ce qui nous donne $h=1$, (art. 26). Cette hypothèse est celle de la formule (35), art. 26 ; et puisque dans le cas présent, nous avons, comme nous venons de voir, $y=1, \Delta y=2, \Delta_2 y=1$, et toutes les autres différences $\Delta_3 y$, $\Delta_4 y$, etc., nulles, nous obtiendrons en substituant ces valeurs dans la formule (35) ;

$$y' = 1 + n.2 + \frac{n(n-1)}{1.2}.1 + 0 = 1 + 2n + \frac{n(n-1)}{1.2} = 1 + \frac{4n+n^2-n}{2} = 1 + \frac{3n+n^2}{2}. \quad (43);$$

*ce qui est le terme général de la suite des nombres triangulaires*. Et en effet, faisons dans ce terme successivement $n=0$, $n=1$, $n=2$, $n=3$, etc., nous retrouverons les termes de cette suite, savoir :

$$y' = 1 + 0 = 1 \; ; \; y' = 1 + \frac{3+1}{2} = 1 + 2 = 3 \; ; \; y' = 1 + \frac{3.2+2^2}{2} = 1 + 5 = 6 \; ; \; y' = 1 + \frac{3.3+3^2}{2} = 1 + 9 = 10, \text{ etc.}$$

30.— Jusqu'à présent, nous avons supposé que n était




un nombre entier ; mais il se peut qu'il soit aussi un nombre fractionnaire, c'est le cas, par exemple, quand les ordonnées, dont on connaît les valeurs, sont équidistantes, et où, par suite, on a le droit de prendre h pour unité. C'est ce qui arriverait fig. 3, si le point P, déterminé par l'abscisse $x'=x+nh$, ne tombe pas sur un des pieds $p, p', p''$, etc., des ordonnées équidistantes $mp, m'p'$, $m''p''$, etc. Par exemple, si l'on prend la courbe exprimée par les termes de la série (41), dont nous construirons trois ordonnées, en faisant, fig. 4, $pp'=p'p''=1$,

et en prenant, conformément à cette série (41),

$$mp=1,\ m'p'=3,\ m''p''=6,$$

et si l'on demande quelle sera l'ordonnée correspondante à l'indice $n=1+\frac{2}{3}$, on substituera cette valeur dans la formule (43), qui est l'expression générale de l'ordonnée de la courbe proposée, et l'on obtiendra

$$y'=1+\frac{3\left(1+\frac{2}{3}\right)+\left(1+\frac{2}{3}\right)^2}{2}=1+\frac{3\left(\frac{5}{3}\right)+\frac{25}{9}}{2}=1+\frac{35}{9}=\frac{44}{9}=4+\frac{8}{9}.$$

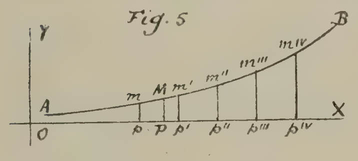
Donc, l'ordonnée $MP=4+\frac{8}{9}$ sera celle qui correspond à l'indice $1+\frac{2}{3}$, ou, ce qui revient au même, à l'abscisse

$$x'=x+nh=x+\left(1+\frac{2}{3}\right)h=x+\left(1+\frac{2}{3}\right)1=x+1+\frac{2}{3}.$$

31. — Nous pouvons, maintenant, à l'aide du problème que nous venons de résoudre, *trouver le logarithme d'un nombre qui n'est pas compris dans les tables*. En effet, soit à déterminer le logarithme du nombre 2,718281828 qui, comme nous avons vu à l'art. 26, de la première partie, est la base du système népérien.

Nous savons qu'en déplaçant la virgule, on ne change pas les chiffres décimaux du logarithme ; donc nous la placerons de façon que la partie entière du nombre proposé soit aussi grande que les tables puissent la contenir ; et, à cet effet, au lieu du nombre en question, nous écrivons 271,8281828, parce que plus un nombre entier est grand, plus son logarithme est donné avec exactitude dans les tables.

Notre recherche se ramenant ainsi à trouver le logarithme de 271,8281828, supposons que l'on ait construit les points m, m', m'', m''', $m^{IV}$, etc., fig. 5., au moyen des coordonnées suivantes :




op=271, mp=log de 271,
op'=272, m'p'=log de 272.
op''=273, m''p''=log de 273,
op'''=274, m'''p'''=log de 274,
$op^{IV}$=275, $m^{IV}p^{IV}$=log de 275,
etc.

il est évident que si les points m, m', m'', etc., se succédaient immédiatement, ils constitueraient une ligne courbe ; mais comme ils sont séparés les uns des autres, si l'on fait passer par ces points une ligne mm'm'', etc., cette ligne pourra être regardée comme une courbe approximative AB, dont l'inflexion s'éloignera peu de celle de la véritable courbe. Par suite, si l'on mène par le point P une ordonnée PM qui rencontre en M notre courbe approximative, on conçoit que cette ordonnée diffèrera peu de celle qui appartiendrait à la véritable courbe ; et cela résultera de l'influence que les ordonnées mp, m'p', m''p'', etc, ont exercée sur l'inflexion de la courbe approximative ; de façon que l'on pourra considérer MP comme une fonction de ces ordonnées : c'est également la conséquence que l'on tire de la formule (35), art. 26, dans laquelle l'ordonnée MP, représentée par y', est une fonction de y et de ses accroissements successifs.

Nons allons donc déterminer la valeur de MP au moyen de cette formule.

A cet effet, remarquons que nous avons, fig. 5,

$$x \text{ ou } op = 271, \quad y \text{ ou } mp = \log 271,$$

$x'$ ou $OP = x + \Delta x =$ une quantité comprise entre op ou 271 et $op'$ ou 272, soit ici $= 271,8281828$,

ce qui donne $\Delta x = 0,8281828$ ;

il s'agit de déterminer $y'$ ou MP.

Cela étant, nous savons que les abscisses op, $op'$, $op''$, etc., étant représentées par les nombres 271, 272, 273, etc. la différence de l'une à l'autre est égale à l'unité ; donc, nous avons, dans le cas présent, $h=1$, art. 26 ; par conséquent, nous ferons usage de la formule (34) pour trouver la solution du problème ; et, comme nous connaissons de cette formule $\Delta x$ et le premier terme y, nous n'avons plus besoin que de connaître $\Delta y$, $\Delta_2 y$, $\Delta_3 y$, etc. Pour obtenir ces différences, prenons d'abord, comme nous l'avons fait dans l'art. 19, la suite

$$a, \; a_1, \; a_2, \; a_3, \; a_4, \text{ etc.},$$

et posons

$$y \text{ ou } a = \log \text{ de } 271 = 2,4329692909,$$
$$a_1 = \log \text{ de } 272 = 2,4345689040,$$
$$a_2 = \log \text{ de } 273 = 2,4361626470,$$
$$a_3 = \log \text{ de } 274 = 2,4377505628,$$
$$a_4 = \log \text{ de } 275 = 2,4393326938,$$
$$\text{etc.,} \quad \text{etc.,} \quad \text{etc. ;}$$

on déduit de là, art. 19 et ci-dessus,

$$\Delta y \text{ ou } b = a_1 - a = 0,0015996131,$$
$$b_1 = a_2 - a_1 = 0,0015937430,$$
$$b_2 = a_3 - a_2 = 0,0015879158,$$
$$b_3 = a_4 - a_3 = 0,0015821310,$$
$$\text{etc.,} \quad \text{etc.} \quad \text{etc. ;}$$
$$\Delta_2 y \text{ ou } c = b_1 = b = -0,0000058701,$$
$$c_1 = b_2 - b_1 = -0,0000058272,$$
$$c_2 = b_3 - b_2 = -0,0000057848,$$
$$\text{etc.,} \quad \text{etc.,} \quad \text{etc.}$$
$$\Delta_3 y \text{ ou } d = c_1 - c = -0,0000000429,$$
$$\text{etc., etc.}$$

Formons d'abord maintenant le terme $\Delta x \Delta y$, de cette formule (34), nous aurons

$\Delta x \Delta y = (0{,}8281828)(0{,}0015996) = 0{,}00132476...$ (44).

La valeur $\Delta x$ n'est ici qu'approximative, car nous avons négligé les chiffres décimaux qui passent le septième rang, car la valeur de la base du système népérien est $e = 2{,}718281828459045...$ etc. ;
il résulte donc de là que le premier facteur de la valeur de $\Delta x \Delta y$, n'est exact que lorsque l'on se bonne aux sept premiers chiffres décimaux. Les deux zéros du second facteur de l'expression (44) reculent la virgule de deux rangs dans le produit, ce qui donnerait neuf chiffres décimaux ; mais à cause des retenues, ne pouvant compter sur l'exactitude du dernier chiffre, nous n'en prendrons que huit.

Cherchons maintenant la valeur du troixième terme du second membre de la formule (34), c'est-à-dire de

$$\Delta x \frac{(\Delta x - 1)}{2} \Delta_2 y.$$

Comme la fraction décimale, valeur de $\Delta x$, est moindre que l'unité, nous remplacerons $\Delta x - 1$ par $-(1 - \Delta x)$, et nous aurons d'abord

$$\Delta x \frac{(\Delta x - 1)}{2} = \Delta x \frac{-(1 - \Delta x)}{2} = -\Delta x \frac{(1 - \Delta x)}{2} = -\left(0{,}8281828 \frac{0{,}1718172}{2}\right) = -0{,}071148025,$$

et en multipliant par $\Delta_2 y$ ou par $-0{,}0000058701$, valeur aussi négative, nous obtiendrons le produit positif

$$\Delta x \frac{\Delta x - 1}{2} \Delta_2 y = (-0{,}0711\,48025)(-0{,}0000058701) = 0{,}000\,000\,4176.$$

Nous ne chercherons pas les valeurs des autres termes en $\Delta_3 y$, $\Delta_4 y$, etc., de la formule (34) ; car le terme en $\Delta_3 y$, c'est-à-dire le terme $\Delta x \frac{(\Delta x - 1)(\Delta x - 2)}{2.3} \Delta_3 y$, n'a, dans les huit premières décimales de sa valeur, aucun chiffre significatif ; à plus forte raison, en sera-t-il ainsi

des termes suivants qui sont moindres. Donc la valeur de $y'$ ne dépend que des huit premières décimales de celle de $\Delta x$.

En résumé, vous avons donc de la formule (34) :

$$y = \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2{,}43296929$$

$$\Delta y\,\Delta x = \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 0{,}00132476$$

$$\Delta x \frac{(\Delta x - 1)}{2} \Delta_2\, y = \quad . \quad . \quad . \quad 0{,}00000042$$

$$y' \text{ ou log de } 271{,}8281828 = 2{,}43429447$$

D'où, en reculant la virgule de deux rangs vers la gauche, dans le nombre 271,8281828, et par suite en retranchant deux unités de la caractéristique du logarithme, il viendra

$$\text{log de } e \text{ ou de } 2{,}718281828 = 0{,}4342944.$$

Nous n'avons pris que sept décimales dans la valeur du logarithme, parce qu'on ne peut compter sur la huitième, qui, bien que exacte dans chacun des nombres que nous additionnons, peut se trouver fautive dans leur somme, à cause des retenues qui pourraient provenir des chiffres omis à partir de la neuvième décimale.

Observons que dans le raisonnement précédent, nous avons considéré l'hypothèse où l'ordonnée était le logarithme de l'abscisse ; on pourrait au contraire supposer que l'abscisse est le logarithme de l'ordonnée. On arriverait au même résultat ; seulement la courbe n'aurait pas la même position.

32. *Remarque.* — Le calcul des différences peut servir dans le développement des séries, art. 20, 22, etc. ; dans la recherche des termes généraux de séries, art. 28, 29 ; dans la sommation des termes d'une série, art. 38, ci-après ; il conduit à la formule de Newton, art. 23 ; à celle de Taylor, art. 25, et, en général, il conduit naturellement au calcul différentiel, art. 2 et suivants et art. 11 ; on peut l'employer pour trouver les logarithmes de nombres qui ne se trouvent pas dans les tables, art. 31 ; etc.

## Du Calcul inverse des différences.

33. — Nous avons vu dans la première partie, art. 1, du calcul intégral, que *l'intégration*, qui se représente par le signe $\int$, consiste à remonter d'une dérivée ou d'une différentielle donnée à la fonction d'où elle a pu être déduite.

De même, le calcul inverse des différences a pour objet de remonter de la différence à la quantité qui l'a produite.

Cette opération, qui s'appelle *intégration*, se représente par le signe $\Sigma$, qui signifie somme et qui s'appelle sigma.

Ainsi, étant donné la différence $\Delta x$, supposée constante, il est évident qu'on aura

$$\Sigma \Delta x = x.$$

34. — On peut toujours admettre que l'unité entre comme facteur dans cette équation ; or, algèbre, on sait que $x^0 = 1$ ; remplaçons donc l'unité par $x^0$, et l'équation cidessus prendra la forme

$$\Sigma \Delta x . 1 = x \text{ ou } \Sigma \Delta x . x^0 = x \text{ ;}$$

faisons passer la constante $\Delta x$ en dehors du signe d'intégration, et nous aurons

$$\Delta x \Sigma x^0 = x,$$

d'où

$$\Sigma x^0 = \frac{x}{\Delta x} \qquad (45)$$

35. — Supposons encore $\Delta x$ constant, et soit

$$y = x^m,$$

on aura, art. 3, $\quad y' = (x + \Delta x)^m$

et par suite $\quad y' - y$ ou $\Delta y = (x + \Delta x)^m - x^m$ ;

développons par la formule du binôme, et supprimons les termes en $x^m$ qui se détruisent, nous trouverons, art. 3

$$\Delta y = m x^{m-1} \Delta x + \frac{m}{1} \frac{m-1}{2} x^{m-2} \Delta x^2 + \text{etc.}, \ (46) \text{ ;}$$

intégrons et faisons passer les constantes hors du signe $\Sigma$, il viendra

$$\Sigma \Delta y \text{ ou } y = m \Sigma x^{m-1} \Delta x + \frac{m}{1} \frac{m-1}{2} \Sigma x^{m-2} \Delta x^2 + \text{etc.}, (47)$$

remplaçons y par sa valeur $x^m$, et faisons comme à l'art. 34, passer les constantes $\Delta x$, $\Delta x^2$, etc., hors du signe d'intégration, nous aurons

$x^m = m.\Delta x \Sigma x^{m-1} + \frac{m}{1}\frac{m-1}{2}\Delta x^2 \Sigma x^{m-2} + \frac{m}{1}\frac{m-1}{2}\frac{m-2}{3}$
$\Delta x^3 \Sigma x^{m-3} + \text{etc.}$ (48).

Faisons successivement, dans cette équation $m=2$, $m=3$, etc., nous obtiendrons

$x^2 = 2\Delta x.\Sigma x^{2-1} + \frac{2}{1}\frac{2-1}{2}\Delta x^2 \Sigma x^{2-2} + \frac{2}{1}\frac{2-1}{2}\frac{2-2}{3}\Delta x^3 x^{2-3} +$
$\text{etc.}, = 2\Delta x \Sigma x + \Delta x^2 \Sigma x^0 + 0.\Delta x^3 x^{-1} + \text{etc.} = 2\Delta x \Sigma x + \Delta x^2 \Sigma x^0$;

$x^3 = 3\Delta x \Sigma x^{3-1} + \frac{3}{1}\frac{3-1}{2}\Delta x^2 \Sigma x^{3-2} + \frac{3}{1}\frac{3-1}{2}\frac{3-2}{3}\Delta x^3 \Sigma x^{3-3} +$
$\text{etc.} = 3\Delta x \Sigma x^2 + 3\Delta x^2 \Sigma x + \Delta x^3 \Sigma x^0$;

De même, on trouverait

$$x^4 = 4\Delta x \Sigma x^3 + 6\Delta x^2 \Sigma x^2 + 4\Delta x^3 \Sigma x + \Delta x^4 \Sigma x^0;$$

etc. etc. etc.

De ces équations, on tire

$$x^2 - \Delta x^2 \Sigma x^0 = 2\Delta x \Sigma x;$$
$$x^3 - 3\Delta x^2 \Sigma x - \Delta x^3 \Sigma x^0 = 3\Delta x \Sigma x^2,$$
$$x^4 - 6\Delta x^2 \Sigma x^2 - 4\Delta x^3 \Sigma x - \Delta x^4 \Sigma x^0 = 4\Delta x \Sigma x^3:$$

etc etc

d'où l'on tire successivemt

$$\Sigma x = \frac{x^2}{2\Delta x} - \frac{\Delta x^2 \Sigma x^0}{2\Delta x};$$
$$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3\Delta x} - \frac{3\Delta x^2 \Sigma x}{3\Delta x} - \frac{\Delta x^3 \Sigma x^0}{3\Delta x};$$
$$\Sigma x^3 = \frac{x^4}{4\Delta x} - \frac{6\Delta x^2 \Sigma x^2}{4\Delta x} - \frac{4\Delta x^3 \Sigma x}{4\Delta x} - \frac{\Delta x^4 \Sigma x^0}{4\Delta x};$$

etc, etc etc

supprimons les termes en $\Delta x$, et les termes numériques qui dans chaque fraction, sont communs au numérateur et au dénominateur, nous obtiendrons

$$\left.\begin{aligned} \Sigma x &= \frac{x^2}{2\Delta x} - \frac{\Delta x \Sigma x^0}{2}; \\ \Sigma x^2 &= \frac{x^3}{3\Delta x} - \Delta x \Sigma x - \frac{\Delta x^2}{3}\Sigma x^0; \\ \Sigma x^3 &= \frac{x^4}{4\Delta x} - \frac{3}{2}\Delta x \Sigma x^2 - \Delta x^2 \Sigma x - \frac{\Delta x^3}{4}\Sigma x^0; \\ &\text{etc} \quad \text{etc} \quad \text{etc} \end{aligned}\right\} \quad (49).$$

Remplaçons, dans la première des équations (49), la valeur de $\sum x^{\circ}$, donnée par l'équation (45), art. 34, nous aurons

$$\sum x = \frac{x^2}{2\Delta x} - \frac{\Delta x}{2}\,\frac{x}{\Delta x} = \frac{x^2}{2\Delta x} - \frac{x}{2} \;.... (50)\;;$$

substituons cette valeur de $\sum x$ et celle de $\sum x^{\circ}$, dans la seconde des épuations (49), il viendra

$$\sum x^2 = \frac{x^3}{3\Delta x} - \Delta x\left(\frac{x^2}{2\Delta x} - \frac{x}{2}\right) - \frac{\Delta x^2}{3}\,\frac{x}{\Delta x} = \frac{x^3}{3\Delta x} - \frac{\Delta x\, x^2}{2\Delta x} +$$
$$\Delta x.\frac{x}{2} - \frac{\Delta x^2\,.x}{3\Delta x} = \frac{x^3}{3\Delta x} - \frac{x^2}{2} + \Delta x\frac{x}{2} - \Delta x\,\frac{\Delta x\; x}{3\Delta x} = \frac{x^3}{3\Delta x} -$$
$$\frac{x^2}{2} + \Delta x\frac{x}{2} - \Delta x\frac{x}{3} = \frac{x^3}{3\Delta x} - \frac{x^2}{2} + \Delta x\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{3}\right) = \frac{x^3}{3\Delta x} -$$
$$\frac{x^2}{2} + \Delta x\left(\frac{3\,x}{6} - \frac{2\,x}{6}\;\text{ou}\;\frac{x}{6}\;\text{ou}\;\frac{x}{2.3}\right) = \frac{x^3}{3\Delta x} - \frac{x^2}{2} + \frac{x\,\Delta x}{2.3} ...(51)$$

En substituant dans la troisième des équations (49), les valeurs de $\sum x^{\circ}$, de $\sum x$ et de $\sum x^2$, données par les équations (45), (50) et (51) on trouvera de même

$$\sum x^3 = \frac{x^4}{4\Delta x} - \frac{1}{2}\,x^3 + \frac{1}{4}\,x^2\,\Delta x ....(52).$$

Mais comme l'accroissement $\Delta x$, qui est supposé constant, est d'une grandeur arbitraire, nous pouvons le remplacer par h, afin d'enlever l'idée d'opération renfermée dans $\Delta x$, et il viendra, d'après les équations (45), (50), (51) et (52).

$$\left.\begin{aligned}
\sum x^{\circ} &= \frac{x}{\Delta x} = \frac{x}{h},\\
\sum x &= \frac{x^2}{2h} - \frac{x}{2},\\
\sum x^2 &= \frac{x^3}{3h} - \frac{x^2}{2} + \frac{x\,h}{2.3},\\
\sum x^3 &= \frac{x^4}{4h} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2\,h}{4},\\
&\text{etc.}\quad\text{etc.}\quad\text{etc.}
\end{aligned}\right\}\;(53).$$

Donc si l'on substitue ces valeurs dans les équations (47) ou (48), en y remplaçant $\Delta x$ par h, on trouvera l'intégrale cherchée. En général, une fonction rationnelle

entière de x, après qu'on a développé les opérations et placé les signes d'intégration, se réduisant à une somme de quantités de la forme $\Sigma x^m$, on conçoit, d'après ce qui précède, que l'on peut toujours en faire l'intégration.

36. — Soit, par exemple, à trouver l'intégralo de la fonction $(a+bx)^3$

Développons le cube, nous aurons (p. 20 recueil) :

$$a^3 + 3a^2 bx + 3ab^2 x^2 + b^3 x^3 .$$

Multiplions le premier terme $a^3$ par $x^0$ qui égale 1, comme nous avons vu, art. 34, puis intégrons, nous obtiendrons

$$\Sigma (a+bx)^3 = \Sigma a^3 x^0 + \Sigma 3a^2 bx + \Sigma 3ab^2 x^2 + \Sigma b^3 x^3 ,$$

ou, en mettant les constantes en dehors du signe d'intégration

$$\Sigma (a+bx)^3 = a^3 \Sigma x^0 + 3a^2 b\Sigma x + 3ab^2 \Sigma x^2 + b^3 \Sigma x^3 ;$$

Remplaçons maintenant $\Sigma x^0$, $\Sigma x$, $\Sigma x^2$ et $\Sigma x^3$ par leurs valeurs que nous donnent les équations (53), nous aurons

$$\Sigma (a+bx)^3 = a^3 \frac{x}{h} + a^2 b\left(\frac{x^2}{2h} - \frac{x}{2}\right) + 3ab^2\left(\frac{x^3}{3h} - \frac{x^2}{2} + \frac{xh}{2.3}\right)$$
$$+ b^3\left(\frac{x^4}{4h} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2 h}{4}\right) = a^3 \frac{x}{h} + \frac{a^2 bx^2}{2h}$$
$$- \frac{a^2 bx}{2} + \frac{3ab^2 x^3}{3h} - \frac{3ab^2 x^2}{2} + \frac{3ab^2 xh}{2.3}$$
$$+ \frac{b^3 x^4}{4h} - \frac{b^3 x^3}{3} + \frac{b^3 x^2 h}{4} ;$$

ou, en ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de x, et en supprimant les facteurs numériques communs aux deux termes des fractions, nous trouverons

$$\Sigma (a + bx)^3 = \frac{b^3 x^4}{4h} + \left(\frac{ab^2}{h} - \frac{b^3}{3}\right) x^3 + \left(\frac{a^2 b}{2b} - \frac{3ab^2}{2} + \frac{b^3 h}{4}\right) x^2$$
$$+ \left(\frac{a^3}{h} - \frac{a^2 b}{2} + \frac{ab^2 h}{2}\right) x + \text{constante.}$$

Remarqnons que nous avons ajouté une constante, comme nous l'avons fait, en calcul intégral, art. 1, de la première partie. En effet, l'intégrale d'une différence $\Delta x$, est aussi bien x que $x+a$, puisque ces fonctions ont la même différence laquelle est $\Delta x$.

37. — Soit à intégrer le produit de divers facteurs

$$x\,(x+h)\,(x+2h)\,(x+3h)\ldots(x+nh),$$

dans lequel la différence $\Delta x$ est constante et représentée par h.

A cet effet, différentions (différence et non différentielle), le produit

$y=(x-h)x(x+h)(x+2h)(x+3h)\ldots(x+(n-1)h)(x+nh)$ (54), qui contient de plus que le précédent, le facteur $(x-h)$ ; remplaçons dans ce produit x par $x+h$, y deviendra $y'$ ou $(y+\Delta y)$, art. 2, et nous aurons

$$y+\Delta y=\big((x+h)-h\big)\big(x+h\big)\big((x+h)+h\big)\big((x+h)+2h\big)\ldots \big((x+h)+(n-1)h\big)\big((x+h)+nh\big).$$

ou $y+\Delta y=x(x+h)(x+2h)(x+3h)\ldots(x+nh)(x+h+nh)$ ; retranchant de ce résultat l'équation primitive (54), il viendra

$$(y+\Delta y-y) \text{ ou } \Delta y=x(x+h)(x+2h)\ldots(x+nh)(x+h+nh)-(x-h)x(x+h)\ldots(x+nh).$$

La partie $x(x+h)\,(x+2h)\ldots(x+nh)$ étant commune aux deux produits qui composent le second membre de cette équation, nous la mettrons en facteur commun, et nous obtiendrons

$$\Delta y=[x(x+h)\,(x+2h)\ldots\ldots(x+nh]\,[x+h+nh-(x-h)]=[x(x+h)\,(x+2h)\ldots\ldots(x+nh]\,[(n+2)h].$$

En intégrant, nous aurons

$$\Sigma\Delta y \text{ ou } y=\Sigma[x(x+h)\,(x+2h)\ldots(x+nh)]\,[(n+2)h]\,;$$

Le second facteur étant constant, nous pouvons le faire passer hors du signe $\Sigma$, et il viendra

$$y=(n+2)h\Sigma[x(x+h)\,(x+2h)\ldots(x+nh)].$$

Remplaçons y par sa valeur donnée par l'équation (54), nous aurons

$(x-h)x(x+h)(x+2h)\ldots(x+nh)=(n+2)h\Sigma[x(x+h)(x+2h)\ldots(x+nh)]$ ou, en divisant par $(n+2)h$ les deux membres

$$\frac{x-h}{(n+2)h}[x(x+h)(x+2h)\ldots\ldots(x+nh)]=\Sigma[x(x+h)(x+2h)\ldots\ldots(x+nh)]\,;$$

ou, en transposant les deux membres

$$\Sigma\,[x\,(x+h)(x+2h)\ldots(x+nh)]=\frac{x-h}{(n+2)h}[x(x+h)(x+2h)\ldots(x+nh)].$$

38. — *Sommation des termes d'une série à l'aide du calcul des différences finies.*

Le calcul des différences va nous permettre de déterminer le *terme sommatoire* d'une série, (art. 158 cal. diff. de la première partie), c'est-à-dire l'expression algébrique au moyen de laquelle on peut calculer la somme des termes de cette série.

Nous examinerons d'abord comment le terme sommatoire peut être obtenu lorsqu'on connaît le terme général d'une série (art. 28).

A cet effet, soit la suite

$$a,\ a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots a_{n-1},\ a_n \quad (55),$$

laquelle correspond aux indices, $0, 1, 2, 3, \ldots n_{-1}, n$. Il est facile de voir qu'en donnent successivement à n les valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots n$, on formera avec $a_n$ tous les termes de la suite (55) ; par suite $a_n$ en est donc le terme général, art. 28. Mais ce terme général peut être considéré comme la différence dont s'accroîtrait

$$a+a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1} \quad (56),$$

pour former la somme des termes de la suite (55).

Donc, si nous désignons par S la somme des termes de la suite (56), nous aurons

$$\Delta S = a_n ;$$

d'où, en intégrant, nous tirerons, art. 33 ;

$$\Sigma \Delta S \text{ ou } S = \Sigma a_n \ . \quad (57).$$

Telle sera la somme des termes compris inclusivement depuis a juspu'à $a_{n-1}$, c'est-à-dire jusqu'au terme qui occupe le $(n-1)^{\text{ième}}$ rang. à partir de $a_1$, c'est-à-dire pour les indices depuis 1 à $n-1$ ; mais si au lieu de comter les rangs depuis $a_1$, nous les comptons depuis a, le terme $a^{n-1}$ occupera le $n^{\text{ième}}$ rang, c'est-à-dire pour les indices depuis 0 à $n-1$, car a est cencé avoir l'indice 0, ou $a_0 = a$ ; et alors les indices $0, 1, 2, 3, \ldots n-1$, de la suite (56) pourront se changer en ces autres indices $1, 2, 3, \ldots n$.

De cette façon, le terme sommatoire S exprimera la suite des termes compris depuis $n=1$ jusque $n=n$.

*Application* 1. — Comme exemple, cherchons le terme sommatoire de la suite

$$3,\ 7,\ 11,\ 15.\ 19,\ 23. \quad (58),$$

dont le terme général, (art. 28), est $4n+3$. Cette formule nons donne (ci-dessus) :

$$S=\Sigma\,(4n+3)\,,$$

ou, art. 34 et 36 : $\quad S=\Sigma\,(4n+3n^{\circ})\,,$

ou, en mettant les constantes hors du signe d'intégration

$$S=4\Sigma n+3\Sigma n^{\circ} \quad (59)\,;$$

Mettons n à la place de x, dans les équations (45) et (50), et faisons $\Delta x=1$, puisque les indices croissent d'nne unité, nous déduirons de ces équations

$$\Sigma n^{\circ}=\frac{n}{\Delta n}=\frac{n}{1}=n\,;\ \Sigma n=\frac{n^2}{2\Delta n}-\frac{n}{2}=\frac{n^2}{2.1}-\frac{n}{2}=\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}\,;$$

substituant ces valeurs dans l'équation (59), nous aurons

$$S=4\left(\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}\right)+3\,n+\text{constante},$$

ou en réduisant

$$S=\frac{4n^2}{2}-\frac{4n}{2}+3n+\text{constante}=2n^2-2n+3n+\text{constante}=$$
$$2n^2+n+\text{constante} \quad (60).$$

La constante se déterminera, en remarquant que quand $n=0$, la somme S des termes est nulle, puisque $\Sigma n^{\circ}=n=0$ et que $\Sigma n=\frac{0^2}{2}-\frac{0}{2}=0$, donc (éq. 59), $S=(4\times 0)+(3\times 0)=0$ ; dans cette hypothèse l'éq. (60) se réduit à

$$0=0+0+\text{constante}\ ;\ \text{d'où constante}=0.$$

Supprimant donc la constante, nous aurons

$$S=2n^2+n \quad (61).$$

Ponr appliquer cette formule à la sommation des termes de la suite (58), nous remarquerons que ces termes étant au nombre de six, nous avons $n=6$ ; mettant cette valeur dans l'ég. (61), nous trouverons

$$S=2.6^2+6=78.$$

*Application* 2. — Soit à chercher la somme des quinze premiers termes de la suite des nombres naturels, c'est-à-dire de la série

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ldots\ 15\,;$$

le terme général de cette suite étant $n+1$, art 28, nous aurons pour son terme sommatoire art 38 :

$$S=\Sigma(n+1)=\Sigma(n+n^\circ)=\Sigma n+\Sigma n^\circ,$$

et en remplaçant n par x,

$$S=\Sigma x+\Sigma x^\circ\ ;$$

mais éq. (50), on a $\Sigma x=\frac{x^2}{2\Delta x}-\frac{x}{2}$ ; et l'éq. (45) donne $\Sigma x^\circ=\frac{x}{\Delta x}$ ; en remplaçant x pai n, et $\Delta x$ par 1, puisque les termes de la série diffèrent de l'un à l'autre d'une unité, on obtiendra

$$S=\frac{x^2}{2\Delta x}-\frac{x}{2}+\frac{x}{\Delta x}=\frac{n^2}{2.1}-\frac{n}{2}+\frac{n}{1}=\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}+\frac{2n}{2}=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}.$$

Cette équation, comme celle de l'application précédente, ne comporte point de constante. Les indices ne différant pas des termes de la série, qui sont 1, 2, 3 jusque 15, nous aurons pour la somme des quinze premiers termes, en faisant $n=15$ dans la formule ci-dessus :

$$S=\frac{15^2}{2}+\frac{15}{2}=\frac{225}{2}+\frac{15}{2}=112,5+7,5=120.$$

## De l'interpolation.

39. — Lorsqu'on connait un certain nombre de valeurs d'une fonction f (x) correspondantes à des valeurs données de la variable x, et que l'on veut déterminer celles qui se rapportent à des valeurs intermédiaires de x, l'opération que l'on exécute s'appelle *interpolation*. L'objet qu'on poursuit dans cette recherche n'est pas *toujours* d'obtenir une résultat rigoureusement exact, mais d'obtenir le plus simplement possible des valeurs qui aient un degré suffisant d'approximation. Par exemple, quand on calcule, au moyen d'une table de logarithmes, le logarithme d'un nombre qui ne s'y trouve pas, on fait une interpolation. On peut à l'aide de l'interpolation, abréger le calcul des tables de logarithmes de sinus, ou autres ; on se borne à calculer directement certains résultats de distance en distance, et on remplit les intervalles par interpolation. Les tables astronomiques se forment d'après les mêmes principes.

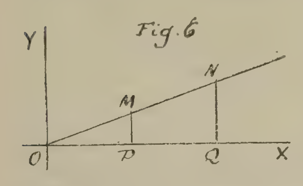
On fait aussi usage, en physique, des méthodes d'interpolation pour déduire d'un certain nombre de résultats d'expérience, une formule qui exprime approximativement la loi du phénomène ; si, par exemple, on a déterminé l'état hygrométrique correspondant à diverses indications d'un hygromètre, on s'assure d'abord de la marche régulière des résultats en cherchant, comme nous le verrons plus loin, à construire une courbe $y = f(x)$ qui les représente le mieux possible. Quand cette épreuve graphique a réussi, on pose.

$$y = M + Nx + Px^2 + Qx^3 + \text{etc.}... \quad (62),$$

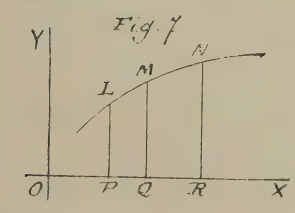
en prenant autant de termes que l'on a d'observations ; puis on détermine les coefficients M, N, P, etc. qui se trouvent liés entre eux par un égal nombre d'équations du premier degré.

On peut donc dire aussi que *l'interpolation* a pour but d'insérer dans une suite de termes qui suivent une certaine loi, d'autres termes subordonnés à cette même loi.

Par exemple, si l'on nous donnait les coordonnées OP et MP, OQ et NQ, de deux points M et N, fig. 6, situés sur un plan, il suffirait de mener la droite MN par ces deux points pour résoudre le problème ; car il est évident que les coordonnées OP et MP, OQ et NQ, ainsi que toutes celles de la droite ON seraient enchaînées par une même loi. (Voir recueil p. 124 et 125, en faisant l'ordonnée b à l'origine égale à zéro, l'équation de cette droite ON est $y = ax$, d'où $\frac{y}{x} = a$).




40.— Lorsque trois points L, M, N, fig. 7, non en ligne droite, situés dans un même plan, sont déterminés par les coordonnées OP, PL ; OQ, QM ; OR, RN ; si l'on fait passer l'arc de cercle LMN par ces trois points, ce qui est toujours

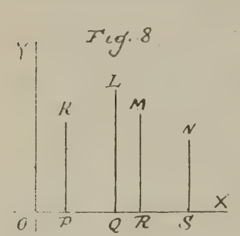


possible (géométrie élémentaire), on satisfera encore au problème. Mais l'arc de cercle LMN ne pourra plus nous en donner la solution, si l'on a un plus grand nombre de points, car par plus de trois points non en ligne droite, il n'est pas toujours possible de faire passer un arc de cercle. — Du reste, quoique le cercle soit une courbe facile à décrire, il n'est point, par son équation, celle qu'on pourrait considérer comme la plus convenable au cas présent. Nous devrons donc en choisir une autre se prêtant mieux aux hypothèses que nous pourrons établis sur le nombre de points par lesquels la courbe doit passer. — Cette courbe est la parabole de tous les genres ou de tous les ordres; (remarque art 74, 1re partie, calcul intégral) qui est comprise dans l'équation générale, art. 39,

$$y = M + Nx + Px^2 + Qx^3 + \text{etc.} \quad (63)$$

### Méthode d'interpolation De Newton.

41. — Si par l'observation ou par tout autre moyen, art. 39, on est parvenu à reconnaître que les abscisses OP, OQ, OR, OS, etc. fig. 8 ont pour ordonnées correspondantes KP, LQ, MR, NS, etc., et si ces abscisses sont représentées par les lettres a, b, c, d, etc., et leurs ordonnées par A, B, C, D, etc., l'équation (63), dans laquelle les coefficients M, N, P, Q, etc. sont indéterminés, sera satisfaite ou vérifiée ainsi bien par les valeurs a et A, que par les valeurs b et B, c et C et ainsi de suite ; de façon que nous aurons pour déterminer les coefficients M, N, P, Q, etc., les équations suivantes (64), obtenues en faisant successivement dans l'éq. (63), $y=A$ et $x=a$ ; $y=B$ et $x=b$ ; $y=C$ et $x=c$, $y=D$ et $x=d$ ; et ainsi de suite :




$$\left.\begin{aligned} A &= M + Na + Pa^2 + Qa^3 + \text{etc.} \\ B &= M + Nb + Pb^2 + Qb^3 + \text{etc.} \\ C &= M + Nc + Pc^2 + Qc^3 + \text{etc.} \\ D &= M + Nd + Pd^2 + Qd^3 + \text{etc.} \\ &\text{etc.} \quad \text{etc.} \quad \text{etc.} \end{aligned}\right\} (64)$$

Il faudra que ces équations soient en même nombre que les coefficients M, N, P, Q, etc., qui sont à déterminer, car il faut autant d'équations qu'il y a d'indéterminées.

Si la première équation est retranchées de la seconde, et que la seconde le soit de la troisième, et ainsi de suite, on aura

$$\begin{aligned} B-A &= N(b-a)+P(b^2-a^2)+Q(b^3-a^3)+\text{etc.},\\ C-B &= N(c-b)+P(c^2-b^2)+Q(c^3-b^3)+\text{etc.},\\ D-C &= N(d-c)+P(d^2-c^2)+Q(d^3-c^3)+\text{etc},\\ &\text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc;} \end{aligned}$$

et en divisant, successivement, chacune de ces dernières équations respectivement par le multiplicateur de N dans chacune de ces équations, on obtiendra

$$\left.\begin{aligned} \frac{B-A}{b-a} &= N+P\frac{(b^2-a^2)}{b-a}+Q\frac{(b^3-a^3)}{b-a}+\text{etc.}\\ \frac{C-B}{c-b} &= N+P\frac{(c^2-b^2)}{c-b}+Q\frac{(c^3-b^3)}{c-b}+\text{etc.}\\ \frac{D-C}{d-c} &= N+P\frac{(d^2-c^2)}{d-c}+Q\frac{(d^3-c^3)}{d-c}+\text{etc.}\\ &\text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{aligned}\right\} (65)$$

Les termes qui se trouvent compris entre les parenthèses étant la différence de deux quantités élevées à une même puissance, sont donc de la forme $u^m-v^m$ ; or, nous savons, (recueil p.22, 3°), qu'une expression de ce genre, lorsque m est un nombre entier, est exactement divisible par $u-v$, et donne (recueil, 5e, p. 23):

$$\frac{u^m-v^m}{u-v}=u^{m-1}+vu^{m-2}+v^2u^{m-3}\ldots v^{n-2}u+v^{n-1}$$

d'où

$u^m-v^m=(u-v)[u^{m-1}+vu^{m-2}+v^2u^{m-3}\ldots v^{n-2}u+v^{n-1}]$ (66),

en comparant les quantités $(b^2-a^2)$,$(b^3-a^3)$...$(c^2-b^2)$, $(c^3-b^3)$, etc. à cette formule, nous pouvons les décomposer ainsi

$(b-a)$ $(b+a)$, $(b-a)$ $(b^2+ab+a^2)$, ... $(c-b)$ $(c+b)$, $(c-b)(c^2+cb+b^2)$, etc. ;

et en substituant ces valeurs dans les équations (65), nous obtiendrons

$$\frac{B-A}{b-a}=N+P\frac{(b-a)(b+a)}{b-a}+Q\frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{b-a}+\text{etc.}$$
$$\frac{C-B}{c-b}=N+P\frac{(c-b)(c+b)}{c-b}+Q\frac{(c-b)(c^2+cb+b^2)}{c-b}+\text{etc.}$$
$$\frac{D-C}{d-c}=N+P\frac{(d-c)(d+c)}{d-c}+Q\frac{(d-c)(d^2+dc+c^2)}{d-c}+\text{etc.}$$
etc. etc. etc.

ou en simplifiant

$$\left.\begin{array}{l}\frac{B-A}{b-a}=N+P(b+a)+Q(b^2+ab+a^2)+\text{etc},\\ \frac{C-B}{c-b}=N+P(c+b)+Q(c^2+cb+b^2)+\text{etc.}\\ \frac{D-C}{d-c}=N+P(d+c)+Q(d^2+dc+c^2)+\text{etc.}\\ \text{etc.} \qquad \text{ect,} \qquad \text{etc.}\end{array}\right\}(67).$$

Si maintenant, nous posons

$$\frac{B-A}{b-a}=B', \frac{C-B}{c-b}=C', \frac{D-C}{d-c}=D', \text{etc.},$$

B′, C′, D′, etc., se composant de valeurs données, seront encore des quantités connues ; et en les substituant dans les équations (67), nous aurons

$$\left.\begin{array}{l}B'=N+P(b+a)+Q(b^2+ab+a^2)+\text{etc.}\\ C'=N+P(c+b)+Q(c^2+cb+b^2)+\text{etc.}\\ D'=N+P(d+c)+Q(d^2+dc+c^2)+\text{etc.}\\ \text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}\end{array}\right\}(68);$$

d'après ce qui précède ces équations remplaceront les équations (64) dont le nombre sera diminué d'une unité ; et au lieu des inconnues M, N, P, Q, etc., elles ne renfermeront plus que N, P, Q, etc., c'est-à-dire que le nombre des indéterminées sera aussi diminué d'une unité. En continuant d'opérer comme ci-dessus, si nous prenons les différences C′—B′, D′—C′, etc., nous aurons,

$C'-B'=N-N+P(c+b-b-a)+Q(c^2+cb+b^2-b^2-ab-a^2)+\text{etc.},$

$D'-C'=N-N+P(d+c-c-b)+Q(d^2+dc+c^2-c^2-cb-b^2)+\text{etc.}$

etc. etc. etc.

ou, en simplifiant, et en divisant chaque équation, respectivement par le multiplicateur de P dans chacune de ces équations :

$$\frac{C'-B'}{c-a}=P\frac{c-a}{c-a}+Q\frac{(c^2+cb-ab-a^2)}{c-a}+\text{etc.}$$
$$\frac{D'-C'}{d-b}=P\frac{d-b}{d-b}+Q\frac{(d^2+dc-cb-b^2)}{d-b}+\text{etc.}$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

ou enfin

$$\left.\begin{aligned}\frac{C'-B'}{c-a}&=P+Q\frac{[c^2-a^2+b(c-a)]}{c-a}+\text{etc.}\\ \frac{D'-C'}{d-b}&=P+Q\frac{[d^2-b^2+c(d-b)]}{d-b}+\text{etc.}\\ \text{etc.} \qquad & \text{etc.} \qquad \text{etc.}\end{aligned}\right\}(69);$$

Mais $c^2-a^2=(c+a)(c-a)$, et $d^2-b^2=(d+b)(d-b)$, etc., donc substituant, les éq. (69) deviendront

$$\frac{C'-B'}{c-a}=P+Q\frac{[(c+a)(c-a)+b(c-a)]}{c-a}+\text{etc.}$$
$$\frac{D'-C'}{d-b}=P+Q\frac{[(d+b)(d-b)+c(d-b)]}{d-b}+\text{etc.}$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

ou, en posant $\frac{C'-B'}{c-a}=B''$, $\frac{D'-C'}{d-b}=C''$, etc., et en supprimant les facteurs communs aux termes de second membre, nous aurons

$$\left.\begin{aligned}B''&=P+Q(c+a+b)+\text{etc.}\\ C''&=P+Q(d+b+c)+\text{etc.}\\ \text{etc.} \qquad & \text{etc.} \qquad \text{etc.}\end{aligned}\right\}(70)$$

et l'on voit que les diviseurs $(c-a)$ et $(d-b)$ etc., ont disparu aussi des seconds membres de ces équations, débarrassées des inconnues ou indéterminées M et N ; donc nous aurons maintenant deux équations et deux indéterminées en moins que dans les éq. (64). En continuant d'opérer de la sorte, nous parviendrons à éliminer toutes les inconnues ou indéterminées moins une seule que nous savons calculer; et en remontant nous obtiendrons ensuite dans l'ordre inverse les valeurs de M, de N, de P, de Q,

etc., que nous substituerons dans l'équation (63), art. 40 ; équation qui est la même que l'éq. (62), art. 39 ; et nous aurons l'équation de la courbe qui nous servira pour l'interpolation, art. 39 et 40.

## Méthode d'interpolation de Lagrange.

42. — La méthode de Lagrange, comme celle de Newton, qui précède, repose sur le facteur commun, que nous avons supprimé.

Nous démontrerons la présente méthode de la manière suivante :

Soient p, q, r, s, etc., différentes abscisses auxquelles nous avons reconnu que correspondaient les ordonnées P, Q, R, S, etc; si maintenant, nous considérons les abscisses p, q, r, s, etc. comme des valeurs qui, mises à la place de x dans une certaine équation, amènent pour les ordonnées y, respectivement les valeurs P, Q, R, S, etc., cette équation devra avoir la forme générale suivante :

$$y = A\,P + B\,Q + C\,R + D\,S + \text{etc.} \quad (71),$$

car la condition exigée sera remplie, c'est à dire, que pour $x=p$, $x=q$, etc., on aura $y=P$, $y=Q$, etc, si en faisant

$x=p$, on a $A=1$, $B=0$, $C=0$, $D=0$, etc. (72),
$x=q$, on a $B=1$, $A=0$, $C=0$, $D=0$, etc. (73),
$x=r$, on a $C=1$, $A=0$, $B=0$, $D=0$, etc. (74),
etc. etc. etc.

Pour satisfaire aux équations (72), c'est-à-dire, $B=0$, $C=0$, $D=0$, etc., il faut que B, C, D, etc., soient des formes suivants :

$B=(x-p)\,Q'$, $C=(x-p)\,R'$, $D=(x-p)\,S'$, etc. (75), car puisque dans ce cas $x=p$, il vient $x-p=0$, et par suite $B=0 \times Q'=0$ ; de même pour C, D, etc.

De la même manière on prouverait que pour satisfaire aux équations (73), c'est-à-dire $A=0$, $C=0$, $D=0$, etc., le facteur $x-q$ doit appartenir à tous les coefficients A, C, D, etc., excepté celui B de Q ; et qu'il en sera de même des facteurs $x-r$, $x-s$, etc., à l'égard des coefficients de P, de Q, de S, et de ceux de P, de Q et de R., etc.

En nous bornant aux quatre premiers termes du second membre de l'équation (71), nous voyons que la valeur de y sera de la forme générale

$$\left.\begin{aligned} y = {} & \alpha\,(x-q)\,(x-r)\,(x-s)\ P \\ & +\beta\,(x-p)\,(x-r)\,(x-s)\ Q \\ & +\gamma\,(x-p)\,(x-q)\,(x-s)\ R \\ & +\varepsilon\,(x-p)\,(x-q)\,(x-r)\ S \end{aligned}\right\}\quad (76)$$

Or, pour que le coefficient de P se réduise à l'unité quand x=p, il faut que $\alpha$ soit de la forme $\frac{1}{(p-q)(p-r)(p-s)}$, car alors

$$y = \frac{1}{(p-q)(p-r)(p-s)}\,(p-q)(p-r)(p-s)\ P = 1.P = P.$$

On démontrerait de même qu'on doit avoir

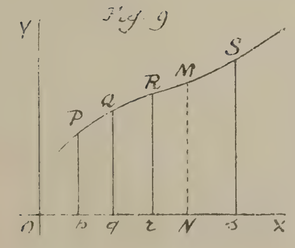
$$\beta = \frac{1}{(q-p)(q-r)(q-s)},\ \gamma = \frac{1}{(r-p)(r-q)(r-s)},\ \varepsilon = \frac{1}{(s-p)(s-q)(s-r)};$$

substituons donc les valeurs de $\alpha$, de $\beta$, de $\gamma$ et de $\varepsilon$ dans l'équation (76), nous obtiendrons donc la formule d'interpolation suivante :

$$\left.\begin{aligned} y = {} & \frac{1}{(p-q)(p-r)(p-s)}\,(x-q)\,(x-r)\,(x-s)\ P \text{ ou} \\ \text{ou } & \frac{(x-q)(x-r)(x-s)}{(p-q)(p-r)(p-s)}\,P + \frac{(x-p)(x-r)(x-s)}{(q-p)(q-r)(q-s)}\,Q \\ & + \frac{(x-p)(x-q)(x-s)}{(r-p)\,(r-q)\,(r-s)}\,R + \frac{(x-p)(x-q)(x-r)}{(s-p)\,(s-q)\,(s-r)}\,S \end{aligned}\right\}\quad (77)$$

Par conséquent, fig. 9, si à l'aide des coordonnées

$$\begin{aligned} x &= op = p, & y &= p\,P = P, \\ x &= oq = q, & y &= q\,Q = Q, \\ x &= or = r, & y &= r\,R = R, \\ x &= os = s, & y &= s\,S = S, \end{aligned}$$




nous construisons les points P, Q, R, S, par lesquels passe une courbe P Q R S, une valeur arbitraire ON donnée à l'abscisse x, étant mise dans l'équation (77), déterminera toujours, pour l'ordonnée correspondante y, une valeur M N.

Dans la démonstration précédente, les accroissements donnés à l'abscisse x peuvent être quelconques, mais dans le cas particulier où ils seraient égaux, en les représentant par $\Delta x$, la formule (27) de Newton, démontrée à l'art. 23, et dans laquelle nous ferions $\Delta x$ constant, pourrait nous servir à l'interpolation. Nous en avons déjà fait usage, art. 31, pour trouver le logarithme d'un nombre donné ; car nous y avons fait usage de la formule (35) qui n'est autre que la formule (28), celle-ci n'étant qu'une forme particulière de la formule (27) dite de Newton, art. 26, 24 et 23.

---

# CALCUL DES VARIATIONS

## Principes fondamentaux

1. Le calcul des variations a été conçu par Lagrange pour l'application du calcul infinitésimal à la résolution de certaines questions de maxima et de minima. Ces questions ont pour objet de trouver la forme analytique de fonctions telles que certaines quantités dépendant de ces fonctions elles-mêmes possèdent une valeur maxima ou minima. Ainsi, par exemple, si l'on donnait deux points fixes et une droite située dans le même plan, il s'agirait de trouver quelle est la courbe qui engendrerait une surface minima en tournant autour de la droite fixe tout en passant par les deux points.

Les problèmes se rapportant à la *Brachystochrone* et à la *Tautochrone* dépendent du calcul des variations.

On appelle *Brachystochrone* la courbe de plus vite descente, c'est-à-dire la courbe que doit suivre un point matériel pesant pour descendre d'un point à un autre dans le temps le plus court possible.

A l'aide du calcul des variations, on peut trouver très simplement cette courbe, laquelle est une cycloïde, (art. 120, calc. diff., 1^ere^ partie et plus loin), cycloïde dont la base est horizontale et dont l'origine se trouve au point le plus élevé. Si les deux points donnés, au lieu d'être fixes, sont simplement assujettis à rester sur deux courbes données la trajectoire est toujours une cycloïde et, en outre, cette dernière est perpendiculaire aux deux courbes données aux points de départ et d'arrivée.

On peut généraliser la question en la posant de la manière suivante :

« Trouver la courbe que doit suivre un point matériel soumis à des forces quelconques pour aller d'un point à un autre dans le temps le plus court possible ».

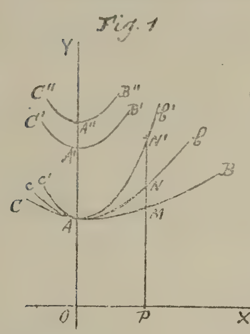
Dans le cas où la force donnée est dirigée vers un centre fixe et est proportionnelle à la distance, la courbe suivie par le mobile est une *épicycloïde* dont le cercle générateur roule, soit à l'intérieur, soit à l'extérieur du cercle fixe suivant que la force est attractive ou répulsive (voir épicycloïde plus loin).

On nomme *tautochrone* unc courbe telle que des points matériels pesants, (physique), glissant sur elle et partant de différents points, arrivent exactement ensemble à la partie inférieure. La seule courbe jouissant de cette propriété est la cycloïde. C'est pourquoi Huyghens avait proposé le pendule cycloïdal, dont les oscillations seraient rigoureusement isochrones, tandis que le pendule circulaire ne donne qu'un isochronisme approché.

La *cycloïde*, appelée aussi *roulette*, est la courbe que décrit un point d'une circonférence qui roule sur une ligne droite. Par exemple, le chemin suivi en l'air par un clou d'une roue quand elle roule de son mouvement ordinaire depuis que ce clou commence à s'élever de terre jusqu'à ce que le mouvement continu de la roue l'ait rapporté à terre, après un tour entier achevé. Nous supposons que la roue soit un cercle parfait, le clou un point de sa circonférence et la terre parfaitement plane.

*L'épicycloïde* est la courbe que décrit un point du plan d'un cercle qui roule sans gliser sur un autre cercle fixe. L'épicycloïde est dite *ordinaire, rallongée* ou *raccourcie* suivant que le point décrivant est situé sur la circonférence génératrice, au-dedans ou en dehors de cette circonférence. On dit également que cette ligne est *externe* ou *interne*, selon quc le cercle mobile roule à l'extérieur ou à l'intérieur du cercle fixe.

2. Lorsqu'un point M, appartenant à une ligne courbe ou à une surface courbe est transporté de M en N, l'ordonnée y = MP, qui détermine ce point M, reçoit un accroissement MN, lequel est appelé la *variation* de y.

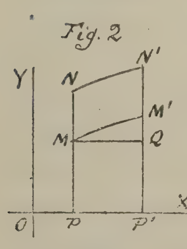



Par exemple, si la courbe AB, fig. 1, change d'inflexion, et devient Ab, la variation de l'ordonnée MP sera MN ; et l'abscisse oP appartiendra aussi bien à l'ordonnée primitive MP qu'à l'ordonnée NP ainsi augmentée de la variation MN.

Donc, si l'ordonnée MP, en se prolongeant, rencontre successivement les courbes Ab, Ab', etc., les parties interceptées MN, MN', etc., seront les variations dont cette ordonnée s'accroîtra successivement.

*Remarque 1.* — Une variation se distingue d'une différence, en ce que l'on change de courbe quand une ordonnée MP, fig. 2, reçoit une variation MN ; tandis que l'on reste sur la même courbe lorsque l'ordonnée MP devient M'P' en s'accroissant d'une différence M'Q, laquelle différence, (art. 2 du cal. des diff.) se change en différentielle lorsque cette différence devient infiniment petite.

*Remarque 2.* — Dans la suite de l'ouvrage, nous emploierons, comme précédemment, la notation dy pour exprimer la différence infinie ou la différentielle de MP ou y, fig. 2, et nous ferons usage de la caractéristique D pour exprimer la différence finie M'Q qui égale donc Dy, différence finie dont s'accroît une ordonnée y. Nous désignerons en outre, par $\Delta y$, la variation MN de y, et par $\delta y$ cette variation lorsqu'elle devient infiniment petite.




Donc dy et Dy représentent les différences de y, la première, la différence infiniment petite ou la différentielle ;

la seconde, la différence finie ou appréciable. Tandis que $\delta y$ et $\Delta y$ représentent les variations de y; la première, la variation infiniment petite, et la seconde, la variation finie ou appréciable.

3. — Comme nous venons de voir, une variation ayant lieu lorsqu'on passe d'une courbe à l'autre, cela peut se produire de différentes manières. — Par exemple, soit la parabole CAB, fig. 1, dont l'équation (recueil p. 136,) en remplacant x par y et vice versa et en divisant par S et faisant $-\frac{M}{S}=m$, est

$$y=mx^2+b \quad (1),$$

Le sommet étant en A, et b étant égal à oA; la courbe disposée comme dans la fig. 1. Si l'on fait varier la constante m, par exemple, si m devient m', la courbe se rétrécira ou s'élargira, suivant que m' sera plns grand ou plus petit que m.

En effet, si m' est plus grand que m pour une même abscisse oP, on aura

$$m'x^2+b>mx^2+b,$$

donc l'ordonnée y augmente et de MP devient NP, donc la courbe se rétrécira. On verrait évidemment de même que la courbe s'élargirait si m' était plus petit que m.

Maintenant, si la constante m ne variait pas, mais si la constante b variait, elle ne changerait que la position de la courbe en la transportant, fig. 1, de CAB en C'A'B' ou en C"A"B", etc. OA ou b devenant OA' ou b', ou OA" ou b", etc., la courbe se transportant parallèlement à elle-même.

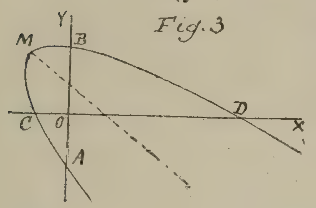
Concluons donc, qu'en général, c'est par la variation des constantes qu'une courbe change de position, est transportée dans l'espace, c'est pourquoi l'on affecte la caractéristique $\delta$ aux différentielles qui se rapportent à des points de l'espace, différentielles qui, comme on le voit, ne sont autres que des variations ; et l'on donne la caractéristique d aux différentielles qui se rapportent à des points pris sur une courbe ou sur une surface courbe et en général à tout système de points composant ou terminant un solide. (voir Remarque 2 de l'article 2).

4. — Dans l'éq. (1) la constante, m ou b, qui par sa variation entraîne celle de y est en évidence, mais il n'en

est pas toujours ainsi ; le plus souvent même cette constante ne paraît pas dans l'équation de la courbe.

Ainsi, par exemple, si l'on a l'équation

$$(y + ax - b)^2 = c^2 x + 2b^2 \ (2)$$




laquelle représente une parabole (fig. 3), car extrayant la racine carrée des deux membres et transposant, on obtient successivement

$$y+ax-b=\pm\sqrt{c^2x+2b^2}$$

d'où $$y=b-ax\pm\sqrt{c^2x+2b^2} \ (3).$$

En faisant $x=o$, on obtient

$$y=b\pm\sqrt{2b^2}=b\pm b\sqrt{2}=b(1\pm\sqrt{2}),$$

ce qui détermine les points B et A.

Si l'on fait $y=o$, on obtient en transposant $b-ax$ et élevant au carré les deux membres

$(ax-b)^2=c^2x+2b^2$, ou $a^2x^2-2abx+b^2=c^2x+2b^2$,

d'où en divisant par $a^2$ et transposant

$$x^2-\left(\frac{2b}{a}+\frac{c^2}{a^2}\right)x-b^2=o,$$

d'où, (recueil, p. 34, 3°)

$$x=\frac{b}{a}+\frac{c^2}{2a^2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{a}+\frac{c^2}{2a^2}\right)^2+b^2},$$

ce qui détermine les deux points D et C.

L'on voit, en outre, que la courbe est limitée vers les x négatifs, car en faisant $x=-x$ dans l'éq. (3), on voit que y deviendrait imaginaire lorsque $c^2x$ surpasserait $2b^2$. Lorsque $c^2x$ égale $2b^2$ ou $x=\frac{2b^2}{c^2}$, on a le radical égal à zéro et il n'y a qu'une seule valeur pour x et pour y; cela correspond au point M, où la courbe se ferme.

Donc la courbe est située comme l'indique la figure. Enfin, c'est bien une parabole, car l'éq. (2) donne en développant le carré

$$y^2+2axy+a^2x^2-2by-2abx+b^2=c^2x+2b^2$$

et l'on voit que le carré du coefficient 2a de xy est égal à quatre fois le produit des coefficients de $x^2$ et de $y^2$, soit

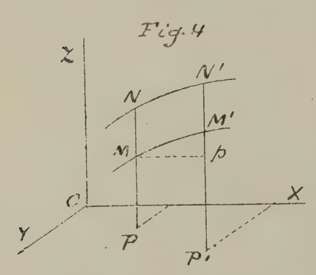
$(2a)^2 = 4(a^2 \times 1) = 4a^2$, ce qui est caractéristique de la parabole, (voir recueil p. 128 et 129, où $B^2 - 4AC = 0$ donne $B^2 = 4AC$, voir l'éq. (A)).

Le paramètre de la parabole, dans le cas présent, sera composé, comme on peut le voir, des constantes a, b, c ; c'est-à-dire que ce sera une fonction de ces constantes ; or, une parabole diffère d'une autre par le paramètre ; donc la parabole variera avec la fonction des valeurs a, b, c. Par conséquent, dans la parabole, la constante qui varie n'est pas toujours une de celles contenues dans son équation, mais elle peut être une fonction de ces constantes.

On peut du reste se dispenser de connaître cette constante qui varie, il suffit de déterminer les coordonnées sur lesquelles elle exerce son influence, ce que nous examinerons bientôt.

5. — *La variation Δ de la différence D d'une fonction V, par exemple, est égale à la différence D de la variation Δ de cette fonction V* ; c'est-à-dire, qu'on a

$$\Delta DV = D\Delta V. \quad (4).$$




Soit V une fonction des variables x et y et de leurs coefficients différentiels,

$$V = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\right)$$

L'ordonnée z d'un point de la courbe MN, est évidemment une fonction des deux autres coordonnées x et y ; nous pouvons donc regarder V comme l'ordonnée MP=z (fig, 4). (voir recueil p. 185 et 186).

Passons maintenant de l'ordonnée MP=z=V à une autre ordonnée M'P' ; la différence M'p de ces ordonnées sera généralement, une quantité finie, que art. 2, remarque 2, nous représenterons par DV et nous aurons ainsi

$$M'P' = MP + M'p$$

ou

$$z' = z + h$$

ou

$$V' = V + DV.$$

Nous avons admis que la différence était positive dans la courbe, pour plus de facilité, mais il est évident que cette différence serait négative si l'ordonnée M'P' au lieu d'être plus grande était moindre que MP. On arriverait au même résultat.

Supposons maintenant que, par la variation de la courbe MM', les ordonnées MP et M'P' deviennent NP et N'P'; en nous servant, (art. 2, remarque 2), du signe $\Delta$ pour indiquer l'accroissement dû à la variation, et que, par suite, nous représentions par $\Delta V$ et $\Delta V'$ les variations NM et N'M' nous aurons $NP = V + \Delta V$, $N'P' = V' + \Delta V'$ (5).
mais, comme ci-desus, $V' = V + DV$, en substituant, il viendra $N'P' = V + DV + \Delta(V + DV)$ (6).

D'un autre côté, nous pouvons considérer NP et N'P' comme les ordonnées d'une certaine courbe NN' qui passerait par les points N et N'; et de même que dans la courbe MM', y devient $y + Dy$ lorsqu'on passe de MP à M'P', de même NP ou $V + \Delta V$ deviendra

$$NP + D(NP) \text{ ou } V + \Delta V + D(V + \Delta V)$$

quand on passera de NP à N'P' dans la courbe NN'. On aura donc ici: $N'P' = V + \Delta V + D(V + \Delta V)$ (7).

En comparant ces deux valeurs (6) et (7) de N'P', nous trouverons $V + DV + \Delta(V + DV) = V + \Delta V + D(V + \Delta V)$
ou $V + DV + \Delta V + \Delta DV = V + \Delta V + DV + D\Delta V$
ou, en réduisant : $\Delta DV = D\Delta V$,
ce qui est la formule (4) qu'il fallait démontrer.

Remarque I. — Si au lieu de $V = f(x, y)$ ou $z = f(x, y)$, nous avions seulement $y = f(x)$, la courbe MM' deviendrait une courbe plane, (géom. analyt. recueil p. 124 et 184 à 186) (2 coordonnées fig. plane, donc 2 axes; et 3 coord. fig. dans l'espace, donc 3 axes).

On considérerait alors l'ordonnée MP comme une fonction y de x. La démonstration est la même et l'on obtient successivement :

$$M'P' = y' = MP + M'p = y + Dy$$
$$NP = y + \Delta y$$
$$N'P' = y' + \Delta y'$$

mais, ci-dessus, $y' = y + Dy$

en substituant, il vient

$$N'P' = y + Dy + \Delta(y + Dy). \quad (8)$$

D'un autre côté NP et N'P' sont les ordonnées d'une certaine courbe NN'. Et de même que dans la courbe MM', y devient $y + Dy$ lorsqu'on passe de MP à M'P', de même NP ou $y + \Delta y$ deviendra

$$NP + D(NP) \text{ ou } y + \Delta y + D(y + \Delta y)$$

quand on passera de NP à N'P' dans la courbe NN'. On aura donc aussi

$$N'P' = y + \Delta y + D(y + \Delta y) \quad (9)$$

En comparant les deux valeurs de N'P', éq. (8) et (9), nous trouverons

$$y + Dy + \Delta(y + Dy) = y + \Delta y + D(y + \Delta y)$$

ou, en développant

$$y + Dy + \Delta y + \Delta Dy = y + \Delta y + Dy + D\Delta y,$$

et, en réduisant, on trouvera

$$\Delta Dy = D\Delta y. \quad (10).$$

Remarque 2.—Dans la démonstration qui précède, nous avons regardé la variation $\Delta V$ et la différence $DV$ comme des quantités finies ; mais les équations (4) et (10) ne subsistent pas moins si $\Delta V$ et $DV$ sont des quantités infiniment petites. Mettant donc pour ce cas, (art. 2, remarque 2), les caractéristiques $d$ et $\delta$, les équations (4) et (10) deviendront

$$\delta dV = d\delta V \quad (11)$$

$$\delta\, dy = d\delta y. \quad (12).$$

Et l'on peut donc dire, aussi que :

*La variation de la différentielle d'une fonction V ou y est égale à la différentielle de la variation de cette fonction V ou y.*

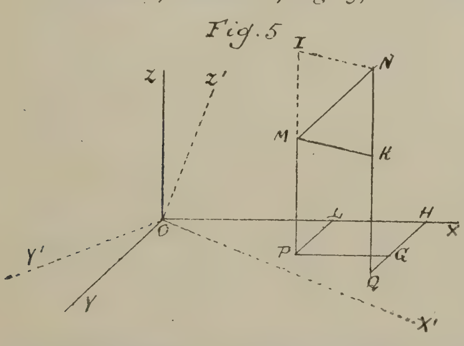
6.— Comme nous avons pu le voir, dans ce qui précède, nous n'avons attribué des variations qu'à y, nous accordant ainsi avec cette observation de Lagrange : *Dans les différentiations par $\delta$ ou par variation, il faut considérer comme constante la variable dont la différentielle a été prise pour constante.* — Par exemple, dans l'hypothèse la plus fréquente où cette différentielle est dx, il en résulte que x doit être considéré comme constante lorsqu'on prend les variations. En effet, nous avons vu qu'à la même

abscisse OP, fig. 1, art. 2, répondaient diverses valeurs PM, PN, PN′, etc., de l'ordonnée.

Mais ce n'est là qu'un cas particulier, celui où les variations sont supposées perpendiculaires au plan des x, y. Or, la position des plans coordonnés peut déterminer x à recevoir des variations aussi bien que y. Lagrange, lui-même, donna, sans en expliquer la raison, des variations aussi bien à x qu'à y. Il faut donc savoir de quelle manière la position des plans coordonnés déterminent x à recevoir des variations aussi bien que y. On voit d'abord que la cause qui produit ces variations ne dépend pas de notre volonté, et qu'il en est de même de la fixation des plans coordonnés, laquelle peut être soumise à certaines conditions du problème, et même avoir été fixée avant que les points de la courbe aient changé de place.

Donc, puisqu'entre toutes les positions différentes que peut prendre la direction de la variation qui affecte un point M, il n'y en a qu'une (cas particulier) où elle soit perpendiculaire au plan des x, y, pour plus de *généralité*, nous devrons considérer cette variation comme inclinée à ce plan des x, y. Dans cette hypothèse, nous allons démontrer que non seulement y, en variant, entraîne la variation de x, mais, qu'en outre, leurs variations dépendent encore l'une de l'autre.

A cet effet, soit MN, fig. 5, la variation que reçoit un point M d'une courbe et supposons qu'un plan Y′OX′ passant par l'origine O des coordonnées soit perpendiculaire à la direction de MN; ce plan étant différent de celui déterminé par YOX, la direction MN sera donc inclinée à ce dernier plan.



Donc, lorsque le point M sera transporté en N, les coordonnées OL, LP et PM ou x, y, z, par rapport aux plans coordonnés OX, OY et OZ, deviendront OH, HQ et QN et s'accroîtront des différences LH, QG et NK ; ce qui démontre que lorsqu'une ordonnée MP=z=V, par exemple, subit une variation, il en est de même des autres coordonnées PL=y et OL=x.

En outre, les variations de ces coordonnées dépendent l'une de l'autre.

En effet, soit toujours, comme ci-dessus, MN la variation reçue par le point M perpendiculairement au plan Y'OX'; menons par ce point M la perpendiculaire MP au plan YOX et prolongeons jusqu'en I l'ordonnée PM ; il en résultera que l'angle IMN formé par les deux perpendiculaires MI et MN aux plans YOX et Y'OX' mesurera l'inclinaison de ces plans (géométrée élém.) ; et que lorsque l'angle IMN sera nul, ces plans se confondront.

Cela étant, menons les perpendiculaires MK et NI sur la direction des ordonnées MP et NQ, le triangle MIN sera rectangle en I, et puisque l'angle IMN, qui mesure l'inclinaison des plans, est déterminé, il suffira que nous connaissions, dans le triangle MIN, le côté IM pour que le côté IN=MK en résulte.

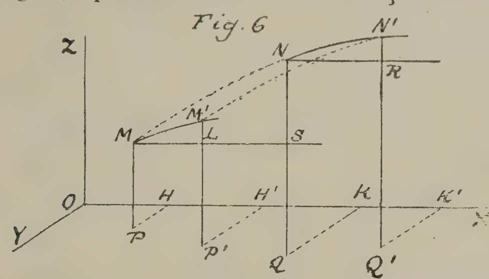
Or, IM=NK=NQ—KQ=NQ—MP=$\Delta$z=$\Delta$V et IN=PQ, et comme PQ détermine la différence PG=LH=OH—OL=$\Delta$x, on voit donc que $\Delta$x dépend immédiatement de $\Delta$V, et qu'il en est de même de $\Delta$y à l'égard de $\Delta$x.

*Remarque.* — Lorsqu'on passe des différences aux différentielles, on arrive des variations finies $\Delta$x, $\Delta$y, $\Delta$z ou $\Delta$V, aux variations infiniment petites $\delta$x, $\delta$y, $\delta$z ou $\delta$V, donc la même dépendance a lieu entre $\delta$x, $\delta$y et $\delta$z ou $\delta$V. Ceci est bien différent de ce que l'on observe dans le calcul différentiel, où, lorsque V est déterminé à l'aide des coordonées x et y, (ces coordonnées pouvant varier chacune séparément), il n'y a en général aucune dépendance entre dx et dy.

7. — Dans le théorème démontré à l'art. 5 et Remarque 1 de cet article, les variations étaient, avons-nous vu, perpendiculaires au plan des x, y. Nous allons maintenant

examiner le cas général. où les variations ont des directions inclinées à ce plan, et où, par suite, le point M, fig. 6, pour arriver en N, ne suit pas la direction du prolongement de l'ordonnée PM, comme le supposait le cas particulier des démonstrations données à l'art. 5, remarques.

Dans le cas général que nous considérons, le point M, fig. 6, après la variation aura reçu un accroissement d'ordonnée qui sera exprimé par la différence NQ—MP, nous aurons donc variation de MP ou ΔzouΔV= NQ-MP.(13).




D'autre part, l'ordonnée MP de la courbe primitive, lorsqu'elle devriendra M'P' s'accroîtra d'une *différence*, art. 2, remarque 2, que nous représenterons par

DV=M'P'—MP. (14).

De cette équation, on peut déduire

variation de DV ou ΔDV=variation de M'P'-variation de MP

ou ΔDV=ΔM'P'—ΔMP. (15).

Le but du théorême est de démontrer, dans le cas général présent, que la quantité précédente ou ΔDV est égale à DΔV, art.5. A cet effet, l'équation (15) nous montre qu'il s'agit d'abord de déterminer la variation de M'P'. Or cette variation, après qu'elle a transporté M' en N' est égale à la différence des ordonnées de ces deux points. Donc, on a, comme à la formule (13) : variation de M'P' ou ΔM'P'= N'Q'—M'P' (16).

En remplaçant, dans l'équation (15), les valeurs données par les équations (13) et (16), nous aurons

ΔDV=N'Q'—M'P'—(NQ—MP),

ou ΔDV=N'Q'—M'P'—NQ+MP (17).

D'autre part, nous avons, remarque 2, art. 2 :

différence de NQ ou D.NQ=N'Q'—NQ, (18)

mais de l'éq. (13), on tire

$$QN = \Delta V + MP = \Delta V + V$$

et en substituant cette valeur dans l'éq. (18), on trouve

$$D.NQ \text{ ou } D(\Delta V + V) = N'Q' - NQ.$$

Retranchant de cette équation, l'éq. (14), on aura

$$D(\Delta V + V) - DV = N'Q' - NQ - (M'P' - MP)$$

ou $$D\Delta V + DV - DV = N'Q' - NQ - M'P' + MP$$

ou $$D\Delta V = N'Q' - NQ - M'P' + MP. \quad (19)$$

Les seconds membres des équations (17) et (19) étant égaux, les premiers le sont aussi, et l'on a

$$\Delta DV = D\Delta V. \quad (20).$$ C. Q. F. D.

En passant aux limites ou aux infiniment petits, remarque 2, art. 5, il viendra

$$\delta dV = d\delta V, \quad (21),$$

équation qui nous donne encore celles-ci ;

$$\delta dy = d\delta y \text{ et } \delta dx = d\delta x. \quad (22).$$

Ces équations (20), (21) et (22), ont un degré de généralité que nous ne donnions pas aux équations (4),(10),(11) et (12), car les premières supposent que les variables x et y, renfermées dans z ou V, sont des quantités dont on peut prendre la variarion. (art. 6).

8.— Les formules qui ne contiennent que des variations ne diffèrent pas des différentielles. Lagrange disait :

*Le calcul des variations a pour but de différentier sous un nouveau point de vue des quantités qui ont été différentiées sous un autre.*

En effet, déterminer la variation d'une fonction V de y, cela se ramène à trouver l'accroissement de cette fonction lorsque y s'augmente de la quantité infiniment petite $\delta y$ ; ce qui se réduit en quelque sorte à différentier, (voir calc. diff. art. 3, p. 8).

Il est donc évident qu'on doit arriver aux mêmes règles que celles que l'on emploie pour obtenir des différentielles ordinaires.

Aussi les formules (21)et(22) vont-elles maintenant nous servir à modifier convenablement les formules qui contiennent des différentielles et des variations.

9. — Afin de prouver que la règle à suivre pour trouver la variation d'une fonction V, par exemple, est la même que celle qui déterminerait la différentielle de cette fonction V. soit

$$V = a + by^2$$

Et soit V' ce que devient V quand y s'accroît de la quantité infiniment petite $\delta y$, nous aurons

$$V' = a + b(y + \delta y)^2$$

d'où $V' - V$ ou $\delta^2 V = a + b(y^2 + 2y\delta y + \delta y^2) - a - by^2 =$

$$a + by^2 + 2by\delta y + b\delta y^2 - a - by^2 =$$

$$2by\delta y + b\delta y^2,$$

passant à la limite, ou ce qui revient au même, effaçant le terme $b\delta y^2$, qui, étant un infiniment petit du second ordre, doit disparaître à côté du terme $2by\delta y$, (art. 134 et 136, p. 161 et 162 du Calc. diff., 1re partie), il viendra pour la variation

$$\delta V = 2by\delta y,$$

ce qui revient à la différentielle qui eut été

$$dV = 2\,by\,dy.$$

Il suffit de changer d en $\delta$. (Remarque 2, art. 2, ci-avant). Donc, en général, pour obtenir la variation d'une fonction V, dont la différentielle totale (remarque II, p. 57, 1ere partie), en faisant $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}$, etc. ou $\frac{dV}{dx}, \frac{dV}{dy}$, etc. $=$ M, N, etc., est représentée, en général, par

$$dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.}, \quad (23),$$

il suffira de changer la caractéristique d en $\delta$, et nous aurons $\delta V = M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.}$ (24).

Nous pouvons même remplacer M, N, P, Q, R, etc., par les coefficients différentiels que ces lettres représentent, et nous aurons

$$\delta V = \frac{dV}{dx}\delta x + \frac{dV}{dy}\delta y + \frac{dV}{dp}\delta p + \frac{dV}{dq}\delta q + \frac{dV}{dr}\delta r + \text{etc.} \quad (25).$$

*Remarque.* — Nous n'avons pas changé dx en $\delta x$, dy en $\delta y$, etc., dans les coefficients différentiels, car les coefficients différentiels $\frac{dV}{dx} = M$, $\frac{dV}{dy} = N$, etc., représentent respectivement les coefficients différentiels de la fonction V par rapport à x, à y, etc, c'est-à-dire que M, N, etc., sont simplement des fonctions de x, de y, de p, etc., fonctions

dans lesquelles les caractéritiques dx, dy, etc., n'entrent pas.

10. Nous avons vu, précédemment, que les variations sont des différentielles d'un genre particulier. Mais il ne faut pas en conclure que $\delta x$ soit à l'égard de $\delta y$ ce que dx est à l'égard de dy.

En effet, on choisit ordinairement dx pour variable indépendante, et l'on ne peut en faire autant avec $\delta x$, car nous avons vu, art. 6, remarque, que $\delta x$ dépendait de $\delta y$. Aussi la variable indépendante qui détermine l'accroissement de y n'est pas x, mais la constante, qui devient variable lorsque les points de la courbe changent de position (art. 3). L'hypothèse de différentiation est donc différente. Ainsi, par exemple, soit l'équation

$$b^3 y = a^2 x^2 \text{ d'où } y = \frac{a^2 x^2}{b^3} = \frac{a^2}{b^3} x^2$$

et en supposant d'abord x constant et a variable, cherchons le coefficient différentiel par variation (art. 3) de y par rapport à a, nous trouverons d'abord en désignant par h l'accroissement de a :

$$y' = \frac{(a+h)^2}{b^3} x^2 \text{ d'où } y' - y = \frac{(a+h)^2}{b^3} x^2 - \frac{a^2}{b^3} x^2$$

et

$$\frac{y'-y}{\text{accroissementde a}} = \left[\frac{\left(\frac{(a+h)^2}{b^3} - \frac{a^2}{b^3}\right)}{h}\right] x^2 = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{hb^3} x^2 = \frac{2a+h}{b^3} x^2 .$$

Si, au contraire, considérant a comme constant, nous faisons varier seulement x, nous aurons pour coefficient différentiel ordinaire :

$$y' = \frac{a^2}{b^3}(x+h)^2 = \frac{a^2}{b^3}(x^2 + 2xh + h^2) = \frac{a^2}{b^3} x^2 + \frac{a^2}{b^3} 2xh + \frac{a^2}{b^3} h^2$$

et

$$\frac{y'-y}{\text{accroissement de x}} = \frac{\frac{a^2}{b^3} x^2 + \frac{a^2}{b^3} 2xh + \frac{a^2}{b^3} h^2 - \frac{a^2}{b^3} x^2}{h} = \frac{2a^2}{b^3} x + \frac{a^2}{b^3} h.$$

La première hypothèse appartient à la courbe variée, et la seconde à la courbe primitive (fin art. 3). En passant à la limite où $h=o$, on voit qu'on obtient

1re hypothèse $\frac{\delta y}{\delta a}=\frac{2a+o}{b^3}x^2=\frac{2ax^2}{b^3}$

et 2e hypothèse $\frac{dy}{dx}=\frac{2a^2 x}{b^3}+o=\frac{2a^2 x}{b^3}$;

ce qui nous montre évidemment que la variable indépendante, dans le cas de variation que nous considérons, loin d'être $\delta x$ est $\delta a$. Cependant, lorsque nous déterminons la variation d'une fonction V de y, nous n'examinons pas si y varie par l'accroissement de x ou par celui d'une constante; donc le procédé qui détermine la variation est le même que celui qui sert à différentier.

11. — D'après ce qui précède, il ne faut pas cependant, parce que $\delta x$, $\delta y$, $\delta p$, etc.. entrent dans $\delta V$, comme dx, dy, etc. entrent dans dV, en conclure que $\delta V$ est égal à dV ; car ce qui établit une différence entre ces deux expressions, c'est qu'on ne peut assimiler les variations $\delta x$, $\delta y$, $\delta p$, etc., dont se compose la première, aux différentielles dx, dy, dp, etc., qui constituent la seconde. En effet, $\delta x$, $\delta y$, $\delta p$, etc., d'après ce que nous avons vu, comportant une autre variable indépendante, que celle qui a lieu pour les différentielles dx, dy, dp, etc., il en résulte qu'on doit être amené, par des hypothèses différentes de différentiation, à des résultats différents. Aussi, lorsqu'une formule contient à la fois des différentielles et des variations, nous ne devons point confondre ces deux sortes de quantités ; dans le cas où une semblabe formule a lieu, le théorème de l'art. 5 devient applicable, et nous allons voir qu'il est suffisant pour établir une différence entre les résultats amenés par le calcul des variations et ceux qui nous sont fournis par le calcul différentiel.

Soit, par exemple, à chercher la variation de la formule

$$p=\frac{dy}{dx}.$$

A cet effet, déterminons la variation (art. 9) par la règle des fractions, donnée art. 11, 1[re] partie, et nous obtiendrons

$$\delta p = \delta \frac{dy}{dx} = \frac{dx\delta dy - dy\delta dx}{dx^2} = \frac{\delta dy}{dx} - \frac{dy}{dx^2}\delta dx = \frac{\delta dy}{dx} - \frac{dy}{dx}\frac{\delta dx}{dx} =$$

$$\frac{\delta dy}{dx} - p\frac{\delta dx}{dx} = \frac{\delta dy}{dx} - \frac{p\delta dx}{dx}.$$

En transposant les signes, comme le permettent les équation (22), art. 7, nous aurons pour la variation de p:

$$\delta p = \frac{d\delta y}{dx} - p\frac{d\delta x}{dx}. \quad (26).$$

Si nous cherchons ensuite la variation des formules

$$q = \frac{dp}{dx}, \quad r = \frac{dq}{dx},$$

nous trouverions de même

$$\delta q = \frac{dx\delta dp - dp\delta dx}{dx^2}, \quad \delta r = \frac{dx\delta dq - dq\delta dx}{dx^2};$$

effectuant la division et remplaçant $\frac{dp}{dx}$ et $\frac{dq}{dx}$ par q et par r, nous obtiendrons

$$\delta q = \frac{\delta dp}{dx} - \frac{dp}{dx}\frac{\delta dx}{dx} = \frac{\delta dp}{dx} - \frac{q\delta dx}{dx},$$

$$\delta r = \frac{\delta dq}{dx} - \frac{dq}{dx}\frac{\delta dx}{dx} = \frac{\delta dq}{dx} - \frac{r\delta dx}{dx},$$

et en transposant les caractéristiques d et $\delta$, en vertu de l'éq. (22), art. 7, il viendra

$$\delta q = \frac{d\delta p}{dx} - \frac{qd\delta x}{dx} \text{ et } \delta r = \frac{d\delta q}{dx} - \frac{rd\delta x}{dx}. \quad (27).$$

Remarquons que la formule (24) ne ressemble à la formule (23), art. 9, dont elle a été déduite, que parcequ'on n'a pas mis en évidence les différentielles renfermées implicitement dans les fonctions p, q, r, etc.; mais si nous remplaçons $\delta p$, $\delta q$ et $\delta r$ par les valeurs que fournissent les équations (26) et (27), et que nous rassemblions d'une part les termes positifs et de l'autre les termes négatifs, nous trouverons, au lieu de l'éq. (24) :

$$\delta V = M\delta x + N\delta y + P\left(\frac{d\delta y}{dx} - \frac{pd\delta x}{dx}\right) + Q\left(\frac{d\delta p}{dx} - \frac{qd\delta x}{dx}\right) +$$

$R\left(\frac{d\delta q}{dx} - r\frac{d\delta x}{dx}\right) + \text{etc.} = M\delta x + N\delta y + \frac{P}{dx}d\delta y - \frac{P}{dx}pd\delta x +$
$\frac{Q}{dx}d\delta p - \frac{Q}{dx}qd\delta x + \frac{R}{dx}d\delta q - \frac{R}{dx}rd\delta x + \text{etc.} = M\delta x + N\delta y +$
$\frac{P}{dx}d\delta y + \frac{Q}{dx}d\delta p + \frac{R}{dx}d.\delta q + \text{etc.} - Pp\frac{d\delta x}{dx} - Qq\frac{d\delta x}{dx} -$
$Rr\frac{d\delta x}{dx} - \text{etc.} = M\delta x + N\delta y + \frac{1}{dx}(Pd\delta y + Qd\delta p + Rd\delta q +$
$\text{etc.}) - \frac{d\delta x}{dx}(Pp + Qq + Rr + \text{etc.}) \quad (28).$

Lorsque y seul reçoit des variations, cette équation, en supprimant les termes renfermant les variations de x, se réduit à

$$\delta V = N\delta y + P\frac{d\delta y}{dx} + Q\frac{d\delta p}{dx} + R\frac{d\delta q}{dx} + \text{etc.} \quad (29);$$

et comme en transposant les caractéristiques (éq. (22) art. 7), on a

$\frac{d\delta p}{dx} = \frac{\delta dp}{dx} = \left(\text{comme } p = \frac{dy}{dx}\right) = \delta.\left(d.\frac{dy}{dx} : dx\right) = \frac{\delta d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 \delta y}{dx^2},$
$\frac{d\delta q}{dx} = \frac{\delta dq}{dx} = \delta\left(d.\frac{dp}{dx} : dx\right) = \delta\,(d.dp : dx^2) = \delta\left(d\frac{ddy}{dx} : dx^2\right) =$
$\delta\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d^3 \delta y}{dx^3};$

etc.

en substituant ces valeurs dans l'éq. (28), il viendra

$$\delta V = N\delta y + P\frac{d\delta y}{dx} + Q\frac{d^2\delta y}{dx^2} + R\frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.} \quad (30).$$

12.— Proposons-nous maintenant, comme application, de rechercher la variation de la sous-tangente.

A cet effet, nous nous servirons de la formule (26).

Si, dans l'expression de la sous-tangente, (1re partie, art. 47, p. 60) qui est $PT = \frac{y'dx'}{dy'}$, ou en général, $PT = y\frac{dx}{dy}$, nous éliminons le coefficient différentiel au moyen de l'équation $p = \frac{dy}{dx}$, art. 11, nous aurons

$$PT = y\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = y\frac{1}{p} = \frac{y}{p}.$$

Prenant en suite la variation par la règle des fractions, (art. 11, p. 16, 1re partie) et (art. 9, 2e partie cal. des var.) nous aurons

$$\delta PT \text{ ou } \delta \text{ sous tangante} = \frac{p\delta y - y\delta p}{p^2} = \frac{\delta y}{p} - \frac{y\delta p}{p^2};$$

substituant dans cette équation, la valeur de $\delta p$ donnée par l'éq. (26), nous obtiendrons

$$\delta \text{ sous-tangente} = \frac{\delta y}{p} - \frac{y}{p^2}\delta p = \frac{\delta y}{p} - \frac{y}{p^2}\left(\frac{d\delta y}{dx} - \frac{pd\delta x}{dx}\right) =$$
$$\frac{\delta y}{p} - \frac{yd\delta y}{p^2 dx} + \frac{ypd\delta x}{p^2 dx} = \frac{\delta y}{p} - \frac{yd\delta y}{p^2 dx} + \frac{yd\delta x}{pdx}$$

remplaçant p par sa valeur $\frac{dy}{dx}$, art. 11, nous aurens enfin

$$\delta \text{sous-tangente} = \frac{\delta y}{\frac{dy}{dx}} - \frac{yd\delta y}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx} + \frac{yd\delta x}{\frac{dy}{dx}dx} = \delta y\frac{dx}{dy} - \frac{yd\delta y}{\frac{dy^2}{dx^2}dx} +$$
$$\frac{yd\delta x}{dy} = \frac{dx}{dy}\delta y - \frac{y}{\frac{dy^2}{dx}}d\delta y + \frac{y}{dy}d\delta x = \frac{dx}{dy}\delta y - \frac{ydx}{dy^2}d\delta y + \frac{y}{dy}d\delta x.$$

13.— Nous pouvons trouver encore des corollaires très-remarquables dans le théorème renfermé dans l'équation (21), art 7, qui, jusqu'à présent, nous a servi à établir une différence entre les résultats fournis par la différentation et ceux qui sont donnés par le calcul des variations.

1° En effet, si dans cette équation (21), nous changeons V en dV, nous aurons

$$\delta d.\, dV \text{ ou } \delta d^2 V = d\delta dV,$$

transposant la caractéristique du second membre, nous obtiendrons $\delta d^2 V = dd\delta V = d^2 \delta V$.

Par des procédés analogues, nous obtiendrons cette formule générale $\delta d^n V = d^n \delta V$. (31).

2e L'intégrale de la variation d'une fonction est égale à la variation de l'intégrale de cette fontion ou $\int \delta U = \delta \int U$. En effet sinous représentons par U, par exemple, une certaine foncticns de x, de y, de dx, de $d^2x$, etc., de dy, do $d^2y$, etc., et que nous désignions par V l'intégrale de cette fontion, nous trouverons

$$\int U = V.. \quad (32).$$

Différentiant, nous aurons

$$d\int U \text{ ou } U = dV,$$

et, par suite $\delta U = \delta dV$,

transposant la caractéristique du second membre, (éq. 21, art. 7), nous aurons $\delta U = d\delta V$ ;

intégrant (art. 9 ci-dessus), il viendra

$$\int \delta U = \delta V.$$

Remplaçant V par sa valeur donnée par l'éq. (32), nous obtiendrons enfin

$$\int \delta U = \delta \int U. \quad (33). \quad \text{C. Q. F. D.}$$

3°. — Du théorème précédent, on peut déduire celui ci-après, qui est analogue au premier pour les intégrales doubles. Soit $U = \int \lambda$ ;

d'après l'éq. (33), nous aurons

$$\int \delta U \text{ ou } \int \delta \int \lambda = \delta \int U = \delta \int \int \lambda \, ;$$

et, en transposant les signes $\int$ et $\delta$ du premier membre, (art. 7 et 2° ci-dessus), il viendra

$$\int \int \delta \lambda = \delta \int \int \lambda.$$

On trouverait de même

$$\int \int \int \delta \lambda = \delta \int \int \int \lambda \, ;$$

et ainsi de suite.

14. — Nous pouvons maintenant chercher *quelle est la variation de la formule intégrale indéfinie* $\int U$, *dans laquelle U est une fonction de x, de y et des différentielles* $dx$, $d^2x$, $d^3x$, *etc.*, $dy$, $d^2y$, $d^3y$, *etc.*

A cet effet, supposons que par le calcul différentiel on ait trouvé

$$dU = m dx + n d^2x + p d^3x + \text{etc.}$$
$$+ M dy + N d^2y + P d^3y + \text{etc.}$$

Nous pouvons considérer cette équation comme provenant d'une équation d'un ordre immédiatement inférieur dont nous voudrions prendre la variation. Or, la dernière différentiation qui nous a fourni la valeur de d u, nous ayant donné la valenr ci-dessus, et notre intention étant de faire rapporter cette dernière opération à une variation, nous mettrons cette valeur sous la forme

$$dU = m dx + n d.dx + p d.d^2x + \text{etc.}$$
$$+ M dy + N d.dy + P d.d^2y + \text{etc.},$$

en séparant par un point sur la droite la caractéristique qui y est relative dans les termes qui, autres que mdx et Mdy, ont subi plusieurs différentiations, et alors, comme nous l'avons fait, art. 9, pour l'équation (23), changeant cette caractéristique en $\delta$, nous trouverons

$$\left.\begin{aligned}\delta U = m\delta x + n\delta dx + p\delta d^2 x + \text{etc.}\\ + M\delta y + N\delta dy + P\delta d^2 y + \text{etc.}\end{aligned}\right\} (34) ;$$

intégrant et mettant ensuite, dans le premier membre de cette équation, la caractéristique $\delta$ devant le signe d'intégration $\int$, en vertu de l'art. 13, 2°, éq.(33), nous aurons successivement

$$\int\delta U = \int m\delta x + \int n\delta dx + \int p\delta d^2 x + \int q\delta d^3 x + \text{etc.}$$
$$+ \int M\delta y + \int N\delta dy + \int P\delta d^2 y + \int Q\delta d^3 y + \text{etc.}$$

puis, éq. (33)

$$\left.\begin{aligned}\delta\int U = \int m\delta x + \int n\delta dx + \int p\delta d^2 x + \int q\delta d^3 x + \text{etc.}\\ + \int M\delta y + \int N\delta dy + \int P\delta d^2 y + \int Q\delta d^3 y + \text{etc.}\end{aligned}\right\} (35).$$

Si dans le second terme, $\int n\delta dx$, nous transposons les caractéristiques $\delta$ et d, et que nous intégrons ensuite par parties (art. 16, p,191, 1[ere] partie) nous aurons successivement $\int n\delta dx = \int n\, d\delta x = n\delta x - \int \delta x dn$.

Pour faire subir la même opération au troisième terme, nous aurons successivement en transposant les caractéristiques

$$\int p\delta d^2 x = \int p d^2 \delta x = \int p dd\delta x = \int p d(d\delta x),$$

et en intégrant par parties, il viendra

$$\int p\delta d^2 x = \int p d.(d.\delta x) = p.d\delta x - \int d.\delta x dp = pd\delta x - \int dp.d\delta x. (36).$$

L'intégration par parties pouvant s'appliquer également à la dernière intégrale de cette équation, dans laquelle le double signe $d\delta$ affecte x, nous aurons de même

$$\int dp.d\delta x = dp\delta x - \int \delta x.d.dp = dp\delta x - \int \delta x.d^2 p = dp\delta x - \int d^2 p\delta x.$$

Substituant cette valeur dans l'éq. (36), nous obtiendrons

$$\int p\delta d^2 x = pd\delta x - dp\delta x + \int d^2 p\delta x.$$

En appliquant le même procédé aux termes suivants $\int q\delta d^3 x$, etc, nous continuerons à intégrer par parties jusqu'à ce que nous parvenions à une intégrale qui ne contienne plus de différentielles de x mêlées à des intégrales et nous trouverons

$$\int q\delta d^3 x = qd^2\delta x - dqd\delta x + d^2 q\delta x - \int d^3 q\delta x,$$

et ainsi de suite.

Opérant de même pour y, et réunissant d'une part les termes qui sont délivrés du signe $\int$, et de l'autre ceux qui en sont affectés, nous aurons ce résultat

$$\left.\begin{aligned}\delta\int U = &(n - dp + d^2 q - \text{etc.})\,\delta x\\ &+(p - dq + \text{etc.})\,d\delta x\\ &+(q - \text{etc.})\,d^2\delta x + \text{etc.}\\ &+(N - dP + d^2 Q - \text{etc.})\,\delta y\\ &+(P - dQ + \text{etc.})\,d\delta y\\ &+(Q - \text{etc.})\,d^2\delta y + \text{etc.}\\ &+\int(m - dn + d^2 p - d^3 q + \text{etc.})\,\delta x\\ &+\int(M - dN + d^2 P - d^3 Q + \text{etc.})\,\delta y\end{aligned}\right\}\quad(37).$$

15. — *Exemple.* — Soit la fonction

$$U = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{y}}$$

que nous mettons sous la forme

$$U = \sqrt{dx^2 + dy^2} \times \frac{1}{\sqrt{y}}.$$

En différentiant ensuite par la règle de l'art. 9, 1re partie, et en remplaçant la caractéristique d par δ, art. 9, 2e partie, nous obtiendrons pour la variation de U,

$$\delta U = \sqrt{dx^2 + dy^2} \times \delta\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\delta\sqrt{dx^2 + dy^2}. \quad (38).$$

Les valeurs des variations indiquées se trouveront en appliquant les règles des art. 11 et 14, 1re partie, on aura donc

$$\delta\frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}\,\delta 1 - 1\delta\sqrt{y}}{(\sqrt{y})^2} = \frac{0 - \delta y^{1/2}}{y} = -\frac{1}{2}\frac{y^{1/2-1}\delta y}{y} =$$

$$-\frac{1}{2}\frac{y^{-1/2}\delta y}{y} = -\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{y^{1/2}}\delta y}{y} = -\frac{1}{2}\frac{1}{y\sqrt{y}}\delta y = -\frac{1}{2}\frac{\delta y}{y\sqrt{y}}$$

$$\delta\sqrt{dx^2 + dy^2} = \delta(dx^2 + dy^2)^{1/2} = \frac{1}{2}(dx^2 + dy^2)^{1/2-1}\delta(dx^2 + dy^2) =$$

$\frac{1}{2}(dx^2+dy^2)^{-1/2}\delta(dx^2+dy^2)=\frac{1}{2}\frac{1}{(dx^2+dy^2)^{1/2}}\delta(dx^2+dy^2)=$
$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{dx^2+dy^2}}(\delta(dx)^2+\delta(dy)^2)=-\frac{1}{2\sqrt{dx^2+dy^2}}(2dx\,\delta dx+$
$2dy\delta dy)=\frac{2dx\delta dx+2dy\delta dy}{2\sqrt{dx^2+dy^2}}.$

Substituant ces valeurs dans l'éq. (38), il viendra

$$\delta U=\sqrt{dx^2+dy^2}\left(-\frac{1}{2}\frac{\delta y}{y\sqrt{y}}\right)+\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{2\,dx\,\delta\,dx+2\,dy\,\delta\,dy}{2\sqrt{dx^2+dy^2}}=-$$
$$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y\sqrt{y}}\delta y+\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dx\,\delta\,dx+dy\,\delta\,dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

Pour simplifier représentons $\sqrt{dx^2+dy^2}$ par ds, art. 88, p. 121, 1[ere] partie, et substituons, nous aurons

$$\delta U=-\frac{1}{2}\frac{ds}{y\sqrt{y}}\delta y+\frac{dx\delta dx+dy\delta dy}{\sqrt{y}\,ds}=-\frac{1}{2}\frac{ds}{y\sqrt{y}}\delta y+\frac{dx}{ds\sqrt{y}}\delta dx+$$
$$\frac{dy}{ds\sqrt{y}}\delta dy.$$

Par comparaison de cette équation avec la formule (34), nous déduirons

$$M=-\frac{1}{2}\frac{ds}{y\sqrt{y}},\ N=\frac{dy}{ds\sqrt{y}};\ P=0,\ Q=0,\ \text{etc.}$$

$$m=0,\ n=\frac{dx}{ds\sqrt{y}},\ p=0,\ q=0,\ \text{etc.}$$

L'équation (37), en substituant les valeurs égales à zéro, soient P=o, Q=o, m=o, etc. se réduisant à

$$\delta\int U=n\delta x+N\delta y+\int[-dn\delta x+(M-dN)\delta y,$$

en y substituant les autres valeurs de n, N, M, deviendra

$$\delta\int U=\frac{dx}{ds\sqrt{y}}\delta x+\frac{dy}{ds\sqrt{y}}\delta y+\int\left[-d\left(\frac{dx}{ds\sqrt{y}}\right)\delta x+\left(-\frac{1}{2}\frac{ds}{y\sqrt{y}}-\right.\right.$$
$$\left.\left.d\left(\frac{dy}{ds\sqrt{y}}\right)\delta y=\frac{dx}{ds\sqrt{y}}\delta x+\frac{dy}{ds\sqrt{y}}\delta y-\int\right[d\left(\frac{dx}{ds\sqrt{y}}\right)\delta x+$$
$$\frac{ds}{2y\sqrt{y}}\delta y+d\left(\frac{dy}{ds\sqrt{y}}\right)\delta y.\quad(39).$$

16. — Le procédé pour déterminer la variation de $\int U$, que nous venons de voir, a été donné par Lagrange.

On trouve à ce procédé l'inconvénient de confondre trop les quantités différentielles avec les quantités finies, quoique la marche des opérations soit assez simple.

Nous allons examiner maintenant le procédé qu'employa Euler, lui, qui donna au calcul des variations une forme plus en concordance avec sa vraie métaphysique.

Il remplaça d'abord la fonction U par la fonction Vdx, dans laquelle V est une fonction des variables x, y, et de leurs coefficients différentiels successifs p, q, etc. (voir art. 11, $p=\frac{dy}{dx}$, etc.); et il trouva pour la variation de $\int Vdx$, la formule :

$$\left.\begin{aligned}\delta\int Vdx = V\delta x + \omega\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} - \text{etc.}\right) \\ + \frac{d\omega}{dx}\left(Q - \frac{dR}{dx} + \text{etc.}\right) + \frac{d^2\omega}{dx^2}\left(R - \text{etc}\right), \text{etc.} \\ + \int \omega dx\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3}, \text{etc.}\right) \\ + \text{constante.}\end{aligned}\right\} \quad (40)$$

Voici comment il opéra :

D'abord le théorème renfermé dans l'éq. (33)(art. 13, 2°), nous donne en y remplaçant U par V dx :

$$\delta\int Vdx = \int\delta(Vdx). (41).$$

Nous déterminerons la variation de Vdx, (art. 9, 2e partie), indiquée dans le seond mombre de cette équation, par le procédé de l'art. 9, p. 15, 1ere partie, et en cela, nous agirons d'une manière entièrement conforme à l'hypothèse où l'on considère ces variations comme des quantités infiniment petites ; car, dans cet article 9, 1ere partie, nous n'obtenons la différentielle d'un produit de deux valeurs qu'en nous bornant au premier terme de la différence, ou, ce qui revient au même, en négligeant les termes en $h^2$, en $h^3$, etc., du produit $z'y'$. Donc, en déterminant, d'après cet article, la variation du produit $V\times dx$ ou Vdx, nous aurons $\delta(Vdx)$ ou $\delta Vdx = V\delta dx + dx\delta V$

et, en transposant les caractéristiques $\delta$ et d, du premier terme du second membre, en vertu de l'équation (21), art. 7 il viendra $\delta(Vdx)=Vd\delta x+dx\delta V$.

En substituant cette valeur dans l'éq. (41), elle deviendra

$$\delta\int Vdx=\int\delta(Vdx)=\int Vd\delta x+\int dx\delta V. \quad (42),$$

Si nous appliquons au premier terme du second membre ce cette équation l'intégration par parties, (art. 16, p. 191, 1[ere] partie), qui, comme conséquence de l'art, 9, 1[ere] partie, suppose encore que $\delta$ affecte des quantités infiniment petites, nous aurons

$$\int Vd\delta x \text{ ou } \int Vd(\delta x)=V\delta x-\int\delta x.dV=V\delta x-\int dV.\delta x\ ;$$

cette valeur substituée dans l'éq. (42), donnera

$$\delta\int Vdx=V\delta x-\int dV\delta x+\int dx\delta V=V\delta x+\int(dx\delta V-dV\delta x). (43).$$

Pour développer maintenant la quantité qui est entre les parenthèses, nous aurons d'abord, art. 44, calc. diff., 1[re] partie, pour la différentielle totale de V :

$$dV=\frac{dV}{dx}dx+\frac{dV}{dy}dy+\frac{dV}{dp}dp+\frac{dV}{dq}dq+\frac{dV}{dr}dr, \text{ etc. } (44)\ ;$$

remplaçant ensuite les coefficients différentiels par les lettres M, N, P, Q, etc., cette équation nous donnera (voir art. 9) : $dV=Mdx+Ndy+Pdp+Qdq+Rdr+\text{etc.}$ (45).

Changeant maintenant la caractéristique d en $\delta$, nous obtiendrons art. 9, pour la variation de V :

$$\delta V=M\delta x+N\delta y+P\delta p+Q\delta q+R\delta r+\text{etc.}\ ;$$

équation dans laquelle les fonctions M, N, P, Q, R, etc., des variables y, p, q, r, etc., sont les mêmes que dans l'équation précédente. (art. 9).

Substituons enfin ces valeurs de $\delta V$ et de dV dans l'expression renfermée entre les parenthèses de l'éq. (43), elle deviendra

$$\begin{aligned} dx\delta V-dV\delta x=&dxM\delta x+dxN\delta y+dxP\delta p+dxQ\delta q\\ &+dxR\delta r+\text{etc.}-\delta xMdx-\delta xNdy\\ &-\delta xPdp-\delta xRdr-\text{etc.}=\\ &=N(dx\delta y-dy\delta x)\\ &+P(dx\delta p-dp\delta x)\\ &+Q(dx\delta q-dq\delta x)\\ &+R(dx\delta r-dr\delta x)\\ &+\text{etc.}\end{aligned}$$

Faisons, art. 11, $dy = pdx$, $dp = qdx$, $dq = rdx$, etc., cette équation deviendra

$$\left.\begin{aligned} dx\,\delta V - dV\,\delta x = N dx(\delta y - p\delta x) \\ + P\,dx\,(\delta p - q\delta x) \\ + Q dx\,(\delta q - r\delta x) \\ + R dx\,(\delta r - s\delta x) \\ + \text{etc.} \end{aligned}\right\} (46).$$

Nous allons déterminer d'abord maintenant les valeurs des expressions entre parenthèses en fonction d'une même quantité $\omega$ et de ses coefficients différentiels par rapport à x.

Pour cela nous poserons

$$\delta y - p\delta x = \omega. \quad (47).$$

Différentions ensuite cette expression en employant pour $p\delta x$ le procédé de la différentiation de deux variables, art. 9, Calcul diff, nous obtiendrons

$$d.\delta y - d(p\delta x) \text{ ou } d.\delta y - pd.\delta x - dp\delta x = d.\omega \;(48).$$

Par le même procédé, prenons aussi la variation de

$$dy = pdx,$$

nous aurons

$$\delta dy = p\delta dx + \delta p.dx \text{ ou } = p\delta dx + dx\delta p.,$$

et, en transposant les signes $\delta$ et d, art. 7. c. variations, dans le premier membre et dans le premier terme du second, il viendra

$$d\delta y = pd\delta x + dx\delta p. \quad (49).$$

En substituant cette valeur de $d\delta y$ dans l'éq. (48), celle-ci deviendra

$$pd\delta x + dx\delta p - pd\delta x - dp\delta x = d.\omega$$

ou, en simplifiant

$$dx\delta p - dp\delta x = d.\omega\,;$$

en y remplaçant dp par qdx, art. 11, c. des V., elle deviendra $dx\delta p - qdx\delta x = d\omega$, ou $dx\,(\delta p - q\delta x) = d\omega$,

et, par suite, on aura :

$$\delta p - q\delta x = \frac{d\omega}{dx},$$

valeur comprise entre parenthèses dans la seconde ligne de l'éq. (46).

De même, on trouverait

$$dx(\delta q - r\delta x) = d.\frac{d\omega}{dx}, \quad dx(\delta r - s\delta x) = d\left(\frac{1}{dx}d.\frac{d\omega}{dx}\right) \text{etc.},$$

substituant maintenant ces valeurs dans l'éq. (46), nous aurons

$$dx\delta V - dV\delta x = Ndx.\omega + Pdx\frac{d\omega}{dx} + Qd.\frac{d\omega}{dx} + Rd\left(\frac{1}{dx}d.\frac{d\omega}{dx}\right) + \text{etc.}$$

$$= N\omega dx + Pd\omega + Qd.\frac{d\omega}{dx} + Rd\left(\frac{1}{dx}.d\frac{d\omega}{dx}\right) + \text{etc.}$$

Donc, l'intégrale que renferme le second nombre de l'éq. (43) sera

$$\int(dx\delta V - dV\delta x) = \int N\omega dx + \int Pd\omega + \int Qd\frac{d\omega}{dx} + \int R.d\left(\frac{1}{dx}.d\frac{d\omega}{dx}\right) + \text{etc. } (50).$$

Si nous intégrons, par parties (art, 16, cal. Intég.) tous les termes qui, dans ce sesond membre, contient des différentielles de $\omega$, du 1[er], du 2[e], du 3[e] ordres, etc., nous obtiendrons (art. 38, calc. diff.) :

$$\int Pd\omega = P\omega - \int \omega\frac{d.P}{dx}dx = P\omega - \int\frac{dP}{dx}\omega dx\,;$$

$$\int Qd\frac{d\omega}{dx} = Q\frac{d\omega}{dx} - \int\frac{d\omega}{dx}d.Q\,;$$

et comme la différentielle de Q se prend par rapport à x; nous aurons

$$\int Qd\frac{d\omega}{dx} = Q\frac{d\omega}{dx} - \int\frac{d\omega}{dx}\frac{d.Q}{dx}dx = Q\frac{d\omega}{dx} - \int d\omega\frac{dQ}{dx} = Q\frac{d\omega}{dx} - \int\frac{d.Q}{dx}d\omega\,;$$

intégrant par parties, art. 16, C. I., le dernier terme de cette éq., elle deviendra

$$\int Qd.\frac{d\omega}{dx} = Q\frac{d\omega}{dx} - \frac{dQ}{dx}\omega + \int\omega d.\frac{dQ}{dx}.$$

On trouverait de même pour le terme en R :

$$\int R.d.\left(\frac{1}{dx}d.\frac{d\omega}{dx}\right) = R\frac{1}{dx}d.\frac{d\omega}{dx} - \frac{dR}{dx}\frac{d\omega}{dx} + \frac{1}{dx}\left(d.\frac{dR}{dx}\right)\omega - \int\omega d\left(\frac{1}{dx}d.\frac{dR}{dx}\right).$$

Et ainsi de suite.

Substituant les valeurs de $\int P d\omega$, de $\int Q d.\frac{d\omega}{dx}$, de $\int R.d\left(\frac{1}{dx} d.\frac{d\omega}{dx}\right)$, etc., dans l'éq. (50), il viendra

$$\int(dx\,\delta V - dV\,\delta x) = \int N\omega\,dx + P\omega - \int\frac{dP}{dx}\omega dx + Q\frac{d\omega}{dx} - \frac{dQ}{dx}\omega + \int\omega d.\frac{dQ}{dx} + R\frac{1}{dx}d\frac{d\omega}{dx} - \frac{dR}{dx}\frac{d\omega}{dx} + \frac{1}{dx}\left(d.\frac{dR}{dx}\right)\omega - \int\omega d\left(\frac{1}{dx}d.\frac{dR}{dx}\right) + \text{etc.} =$$

en ordonnant par rapport à ω et à ses coefficients différentiels

$$= P\omega - \frac{dQ}{dx}\omega + \frac{1}{dx}\left(d.\frac{dR}{dx}\right)\omega + Q\frac{d\omega}{dx} - \frac{dR}{dx}\frac{d\omega}{dx} + \ldots + R\frac{1}{dx}d.\frac{d\omega}{dx} - \ldots + \int N\omega dx - \int\frac{dP}{dx}\omega dx + \int\omega\,d.\frac{dQ}{dx} - \int\omega\,d.\left(\frac{1}{dx}d.\frac{dR}{dx}\right) + \ldots =$$

$$\omega\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{1}{dx}d.\frac{dR}{dx} - \text{etc.}\right) + \frac{d\omega}{dx}\left(Q - \frac{dR}{dx} + \text{etc.}\right) + \frac{1}{dx}d.\frac{d\omega}{dx}(R - \text{etc}) \ldots \text{etc.} + \int\omega\,dx\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx}d.\frac{dQ}{dx} - \frac{1}{dx}d.\frac{1}{dx}d.\frac{dR}{dx} + \text{etc.}.\right)$$

Substituons cette valeur dans l'éq. (43), à laquelle nous ajouterons une constante, pour tenir lieu de toutes celles que l'intégration par parties exigera, nous aurons enfin

$$\delta\int V dx = V\delta x + \omega\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{1}{dx}d.\frac{dR}{dx} - \text{etc.}\right) + \frac{d\omega}{dx}\left(Q - \frac{dR}{dx} + \text{etc.}\right)\text{etc.} + \frac{1}{dx}d.\frac{d\omega}{dx}(R - \text{etc.})\text{ etc.} + \int\omega dx\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx}d.\frac{dQ}{dx} - \frac{1}{dx}d.\frac{1}{dx}d.\frac{dR}{dx}\text{ etc}\right).$$

$$+ \text{ constante.}$$

Ou, en prenant dx pour variable indépendante,

$$\delta\int Vdx = V\delta x + \omega\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} - \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{d\omega}{dx}\left(Q - \frac{dR}{dx} + \text{etc.}\right) + \frac{d^2\omega}{dx^2}(R - \text{etc}).\ \text{etc.}$$
$$+ \int \omega dx\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3},\ \text{etc.}\right)$$
$$+ \text{constante C.Q.F.D. (51).}$$

17, — Remarque. — Dans cette solution, on suppose que la fonction U de x, de y, et des différentielles des différents ordres de x et de y puisse se ramener à la forme Vdx. Mais cela n'est pas toujours possible. Ainsi, par exemple, si l'on avait

$$U = \frac{d^2y}{dx} + \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx}\ (52).$$

et que l'on fît, comme précédemment

$$dy = pdx,$$

on trouverait en différentiant (art. 9, C.D) :

$$d^2y = dp.dx + pd^2x.\ (53).$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (52), on obtiendrait

$$U = \frac{dpdx + pd^2x}{dx} + p\frac{d^2x}{dx} = \frac{dp}{dx}dx + 2p\frac{d^2x}{dx}$$

ou

$$U = \frac{d.\frac{dy}{dx}}{dx}dx + 2\frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx} = d.\frac{dy}{dx} + 2\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dx};$$

expression dont le second membre ne se réduit pas à la forme Vdx.

Mais si l'on avait l'expression

$$U = \frac{d^2y}{dx} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx},$$

et si l'on y substituait la valeur de $d^2y$, donnée par l'équation (53), et celle de dy=pdx d'où $\frac{dy}{dx} = p$, il viendrait

$$U = \frac{dpdx + pd^2x}{dx} - p\frac{d^2x}{dx} = \frac{dp}{dx}dx + p\frac{d^2x}{dx} - p\frac{d^2x}{dx} = \frac{dp}{dx}dx,$$

expression ramenée à la forme Vdx.

## Des maxima et minima des formules intégrales indéterminées.

18. — Nous avons examiné, art. 54 et suivants du calc. diff., une méthode pour résoudre des questions de maxima et de minima, méthode consistant à déduire de l'équation $y=fx$ du problème, la valeur de $\frac{dy}{dx}$, qu'on devait égaler à zéro on à l'infini, pour obtenir la relation entre x et y, qui doit avoir lieu au maximum ou au minimum. Mais cette méthode n'est pas applicable à tous les cas, et le calcul des variations a comme principale application de chercher la solution d'un genre de problèmes de maxima et de minima qu'on ne saurait résoudre avec la méthode rappelée ci-dessus.

Ainsi, si dans un problème donné, on avait seulement la formule intégrale $\int Vdx$, dans laquelle V serait une fonction de x, de y, de p, de q, etc., et qu'on demandât quelle est, parmi toutes les courbes qui jouissent de la propriété commune $\int Vdx$, celle pour laquelle $\int Vdx$ est un maximum, un tel problème serait d'une nature bien différente que ceux que nous avons résolus en calcul différentiel, sur les maxima ou minima. On serait donc bien dans l'erreur si l'on croyait que, pour en obtenir la solution, il suffirait de passer à la différentielle, comme il est rappelé ci-dessus, en ôtant le signe d'intégration et en écrivant donc Vdx. Cela ne servirait à rien, puisque le signe $\int$, qui ici nous indique que c'est x que l'on fait varier, n'est plus le signe de l'opération contraire (intégration de variation) à celle qui se rapporte à des variations, mais bien à celle qui se rapporte à des différentielles ; et au lieu de passer d'une courbe à l'autre, on resterait sur la même courbe ce qui est inadmissible, d'après ce que nous avons vu aux articles 2 et 3, précédents.

Ce ne sera donc pas Vdx que, d'après la méthode ordinaire des maxima et minima, (art. 54 et suivants du calc. diff.), on devra égaler à zéro, mais $\delta\int Vdx$, parce qu'alors,

bien que nous ignorions la relation qui existe entre x et y renfermés dans V, nous considérons néanmoins y comme une fonction de x, et par suite $\int Vdx$ comme une autre fonction de x, dont la variation est indiquée par le signe $\delta$, variation due aux accroissements successifs que reçoit une constante qui, le plus souvent, ne paraît pas dans les calculs, (art. 4, précéd.)

19. — Comme nous savons, l'intégration de $\int Vdx$, ne peut donc s'exécuter sans qu'il ne soit établi une relation entre x et y ; cette valeur nous est fournie, comme nous allons voir par la condition même du maximum. En effet, la variation de $\int Vdx$ ayant été déterminée par l'éq. (51), représentons pour plus de simplicité, par $\lambda$ la partie qui s'y trouve hors du signe d'intégration; la variation $\delta\int Vdx$ étant nulle dans le cas du maximum, nous aurons donc

$$O = \lambda + \int \omega dx\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} - \text{etc.}\right) + \text{constante. } (54).$$

Et bien la relation cherchée entre x et y pour que la courbe soit du maximum ou du minimum, c'est que le facteur, entre parenthèses, de cette équation soit égale à zéro, c'est-à-dire que l'on doit avoir :

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} - \text{etc.} = 0 \quad (55).$$

En effet, dans le facteur $N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} - \text{etc.}$ de l'éq. (54), on reconnaît la quantité qui, égalée à zéro, exprime (art. 107, p. 277 du calc. intég.), la condition d'intégrabilité de Vdx ; par suite, il suffit que Vdx soit intégrable pour que le terme affecté du signe $\int$ s'évanouisse dans l'éq. (54). Ce terme disparaît également lorsque Vdx n'est pas intégrable, car alors les termes en x et en y, renfermés sous ce signe, ne peuvent entraîner la disparition des termes en x et en y, des autres termes de l'éq. (54), qui, n'étant pas affectés du signe d'intégration, sont d'une nature différente. Il résulte de là que si l'on représente l'éq. (51) ou (54) par

$$\lambda + \int \mu\, dx + \text{constante} = 0. \quad (56).$$

$$\text{(en faisant } \int \omega\, dx \left( N - \frac{dP}{dx} + \text{etc.} \right) = \int \mu\, dx \text{),}$$

on ne peut satisfaire à cette équation, d'après ce qui vient d'être dit, qu'en faisant,

$$\lambda + \text{constante} = 0 \text{ et } \int \mu dx = 0.$$

Cette dernière équation représente en général une courbe, car elle exprime la sommation d'une infinité d'éléments que l'intégration convertit en courbe.

La partie $\lambda$ + constante de l'éq. (56) ne peut se rapporter qu'à des point isolés. En effet, l'équation

$$\lambda + \text{constante} = 0,$$

étant une équation rationnelle en x et en y renfermés dans $\lambda$, (ci-dessus), il s'ensuit que cette équation ne comporte qu'un nombre limité de valeurs, qui seront déterminées par le degré de cette équation après qu'on y aura mis la valeur de y en x ; de plus, les points déterminés par ces valeurs ne se rapportent qu'aux extrémités de la courbe, car lorsqu'on donnera des valeurs particulières a et b aux variables x et y, on ne fera que déterminer la valeur de la constante qui entre dans l'éq. (56), en fonction de a et de b, valeur qui se rapporte toujours au commencement et à la fin de l'intégrale, (art. 69, p. 248 du calc. intég.).

Enfin la condition $\int \mu dx = 0$ (ci-dessus) nous donne

$$\int \omega dx \left( N - \frac{dP}{dx} + \text{etc.} \right) = 0,$$

et puisque la différentielle d'une fonction égale à zéro est nulle aussi bien que cette fonction, (art. 43, p. 52 du cal. diff.)., on peut enlever le signe d'intégration, ce qui donnera

$$\omega dx \left( N - \frac{dP}{dx} + \text{etc.} \right) = 0 \quad (57),$$

expression à laquelle on satisfait en faisant

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} - \text{etc.} = 0,$$

ce qui est l'éq. (55) qu'il fallait démontrer.

*Remarque.* — Nous pouvons remarquer que la propriété $\int V dx$ appartient à toutes les courbes que nous

considérons, et que nous pouvons passer de l'une à l'autre par degrés imperceptibles, en faisant accroître V d'une quantité infiniment petite $\delta V$.

Dans cette hypothèse, V devenant $V + \delta V$, la formule $\int V dx$ se change en $\int (V + \delta V) dx$ ou $\int V dx + \int \delta V dx$ et s'accroît de la quantité $\int \delta V dx$, quantité qui, par la transposition des signes $\int$ et $\delta$ revient à $\delta \int V dx$. (art. 13, 2°, cal. des var.). Nous reconnaissons, dans cette expression, la variation dont nous avons déterminé la valeur par l'éq. (51), art. 16 ci-dessus, et qui devant, comme $\int V dx$, appartenir à toutes les courbes du genre que nous considérons, n'en spécifie aucune en particulier.

Ensuite, en égalant à zéro la variation $\delta \int V dx$, (art. 19 ci-dessus), nous déterminons cette courbe quelconque qui jouit de la propriété requise, à devenir, entre toutes les autres, celle qui convient au maximum ou au minimum ; nous franchissons en idée toutes les courbes intermédiaires comprises entre la courbe primitive et la courbe du maximum ou du minimun, pour que la première de ces dernières courbes se change en l'une des deux autres, alors, dans le cas du maximum, par exemple, une ordonnée quelconque MP, devenue M′ P′, aura reçu un accroissement fini, composé de tous les accroissements successifs que la courbe aura reçus en passant par toutes ces positions intermédiaires ; et puisque MP est une ordonnée quelconque, la même chose aura lieu pour tous les points de la courbe variée, qui, par suite, sera entièrement distincte de la courbe primitive ; mais la variatiou $\delta V$ représentant la variation qui a lieu lorsqu'on passe de la courbe primitive à la courbe infiniment proche qui lui succède, cette variation $\delta V$, quand la courbe primitive aura varié, se rapportera alors à la courbe infiniment proche qui succédera à la courbe variée, et restera par conséquent une quantité infiniment petite.

20. — Nous avons posé, art. 16, ci-dessus, éq. (47) :

$$\omega = \delta y - p \delta x.$$

Si nous substituons cette valeur de $\omega$ dans l'éq. (57), il viendra

$$(dy - p\delta x)dx\left(N - \frac{dP}{dx} + \text{etc.}\right) = 0$$

ou,

$$(\delta y - p\delta x)\left(N - \frac{dP}{dx} + \text{etc.}\right) = 0. \quad (58) ;$$

et l'on peut satisfaire encore à cette équation en établissant cette relation entre $\delta y$ et $\delta x$ :

$$\delta y - p\delta x = 0,$$

ce est conforme à ce que nous avons démontré, art 6, Remarque, cal. des Var., que $\delta x$ et $\delta y$ étaient dépendants l'un de l'autre —Une autre conséquence qui est également conforme à ce même article, c'est que l'éq. (55) subsiste encore lorsqu'on ne tient pas compte de $\delta x$ ; car alors l'éq. (58) se réduisant à

$$\delta y\left(N - \frac{dP}{dx} + \text{etc.}\right) = 0,$$

on en déduit également

$$\left(N - \frac{dP}{dx} + \text{etc.}\right) = 0.$$

*Remarque I.* — Lorsque nous avons $\delta x = 0$, nous tombons dans le cas où la variation de y se confond avec la direction de cette ordonnée, art. 2 précédent, ce qui n'empêche pas que la condition du maximum ou du minimum, entre toutes les courbes, ne subsiste toujours.

*Remarque II.* — Quand les variations n'ont lieu que dans le sens des ordonnées, il est évident que celles des points extrêmes, par exemple M et M′, fig. 2, sont des lignes droites MN et M′N′, dirigées suivant le prolongement des ordonnées.

*Remarque III.* — Mais lorsque x varie aussi bien que y, les extrémités M et M′, fig. 6, des ordonnées MP et M′P′, décrivent des courbes MN et M′N′ ; car les points M et M′ se mouvant dans des directions qui ne sont plus celles de MP et de M′P′, décrivent en général des courbes, en admettant comme cas particulier, que ces courbes se réduisent à des lignes droites. (voir art. 23, fin.)

21. — Lorsque Vdx est une différentielle exacte, l'éq.

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \text{etc.} = 0$$

a lieu par elle-même, art. 107, p. 277, calc. intég., et alors la valeur de $\delta\int Vdx$, ou plutôt celle de $\int Vdx$, ne peut renfermer que des quantités intégrées. Or, par la transposition des signes, art. 13, 2°, calc. des var., $\delta\int Vdx$ devenant $\int\delta Vdx$, si l'on considère y, renfermé dans V, comme une fonction de x, le produit Vdx ne sera alors qu'une fonction V de x multipliée par dx ; et $\int Vdx$ représentera (art. 62 du calc. intég.), l'aire d'une certaine courbe. La variation de cette aire étant exprimée par $\delta\int Vdx$, ne sera donc qu'un accroissement de cette aire, et par suite $\int\delta\int Vdx$ ou $\int\int\delta Vdx$ sera la somme ou intégrale de toutes ces aires élémentaires. Représentons cette intégrale par $\varphi_{\prime} x+c$, et prenons-la entre les limites $x=a$ et $x=b$, nous aurons, (art, 69, calc. intég.), l'intégrale définie

$$\int_b^a \varphi_{\prime} x+c=\varphi_{\prime} a+c-(\varphi_{\prime} b+c)=\varphi_{\prime} a-\varphi_{\prime} b,$$

et l'on voit qu'elle ne dépend pas des coordonnées des points intermédiaires de la courbe variée, mais bien des abscisses $OH=a$ et $OH'=b$ des points M et M' pris comme extrémités de cette courbe, fig. 6.

De même si l'on a l'expression $\int Vdx$ et que l'équation (art. 107, calc. intég.)

$$N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2 Q}{dx^2}-\text{etc.}=0,$$

la variation $\delta\int Vdx$ ne contiendra aucune formule intégrale ; d'où il résulte que $\int Vdx$ sera une fonction déterminée des valeurs x, y, p, q, etc, c'est-à-dire une fonction immédiatement intégrable ou même délivrée du signe d'intégration.

22. — Revenons à l'éq. (56) ci-dessus, et prenons la partie de cette équation qui n'est pas affectée du signe d'intégration et qne nous avons représentée par

$$\lambda+\text{constante}.$$

Nous avons vu, art. 19, précédent, que cette expression représente des points isolés qui sont les extrémités de la courbe représentée par l'autre partie de l'éq. (56). Lorsque ces extrémités sont des points fixes, cette expression cidessus s'évanouit.

En effet, la variation cessant d'avoir lieu en ces points fixes, si nous en représentons les coordonnées par $x', y'$, et par $x'', y''$ ; $\delta x$ et $\delta y$ ne subsisteront plus lorsqu'on donnera à x et à y les valenrs $x'$, $y'$ et $x''$, $y''$, ce qui exigera que les termes compris dans $\lambda$ (éq.56) s'évanouissent lorsqu'on prend l'intégrale définie, (art. 69, Cal. intég ), car $\delta x$ et $\delta y$ égalent zéro, et $\omega = \delta y - p\delta x = 0$, éq. (47) art. 16 ; donc éq. (51), éq. (54) et éq. (56), il en résulte $\lambda = 0$.

Il ne restera donc de l'éq. (56) que l'expression $\int \mu dx = 0$ pour déterminer la relation qui doit exister entre x et y pour que $\int V dx$ soit au maximun ou au minimum. art. 19 ci-desus.

*Remarque.* — Nous pouvons constater que le problème général qui fait l'objet de notre discussion est en quelque sorte l'inverse de celui que nous offrent les maxima et les minima ordinaires, art. 54 et suivants, cal. diff., car dans ceux-ci la relation entre x et y est donnée immédiatement, tandis qu'ici elle résulte de la condition même du maximum ou du minimum, comme nous avons vu à l'article 19 ci-dessus.

Nota. — Les problèmes que nous examinons maintetant,par le calcul des variations,se rapportent à des maxima ou à des minima absolus.

Plus loin, à l'article 31, nous examinerons une autre classe de problèmes que nous comprendrons sous la dénomination de maxima ou de minima relatifs.

Les exemples que nous donnons font mieux saisir la différence entre les deux classes de problèmes que des définitions.

23. — *Application. — Chercher quelle est la plus courte des courbes menées entre deux points A et B, sur un plan.*

L'expression de la différentielle d'un are *S* de courbe étant (art. 88. p. 121, cal. diff.)

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2} \text{ ou} = dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} \text{ ou} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\, dx,$$

sera, dans le cas actuel, celle que nous avons représentée par Vdx, donc nous aurons

$$V=\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$$

et, en remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par p, (art. 11, précédent), il viendra

$$V=\sqrt{1+p^2}.$$

Cette formule qui ne contient que la variable p, nous donnera l'expression $\frac{dV}{dp}$ du coefficient différentiel P, art. 16, précédent, savoir

$dV=d\sqrt{1+p^2}=d\,(1+p^2)^{1/2}=\frac{1}{2}(1+p^2)^{-1/2}\,d\,(1+p^2)=$
$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}d(1+p^2)=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\,2pdp=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\,dp$, d'où
$\frac{dV}{dp}=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$.

Nous aurons donc, art. 16, précédent,

$$M=0,\ N=0,\ P=\frac{dV}{dp}=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}},\ Q=0,\ \text{etc. (59)}.$$

On voit donc, par ces valeurs, que les termes dans lesquels entrent V, P et $\frac{dP}{dx}$, doivent être seuls conservés dans la formule (51), qui, par suite, devient dans le cas présent

$$\delta\int Vdx=V\delta x+\omega P+\int\omega dx\left(-\frac{dP}{dx}\right).\ \text{(59 bis)}.$$

En substituant $\delta y-p\delta x$ à la place de $\omega$, art. 16, on aura

$\delta\int V\,dx=V\delta x+P\delta y-Pp\,\delta x+\int(\delta y-p\delta x)\,dx\left(-\frac{dP}{dx}\right)=$
$(V-Pp)\,\delta x+P\delta y-\int(\delta y-p\delta x)\frac{dP}{dx}\,dx.$ (60).

Le premier membre de cette équation étant nul par la condition du maximum ou du minimum (art. 19), et la partie qui est indépendante du signe d'intégration s'évanouissant dans l'hypothèse où les extrémités sont des points fixes (art. 22 ci-dessus), l'équation (60) se réduit, dans ces conditions, à

$$0=-\int(\delta y-p\delta x)\frac{dP}{dx}\,dx.$$

Et comme cette intégrale est égale à zéro, il en est de même de sa différentielle (art. 19, ci-dessus) ; on aura donc

$$(\delta y - p\delta x)\frac{dP}{dx}dx = 0.$$

Nous satisfaisons à cette équation, en posant

$$\frac{dP}{dx}dx = 0 \quad (61).$$

La troisième des équations (59) nous donne la valeur de P, et en différentiant cette équation, on aura (art. 17, calcul différentiel) :

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dp}\frac{dp}{dx} = \frac{1}{dp}d.\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\frac{dp}{dx},$$

et en différentiant par la règle des fractions, (art. 11, calc. diff.), on aura d'abord

$$d\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{\sqrt{1+p^2}\,dp - pd\sqrt{1+p^2}}{1+p^2}. \quad (62).$$

Mais $pd.\sqrt{1+p^2} = pd.(1+p^2)^{1/2} = p\frac{1}{2}(1+p^2)^{-1/2}d.(1+p^2) =$

$$\frac{1}{2}p\frac{1}{(1+p^2)^{1/2}}2p\,dp = \frac{p^2\,dp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Substituant dans l'éq. (62), il viendra

$$d.\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{dp\sqrt{1+p^2} - \frac{p^2\,dp}{\sqrt{1+p^2}}}{1+p^2}$$

Réduisant au même dénominateur et faisant la réduction, nous obtiendrons

$$d.\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{dp(\sqrt{1+p^2})^2 - p^2\,dp}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}} = \frac{dp(1+p^2) - dpp^2}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}} =$$

$$\frac{dp}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}};$$

par suite, il viendra enfin

$$\frac{dP}{dx} = \frac{1}{dp}\frac{dp}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}}\frac{dp}{dx} = \frac{1}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}} \times \frac{dp}{dx}.$$

En substituant dans l'éq. (61) ci-dessus, on aura

$$\frac{1}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}} \times \frac{dp}{dx} \times dx, \text{ ou } \frac{1}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}} \times dp = 0,$$

d'où $dp=0$ et en intégrant (5°, art. 6, calc. diff.), il viendra $p=\text{constante}$ ;
ou en désignant cette constante par b, nous aurons, $p=b$, et par suite, comme nous avons vu précédemment

$$\frac{dy}{dx}=p=b, \text{ ou } dy=bdx \text{ ;}$$

intégrant de nouveau, nous aurons

$$\int dy=b\int dx+\text{constante, ou}$$

$$y=bx+c. \quad (63),$$

pour l'équation de la courbe, laquelle se réduit donc à une droite. (Voir art. 20, remarque III ci-dessus et mon recueil de formules p. 124).

24. — Pour déterminer les constantes b et c de cette équation nous examinerons trois cas différents, selon que les points extrêmes A et B de la courbe cherchée sont fixes tous deux, ou si l'un est variable et l'autre fixe, ou enfin s'ils sont variables tous deux.

Nous examinerons d'abord le premier cas où les deux points extrêmes sont fixes. Soient leurs coordonnées

$$x=\alpha,\ y=\beta, \text{ et } x=\alpha',\ y=\beta'.$$

Ces coordonnées devant satisfaire à l'éq. (63), nous avons

$$\beta=b\alpha+c,\ \beta'=b\alpha'+c \text{ ;}$$

et, en retranchant membre à membre,

$$\beta-\beta'=b\alpha-b\alpha'=b(\alpha-\alpha') \text{ d'où } b=\frac{\beta-\beta'}{\alpha-\alpha'}, \text{ ou en multipliant}$$

par -1 les 2 membres de la fraction $b=\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}$

$$\text{et } c=\beta'-b\alpha'=\beta'-\frac{\beta-\beta'}{\alpha-\alpha'}\alpha'=\frac{\beta'\alpha-\beta'\alpha'}{\alpha-\alpha'}-\frac{\beta\alpha'-\beta'\alpha'}{\alpha-\alpha'}=$$

$$\frac{\beta'\alpha-\beta'\alpha'-\beta\alpha'+\beta'\alpha'}{\alpha-\alpha'}=\frac{\beta'\alpha-\beta\alpha'}{\alpha-\alpha'}$$ ou en multipliant par — 1 les

2 membres $c=\frac{\alpha'\beta-\alpha\beta'}{\alpha'-\alpha}$;

en substituant dans l'éq. (63) ces valeurs, il vient pour l'équation de la courbe cherchée ayant les extrémités A et B fixes

$$y = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} x + \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha' - \alpha}.$$

25. — Lorsque les extrémités A et B de la courbe cherchée ne sont pas des points fixes tous deux, la partie $(V - Pp)\,\delta x + P\delta y$ de l'éq. (60), qui est représentée par $\lambda$ dans l'éq. (56), ne s'évanouit plus à cause de la non-existance des variations $\delta y$ et $\delta x$. (voir art. 22). Mais comme le premier membre de l'éq. (56) est égal à zéro, la partie $\int \mu dx$ ne peut, comme nous l'avons vu, art. 19, anéantir $\lambda$ ; par suite, pour que la condition $\lambda + \int \mu\, dx = 0$ soit remplie, il faut donc que $\lambda$ soit nul séparément et qu'on ait ainsi $\lambda$ ou $(V - Pp)\,\delta x + P\delta y = 0$.

Substituant dans cette équation les valeurs de V et de P ou $\sqrt{1+p^2}$ et $\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$, données art. 23, elle deviendra

$$\left(\sqrt{1+p^2} - \frac{p^2}{\sqrt{1+p^2}}\right)\delta x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\,\delta y = 0,$$

d'où, en réduisant au même dénominateur,

$$\frac{1+p^2}{\sqrt{1+p^2}}\,\delta x - \frac{p^2}{\sqrt{1+p^2}}\,\delta x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\,\delta y = 0$$

et, en multipliant par $\sqrt{1+p^2}$,

$$(1+p^2)\delta x - p^2\delta x + p\delta y = 0 \text{ ou } \delta x + p^2\delta x - p^2\delta x + p\delta y = 0$$

ou

$$\delta x + p\delta y = 0.$$

Remplaçant p par sa valeur $\frac{dy}{dx}$, nous aurons

$$\delta x + \frac{dy}{dx}\delta y = 0 \text{ ou } \frac{dy}{dx}\delta y = -\delta x \text{ ou } \frac{dy}{dx}\frac{\delta y}{\delta x} = -1. \ (64);$$

équation qui ne pourra être satisfaite que par les coordonnées des points extrêmes de la courbe (art. 19), coordonnées qui varient évidement avec ces points.

26. — Supposons donc le second cas, art. 24, c'est-à-dire que l'un des points extrêmes soit variable et l'autre fixe. Soient x', y' les coordonnées du premier et x'', y''

celles du second. L'équation (64) devant être satisfaite par les coordonnées x' et y', nous aurons

$$\frac{dy'}{dx'}\frac{\delta y'}{\delta x'} = -1 \text{ ou } \frac{dy'}{dx'}\frac{\delta y'}{\delta x'} + 1 = 0, \quad (65)$$

Cette équation exprime la condition pour que la courbe que décrit le point mobile x', y', soit coupée à angle droit par la courbe cherchée.

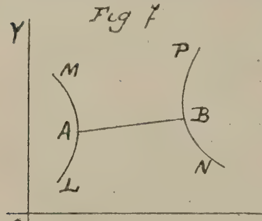
En effet, $\frac{dy'}{dx'}$ et $\frac{\delta y'}{\delta x'}$ expriment les tangentes trigonométiques, (art. 51, calc. diff. éq. 82bis, et recueil p. 124), que la courbe proposée et la courbe variée forment à leurs points de contact, par suite la condition néssessaire pour que ces tangentes (donc les courbes) se coupent à angle droit est exprimée par l'équation (65) ci-dessus, (voir recueil p. 124, 1° et 2° ; et p. 126, à 7° et à a)).

La condition exprimée ci-dessus pour le point variable et celle de la fixité de l'autre point donné par les coordonnées x″ et y″, suffisent pour déterminer les constantes b et c de l'équation (63).

27. — Supposons maintenant le troisiéme cas, c'est-à-dire celui où les deux points extrèmes A et B sont variables tous deux. Soient x', y' et x″, y″ leurs coordonnées ; comme elles doivent satisfaire à l'équation (65), on aura

$$\frac{dy'}{dx'}\frac{\delta y'}{\delta x'} + 1 = 0, \quad \frac{dy''}{dx''}\frac{\delta y''}{\delta x''} + 1 = 0. \quad (69).$$

Ces équations expriment que les courbes LM et NP, fig. 7, décrites par les points extrêmes, doivent être normales ou se couper à angle droit avec la courbe cherchée, (art. 26), courbe cherchée qui, dans le cas présent, se réduit à une ligne droite A B, art. 23.




La relation qui existe entre les coordonnées de cette courbe cherchée minimum, art. 23, étant, (voir art. 19, éq. 55) :

$$N - \frac{dP}{dx} + \text{etc.} = 0 ;$$

cette équation devient, dans notre cas,

$$dP=0,$$

et nous ramène à l'éq. (61). Or, art. 23, nous avons vu que cette éq (61), nous conduisait à $dp=0$, et que l'intégrale de cette dernière était $p=b$ ; substituant à p, sa valeur $\frac{dy}{dx}$, nous aurons $\frac{dy}{dx}=b$, d'où $\frac{dy'}{dx'}=b$ et $\frac{dy''}{dx''}=b$. Substituant ces dernières valeurs dans les équations (66), nous obtiendrons

$$b\frac{\delta y'}{\delta x'}+1=0 \text{ et } b\frac{\delta y''}{\delta x''}+1=0$$

d'où

$$\frac{\delta y'}{\delta x'}+\frac{1}{b}=0 \text{ et } \frac{\delta y''}{\delta x''}+\frac{1}{b}=0$$

ou

$$\frac{\delta y'}{\delta x'}=-\frac{1}{b} \text{ et } \frac{\delta y''}{\delta x''}=-\frac{1}{b}. \quad (67).$$

Ces équations (67) ne contiennent plns que les variations des points extrêmes $x'$, $y'$ et $x''$, $y''$, et nous pourrons éliminer ces variations si nous connaissons les courbes que ces points devront parcourir. Supposons donc que ces courbes soient représentées par les équations différentielles suivantes

$$dy=\varphi(x, y)\,dx \text{ et } dy=\psi(x, y)\,dx\ ;$$

nous en déduirons, art. 9,

$$\delta y=\varphi(x, y)\,\delta x \text{ et } \delta y=\psi(x, y)\,\delta x.$$

Ces équations devant être satisfaites, l'une par les coordonnées $x'$, $y'$, et l'autre par les coordonnées $x''$, $y''$, il viendra donc

$$\delta y'=\varphi(x',y')\,\delta x' \text{ et } \delta y''=\psi(x'', y'')\,\delta x'';$$

d'où

$$\frac{\delta y'}{\delta x'}=\varphi(x'\, y') \text{ et } \frac{\delta y''}{\delta x''}=\psi(x'', y'').$$

Substituant dans les équations (67) ces valeurs, pour éliminer les variations, nous obtiendrons enfin

$$\varphi(x', y')=-\frac{1}{b} \text{ et } \psi(x'', y'')=-\frac{1}{b}.$$

28. — Nous avons vu, art. 16 et 18, que V était une fonction de x, et de y fonction de x, et de leurs coeffi-

cients différentiels successifs ; mais si cette fonction V contenait encore une ou plusieurs variables z, t, u, etc., et leurs coefficients différentiels successifs, l'éq. (45), art. 16, deviendrait

$$\left.\begin{array}{r} dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.}, \\ + N_{,}dz + P_{,}dp_{,} + Q_{,}dq_{,} + R_{,}dr_{,} + \text{etc.}, \\ + N_{,,}dt + P_{,,}dp_{,,} + Q_{,,}dq_{,,} + R_{,,}dr_{,,} + \text{etc.} \\ + \text{ etc. } + \text{ etc. } + \text{ etc. } + \text{ etc.} \end{array}\right\} (68)$$

Dans ce cas, l'éq, (51), art. 16, s'augmenterait des termes relatifs aux variables z, t, u, etc., et il viendrait

$$\left.\begin{array}{l} \delta \int Vdx = V\delta x + \omega\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2 R}{dx^2} - \text{etc.}\right) + \frac{d\omega}{dx}\left(Q - \frac{dR}{dx} + \text{etc.}\right) + \\ \int \omega dx\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} - \text{etc.}\right) + \\ \omega_{,}\left(P_{,} - \frac{dQ_{,}}{dx} + \text{etc.}\right) + \frac{d\omega_{,}}{dx}\left(Q_{,} - \frac{dR_{,}}{dx} + \text{etc.}\right) + \\ \int \omega_{,} dx\left(N_{,} - \frac{dP_{,}}{dx} + \text{etc.}\right) + \\ \omega_{,,}\left(P_{,,} - \frac{dQ_{,,}}{dx} + \text{etc.}\right) + \frac{d\omega_{,,}}{dx}\left(Q_{,,} - \frac{dR_{,,}}{dx} + \text{etc.}\right) + \\ \int \omega_{,,} dx\left(N_{,,} - \frac{dP_{,,}}{dx} + \text{etc.}\right) + \\ \text{etc.} + \text{etc.} + \text{etc.} + \text{constante.} \end{array}\right\} (69)$$

Dans le cas du maximum ou du minimun, le second membre de l'équation (69) devant être nul, art. 18, il faut pour que cette condition soit remplie que, art. 19, la partie affectée du signe d'intégration soit nulle d'elle-même, ce qui nous donne

$$\int \omega\, dx\left(N - \frac{dP}{dx} + \text{etc.}\right) + \int \omega_{,} dx\left(N_{,} - \frac{dP_{,}}{dx} + \text{etc.}\right) + \int \omega_{,,} \left(N_{,,} - \frac{dP_{,,}}{dx} + \text{etc.}\right) + \text{etc.} = 0.$$

Mais les variables y, z, t, u, etc., étant indépendantes l'une de l'autre, cette équation ne pourra se réaliser que pour autant que l'on aura séparément

$$\left.\begin{aligned}&\int \omega\, dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \text{etc.}\right) = 0,\\&\int \omega_{,} dx \left(N_{,} - \frac{dP_{,}}{dx} + \text{etc.}\right) = 0,\\&\int \omega_{,,} dx \left(N_{,,} - \frac{dP_{,,}}{dx} + \text{etc.}\right) = 0,\\&\text{etc.}\end{aligned}\right\}\ (70).$$

En différentiant ces équations nous aurons (art. 19.)

$$\begin{aligned}&\omega\, dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \text{etc.}\right) = 0,\\&\omega_{,} dx \left(N_{,} - \frac{dP_{,}}{dx} + \text{etc.}\right) = 0,\\&\omega_{,,} dx \left(N_{,,} - \frac{dP_{,,}}{dx} + \text{etc.}\right) = 0,\\&\text{etc.}\end{aligned}$$

expressions auxquelles on satisfera, art. 19, en faisant

$$\left.\begin{aligned}&N - \frac{dP}{dx} + \text{etc.} = 0\\&N_{,} - \frac{dP_{,}}{dx} + \text{etc.} = 0\\&N_{,,} - \frac{dP_{,,}}{dx} + \text{etc.} = 0\\&\text{etc.}\end{aligned}\right\}\ (71).$$

Telles sont, dans le cas présent, les relations qui doivent avoir lieu pour que la courbe appartienne à un maximum ou à un minimum. Comme l'on voit, ces conditions sont analogues à celle exprimée à l'art. 19.

29. — Comme application de la théorie que nous venons d'exposer, proposons-nous de trouver les relations qui doivent exister entre les variables x, y et z pour que l'expression suivante

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{x}} \quad (72),$$

que nous poserons ici égale à Vdx, expression (72) qui appartient au problème de la brachystochrone, ou ligne de la plus vite descente, soit un minimum.

Pour plus de simplicité dans les calculs, les axes coordonnés sont disposés comme l'indique la fig.8.

Pour simplifier, posons $\frac{dy}{dx}=p$ et $\frac{dz}{dx}=p_{,}$, d'où $dy=pdx$ et $dz=p_{,}dx$.

En substituant dans la formule précédente, nous aurons

$$\frac{\sqrt{dx^2+p^2dx^2+p_{,}^2dx^2}}{\sqrt{x}} \text{ ou } \frac{\sqrt{(1+p^2+p_{,}^2)dx^2}}{\sqrt{x}} \text{ ou } \frac{\sqrt{1+p^2+p_{,}^2}}{\sqrt{x}}dx.$$

Donc, dans le cas présent, l'expression $Vdx$ est représentée par $\frac{\sqrt{1+p^2+p_{,}^2}}{\sqrt{x}}dx$ ou

$$V=\frac{\sqrt{1+p^2+p_{,}^2}}{\sqrt{x}}. \quad (73).$$

Et comme le problème ne comporte que les variables $x$, $y$, $z$, les termes des équations (69) qui contiennent $\omega_{,,}$ et les suivants n'existent pas ici.

Les autres termes se modifient par les valeurs suivantes qu'il faut y introduire, (art. 16 et 23) :

$$N=\frac{dV}{dy}=0, \quad N_{,}=\frac{dV}{dz}=0. \quad (74),$$

$$P=\frac{dV}{dp}, \qquad P_{,}=\frac{dV}{dp_{,}}. \quad (75),$$

$$Q=0,\ R=0,\ \text{etc.},\ Q_{,}=0,\ R_{,}=0,\ \text{etc.}$$

Ne conservant donc que les termes $V$, $P$, $P_{,}$, $\frac{dP}{dx}$, $\frac{dP_{,}}{dx}$, l'éq. (69) se réduira à

$$\delta\int Vdx=V\delta x+\omega P+\omega_{,}P_{,}+\int\omega dx\left(-\frac{dP}{dx}\right)+\int\omega_{,}dx\left(-\frac{dP_{,}}{dx}\right)+$$
constante. (76).

Mais, art. 28, les formules intégrales du second membre de cette équation doivent être nulles séparément, donc on a

$$\int\omega dx\left(-\frac{dP}{dx}\right)=0, \quad \int\omega_{,}dx\left(-\frac{dP_{,}}{dx}\right)=0\ ;$$

En différentiant ces équations, on obtient

$$-\omega dx\frac{dP}{dx}=0, -\omega_{,}\,dx\frac{dP_{,}}{dx}=0,$$

et en supprimant les facteurs $-\omega dx$ et $-\omega_{,}dx$, il vient

$$\frac{dP}{dx}=o \text{ et } \frac{dP_{,}}{dx}=o,$$

d'où en passant aux différentielles

$$dP=o\times dx=o \text{ et } dP_{,}=o.$$

Les intégrales de ces équations sont des constantes (art. 5, 5°, p. 12 du calc. diff.), donc

$$P=a \text{ et } P_{,}=b. \quad (77);$$

mais nous avons, ci-dessus,

$$P=\frac{dV}{dp} \text{ et } P_{,}=\frac{dV}{dp_{,}};$$

différentiant donc l'éq. (73) par rapport à p et à $p_{,}$ nous trouverons

$$\frac{dV}{dp}=d.\frac{\sqrt{1+p^2+p_{,}^2}}{\sqrt{x}} \text{ par rapport à p et divisé par } dp =$$

$$\frac{d\sqrt{1+p^2+p_{,}^2}}{dp\sqrt{x}}=\frac{d(1+p^2+p_{,}^2)^{1/2}}{dp\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\frac{(1+p^2+p_{,}^2)^{-1/2}d(1+p^2+p_{,}^2)}{dp\sqrt{x}}=$$

$$\frac{1}{2}\frac{d(1+p^2+p_{,}^2)}{(1+p^2+p_{,}^2)^{1/2}dp\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\frac{2pdp}{\sqrt{1+p^2+p_{,}^2}\,dp\sqrt{x}}=\frac{p}{\sqrt{1+p^2+p_{,}^2}\sqrt{x}}.$$

De même, on trouverait, en différentiant la même éq. (73), par rapport à $p_{,}$ :

$$\frac{dV}{dp_{,}}=\frac{p_{,}}{\sqrt{1+p^2+p_{,}^2}\sqrt{x}}; \text{ et comme } P=\frac{dV}{dp} \text{ et } P_{,}=\frac{dV}{dp_{,}},$$

on a donc $P=\frac{p}{\sqrt{x}\sqrt{1+p^2+p_{,}^2}}$ et $P_{,}=\frac{p_{,}}{\sqrt{x}\sqrt{1+p^2+p_{,}^2}}$;

substituant ces dernières valeurs dans l'éq. (77), nous aurons

$$\frac{p}{\sqrt{x}\sqrt{1+p^2+p_{,}^2}}=a,\ \frac{p_{,}}{\sqrt{x}\sqrt{1+p^2+p_{,}^2}}=b;$$

éliminant ensuite $\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+p^2+p_{,}^2}}$ entre ces équations, il viendra

$$\frac{p}{a}=\sqrt{x}\sqrt{1+p^2+p_{,}^2} \text{ et } \frac{p_{,}}{b}=\sqrt{x}\sqrt{1+p^2+p_{,}^2} \text{ d'où}$$

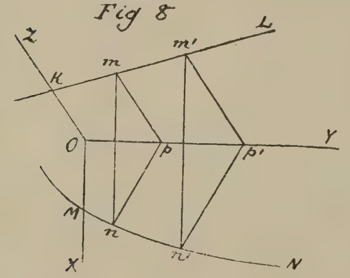
$$\frac{p}{a}=\frac{p_{,}}{b}, \text{ ou comme } \frac{dy}{dx}=p \text{ et } \frac{dz}{dx}=p_{,},$$

voir ci-dessus, nous aurons

bp=ap, ou $b\frac{dy}{dx}=a\frac{dz}{dx}$ ,et en intégrant nous obtiendrons $\int b\frac{dy}{dx}=\int a\frac{dz}{dx}$ ou $b\int dy=a\int dz$ par rapport à x, ou by = az, d'où $y=\frac{a}{b}z$ et en ajoutant une constante. nous aurons enfin

$$y=\frac{a}{b}z+c. \qquad (78),$$

équation qui représente une droite KL située dans le plan YOZ, (recueil p. 124), et qui a pour coordonnées en tous les points x=o puisqu'elle est située dans le plan des y,z, et dans ce dernier plan aux points K, m, m', etc :




y=o; z=ok ou c ;
y=op ; z=mp ;
y=op' ; z=m'p' ;
etc.

Cette éq. (78) nous montre que quelle que soit la valeur de op=y que nous considérerons comme abscisse, la valeur correspondante pm=z que nous considérerons comme ordonnée, déterminera sur la droite KL le point m par où nous devrons mener la troisième coordonnée x, parallèle à l'axe des x, pour avoir le point n, de la courbe cherchée. Donc la droite KL contient les pieds de toutes les troisièmes coordonnées qui sont toutes parallèles entr'elles puisqu'elles sont parallèles à l'axe des x. Or, ces parallèles menées par tous les points d'une même droite KL, sont comprises dans un même plan (5e livre géom. élémentaire); donc la courbe cherchée est plane. En effet, si par tous les points n, n', etc. de la courbe cherchée MN, nous abaissons des perpendiculaires sur le plan YOZ, perpendiculaires parallèles donc à OX et donnant les x, comme ces points sont tous sur la droite KL située dans ce plan, KL est la projection de la courbe sur ce plan; si de chaque point de la courbe nous abaissons ensuite des perpendiculaires sur le plan YOX, ces perpendiculaires sont toutes

égales et parallèles respectivement aux parallèles mp, m'p', etc. à oz et donnent les z; et si enfin nous abaissons des perpendiculaires sur le troisième plan coordonné XOZ, ces perpendiculaires seront toutes égales et parallèles respectivement à op, op', etc. et donnent les y ou troisièmes coordonnées.

Nous savons donc déjà que la courbe cherchée est à simple courbure, c'est-à-dire plane, et que par suite, elle peut être déterminée par deux coordonnées x et z seulement, dont l'une est verticale; remplaçons cette coordonnée verticale par y, dans l'équation (72), pour avoir les deux coordonnées x et y, et cette éq. du problème deviendra

$$\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{y}},$$

que nous poserons comme ci-dessus, égale à Vdx, d'où nous aurons $Vdx=\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{y}}$ ; et comme $\frac{dy}{dx}=p$, d'où $dy^2=p^2dx^2$, on aura $dx^2+dy^2=dx^2+p^2dx^2=dx^2(1+p^2)$; substituant cette valeur dans l'éq., il viendra

$$Vdx=\frac{\sqrt{(1+p^2)dx^2}}{\sqrt{y}}, \text{ d'où } V=\frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{y}}. \quad (79).$$

L'éq. (51), dans le cas présent, ou ce qui revient au même l'éq. (76), comme il n'y a que deux variables, se réduit à

$$\delta\int Vdx=V\delta x+\omega P+\int\omega dx\left(N-\frac{dP}{dx}\right), \quad (80),$$

car les termes en $\omega'$ disparaissent.

De ce qui précède nous tirons

$N$ ou $\frac{dV}{dy}=$éq. $(79)=d.\left(\frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{y}}\right):dy=d.\sqrt{1+p^2}\,\frac{1}{\sqrt{y}}:dy=$

puisqu'on différentie par rapport à $y=\frac{\sqrt{1+p^2}}{dy}\,d\frac{1}{\sqrt{y}}=$

$$\frac{\sqrt{1+p^2}}{dy}\,d\frac{1}{y^{1/2}}=\frac{\sqrt{1+p^2}}{dy}dy^{-1/2}=\frac{\sqrt{1+p^2}}{dy}\left(-\frac{1}{2}y^{-3/2}dy\right)=-$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{1+p^2}\,\frac{1}{y^{3/2}}=-\frac{1}{2}\sqrt{1+p^2}\,\frac{1}{\sqrt{y^3}}=-\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1+p^2}}{y\sqrt{y}}.$$

P ou $\frac{dV}{dp}$ = éq. (79) = d. $\left(\frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{y}}\right)$ = dp = puisqu'on différentie par rapport à p, on a $\frac{1}{\sqrt{y}}$ comme constante = $\frac{d.\sqrt{1+p^2}}{dp\sqrt{y}} = \frac{d(1+p^2)^{1/2}}{dp\sqrt{y}} = \frac{1}{2}(1+p^2)^{-1/2}d(1+p^2)$ divisé par $dp\sqrt{y} = \frac{1}{2}\frac{1}{(1+p^2)^{1/2}}2pdp : dp\sqrt{y} = \frac{pdp}{\sqrt{1+p^2}} : dp\sqrt{y} = \frac{p}{\sqrt{y}\sqrt{1+p^2}}$. (81).

Admettons d'abord que les points extrêmes soient fixes, alors la partie $V\delta x+P\omega$ de l'éq. (80), indépendante du signe d'intégration, s'évanouit, art. 22, et il ne reste que l'équation

$$\int \omega dx\left(N-\frac{dP}{dx}\right)=0 \text{ dans le cas du maximum ou}$$

du minimum, d'où l'équation de condition

$$N-\frac{dP}{dx}=0, \text{ ou } Ndx=dP.$$

En la multipliant par p,on obtient Npdx=pdP, et comme $\frac{dy}{dx}$=p ou dy=pdx, il vient

$$Ndy=pdP,$$

substituant cette valeur dans celle de dV, (art. 16), cette dernière se reduisant, dans le cas présent, à

$$dV=Mdx+Ndy+Pdp,$$

et remarquant que dans le cas de l'éq. (79), M ou $\frac{dV}{dx}$ se réduit à zéro, il viendra

$$dV=pdP+Pdp,$$

intégrant par rapport à p, en considérant pdP comme constante nous aurons

$$V=Pp+\text{constante}, \quad (82).$$

Substituant les valeurs de V et de P données par les éq. (79) et (81), dans l'équation (82), nous aurons

$\frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{y}} = \frac{p}{\sqrt{y}\sqrt{1+p^2}}p + \text{constante} = \frac{p^2}{\sqrt{y}\sqrt{1+p^2}}$ + constante;

en multipliant les deux termes de la première fraction par $\sqrt{1+p^2}$ et rassemblant les termes en p dans le premier membre, il vient successivement

$$\frac{1+p^2}{\sqrt{y}\sqrt{1+p^2}} = \frac{p^2}{\sqrt{y}\sqrt{1+p^2}} + \text{constante, d'où}$$

$$\frac{1+p^2}{\sqrt{y}\sqrt{1+p^2}} - \frac{p^2}{\sqrt{y}\sqrt{1+p^2}} = c^{te},$$

d'où $\frac{1}{\sqrt{y}}\left(\frac{1+p^2-p^2}{\sqrt{1+p^2}}\right) = c^{te}$, d'où $\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = c^{te}$,

d'où $\frac{1}{\sqrt{y(1+p^2)}} = c^{te}$, et en élevant au carré, nous aurons

$$\frac{1}{y(1+p^2)} = (c^{te})^2, \text{ d'où } y(1+p^2) = \frac{1}{(\text{constante})^2};$$

mais l'unité divisée par le carré d'une quantité constante est encore une quantité constante; nous la représenterons par b, et nous aurons pour l'équation ci-dessus

$$y(1+p^2) = b, \text{ d'où } 1+p^2 = \frac{b}{y}, \text{ et par suite}$$

$$p^2 = \frac{b}{y} - 1 = \frac{b-y}{y} = \frac{by-y^2}{y^2}. \quad (83);$$

remplaçant p par $\frac{dy}{dx}$, et passant à la racine, il viendra

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{by-y^2}{y^2} \text{ d'où } \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{by-y^2}}{y}, \quad (84);$$

d'où $$ydy = dx\sqrt{by-y^2}$$

d'où enfin $$dx = \frac{ydy}{\sqrt{by-y^2}};$$

ce qui est l'équation de la courbe plane cherchée. Si nous la comparons à l'éq. (172), p. 150 du cal. diff., nous reconnaissons aisément que c'est celle d'une cycloïde à base horizontale, dans laquelle b serait le diamètre du cercle générateur. Si a est le rayon de cercle, b=2a, et l'équation ci-dessus devient

$$dx = \frac{ydy}{\sqrt{2ay-y^2}}, \quad (85),$$

ce qui est l'éq. (172) rappelée ci-dessus ; elle nous donne

$$x=\int\frac{ydy}{\sqrt{2ay-y^2}}, \ (86).$$

Pour effectuer l'intégration, posons $a-y=z$, d'où en élevant au carré et réduisant, il viendra $a^2-2ay+y^2=z^2$, d'où $$2ay-y^2=a^2-z^2.$$

Mais l'expression $a-y=z$ étant différentiée donne $$dy=-dz.$$

Substituant ces valeurs, ainsi que celle de $y=a-z$ tirée de $a-y=z$, dans la formule (86), on aura

$$x=\int\frac{(a-z)(-dz)}{\sqrt{a^2-z^2}}=\int\frac{-adz+zdz}{\sqrt{a^2-z^2}}=\int\frac{zdz}{\sqrt{a^2-z^2}}-\int\frac{adz}{\sqrt{a^2-z^2}}, \ (87).$$

Pour effectuer d'abord l'intégration de $\int\frac{zdz}{\sqrt{a^2-z^2}}$, multiplions par le nombre 2 les deux termes de la fraction, et nous aurons

$$\int\frac{zdz}{\sqrt{a^2-z^2}}=\int\frac{2zdz}{2\sqrt{a^2-z^2}}=-\int-\frac{2zdz}{2\sqrt{a^2-z^2}}=-\int-\frac{1}{2\sqrt{a^2-z^2}}2zdz=-\frac{1}{2\sqrt{a^2-z^2}}\int-2zdz=$$ en remarquant que $-2zdz$ est la différentielle de l'expression $a^2-z^2$ qui est sous le radical $=$ donc $=-\frac{1}{2\sqrt{a^2-z^2}}$

$$(a^2-z^2)=-\frac{a^2-z^2}{2\sqrt{a^2-z^2}}=-\frac{(\sqrt{a^2-z^2})^2}{2\sqrt{a^2-z^2}}=-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-z^2}.$$

Pour effectuer ensuite l'intégration du second terme de l'équation (87), remarquons que nous avons (équation (14) de la p. 187 du calc. intég.) :

$$\int-\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\text{arc}\left(\cos=\frac{x}{a}\right),$$

donc ici nous aurons

$$-\int\frac{adz}{\sqrt{a^2-z^2}}=\int-\frac{adz}{\sqrt{a^2-z^2}}=a\ \text{arc}\left(\cos=\frac{z}{a}\right).$$

Substituant les valeurs des intégrales que nous venons de déterminer, dans l'équation (87) et nous aurons

$$x = -\frac{1}{2}\sqrt{a^2 - z^2} + a \text{ arc}\left(\cos = \frac{z}{a}\right);$$

ou en remplacant z par sa valeur a—y, et en ajoutant la constante C, il viendra enfin pour l'équation de la courbe cherchée

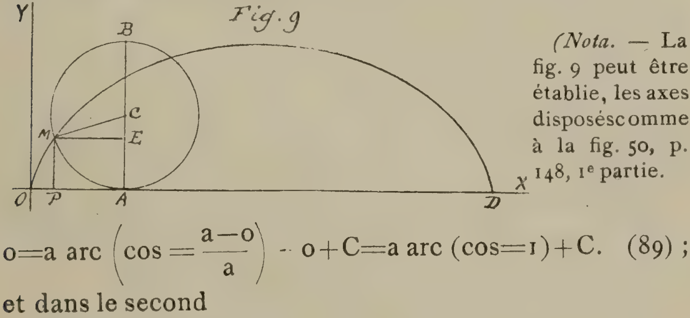
$$x = -\frac{1}{2}\sqrt{a^2 - (a-y)^2} + a \text{ arc}\left(\cos = \frac{a-y}{a}\right) + C = -$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2 - (a^2 - 2ay + y^2)} + a \text{ arc}\left(\cos = \frac{a-y}{a}\right) + C = -$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2ay - y^2} + a \text{ arc}\left(\cos = \frac{a-y}{a}\right) + C.$$

ou $x = a \text{ arc}\left(\cos = \frac{a-y}{a}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{2ay - y^2} + C.$ (88).

Comme nous avons deux constantes a et C, il nous faudra deux équations ou conditions pour les déterminer. Ainsi, par exemple, si les coordonnées des limites de l'intégrale sont, (fig. 9), pour le point o, x=o et y=o, et pour le point D, x=o D=d et y=o, en substituant ces valeurs dans l'éq. (88), nous aurons dans le premier cas




*(Nota. —* La fig. 9 peut être établie, les axes disposés comme à la fig. 50, p. 148, 1e partie.

$$o = a \text{ arc}\left(\cos = \frac{a-o}{a}\right) - o + C = a \text{ arc }(\cos = 1) + C. \quad (89);$$

et dans le second

$$d = a \text{ arc}\left(\cos = \frac{a-o}{a}\right) - o + C = a \text{ arc }(\cos = 1) + C;$$

et comme l'arc qui a l'unité pour cosinus est égal à zéro ou à un multiple de la circonférence, nous prendrons pour le point o la première hypothèse, parce que la fig. 9

nous indique qu'en ce point o les points A et M se confondent, (oA=AM), et l'éq. (89) se réduira à

$$o = a(\text{arc } o) + C = o + C = C.$$

D'un autre côté, nous remarquerons qu'au point D, l'arc qui a l'imité pour cosinus est égal à la circonférence. Représentons donc par $2\pi$ la circonférence dont le rayon est 1, nous remplacerons par suite a arc (cos=1) par $a2\pi$ ou $2\pi a$ et nous aurons

$$d = 2\pi a + C = 2\pi a + o = 2\pi a$$

d'où

$$a = \frac{d}{2\pi}.$$

Donc les constantes seront

$$C = o \text{ et } a = \frac{d}{2\pi}.$$

30. — Nous avons admis, dans ce qui précède, que les extrémités de la courbe étaient fixes ; et que par suite la partie $V\delta x + P\omega$ s'évanouissait ; mais si les extrémités ne sont pas des points fixes, on doit tenir compte de ces termes $V\delta x + P\omega$ ou $V\delta x + P(\delta y - p\delta x)$ de l'éq. $59^{bis}$ et 60, qui quoique renfermant des quantités infiniment petites $\delta x$ et $\delta y$ ne sont cependant pas à négliger ; car la somme de ces termes étant égale à zéro, par suite de l'indépendance de la partie intégrale de l'éq. (56), art. 19, et éq. $59^{bis}$, art. 23, il en résulte

$$V\delta x + P\omega = o. \quad (90),$$

et cette équation, comme toute équation différentielle, doit, en général, conduire à une intégrale qui renferme nécessairement une relation entre les variables.

Afin de donner plus de développement à l'éq. (90), nous y substituerons les valeurs de V, de P et de $\omega$, fournies par les éq. (79), (81) et (47), et nous aurons

$$\frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{y}}\delta x + \frac{p}{\sqrt{y}\sqrt{1+p^2}}(\delta y - p\delta x) = o\ ;$$

en réduisant au même dénominateur, nous obtiendrons

$$\frac{1+p^2}{\sqrt{y}\sqrt{1+p^2}}\delta x + \frac{p}{\sqrt{y}\sqrt{1+p^2}}(\delta y - p\delta x) = o,$$

et en réduisant, il viendra

$$\frac{\delta x + p^2\delta x + p\delta y - p^2\delta x}{\sqrt{y}\sqrt{1+p^2}} = o \text{ ou } \frac{\delta x + p\delta y}{\sqrt{y}\sqrt{1+p^2}} = o. \quad (91),$$

et, pour simplifier encore, ds ou élément d'un arc de courbe, art. 88, calc. diff., étant égal à

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}\text{, d'où } ds = dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\ ;$$

et en posant comme précédemment, $\frac{dy}{dx} = p$, il viendra

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+p^2}$$

cette valeur de $\sqrt{1+p^2}$ étant substituée dans l'éq. (91), nous aurons

$$o = \frac{\delta x + p\delta y}{\sqrt{x}\sqrt{1+p^2}} = \frac{\delta x + p\delta y}{\sqrt{y}\frac{ds}{dx}} = \frac{dx\delta x + pdx\delta y}{\sqrt{y}\ ds} =$$

$$\frac{dx\delta x + \frac{dy}{dx}dx\delta y}{ds\sqrt{y}} = \frac{dx\delta x + dy\delta y}{ds\sqrt{y}} = \frac{dx}{ds\sqrt{y}}\delta x + \frac{dy}{ds\sqrt{y}}\delta y\ ;$$

donc l'équation (91) simplifiée est

$$\frac{dx}{ds\sqrt{y}}\delta x + \frac{dy}{ds\sqrt{y}}\delta y = o.$$

Observons que cette équation n'aura lieu que pour les coordonnées $x'$, $y'$ et $x''$, $y''$, des points extrêmes O et D, art. 19, de sorte qu'en substituant dans l'éq. précédente les coordonnées des extrémités O et D, on aura :

au point o, $$\frac{dx'}{ds\sqrt{y'}}\delta x' + \frac{dy'}{ds\sqrt{y'}}\delta y' = o \quad (92)\ ;$$

et au point D, $$\frac{dx''}{ds\sqrt{y''}}\delta x'' + \frac{dy''}{ds\sqrt{y''}}\delta y'' = o. \quad (93)\ ;$$

ces points extrêmes n'étant pas fixes, d'après notre seconde hypothèse, peuvent être assujetis à se mouvoir sur les courbes LM et NP, fig, 10, et remarque III de l'art, 20, art. 16 et 23, et dont les équations sont

$$M = o \text{ et } N = o\ ;$$

et puisque M et N sont des fonctions, l'une de $x'$ et de $y'$,

et l'autre de x″ et de y″, nous aurons (éq. 77, p. 57, calc. diff. et art 9 ci-avant):

$$\frac{dM}{dx'}\delta x' = \frac{dM}{dy'}\delta y' = o, \quad \frac{dN}{dx''}\delta x'' + \frac{dN}{dy''}\delta y'' = o.$$

Nous allons, à l'aide de ces éq., éliminer l'une des variations contenues dans les éq. (92) et (93), et alors l'autre de ces variations deviendra un facteur commun qu'on pourra supprimer.

Des éq, M=o et N=o, ou plutôt des éq. précédentes, nous tirerons successivement

$$\frac{dM}{dx'} + \frac{dM}{dy'}\frac{\delta y'}{\delta x'} = o \text{ ou } \frac{dM}{dy'}\frac{\delta y'}{\delta x'} = -\frac{dM}{dx'} \text{ ou } \frac{\delta y'}{\delta x'} = -\frac{dM}{dx'} : \frac{dM}{dy'} \text{ ou}$$

enfin
$$\frac{\delta y'}{\delta x'} = \frac{dM \times dy'}{dx' \times dM} = \frac{dy'}{dx'} = M',$$

de même
$$\frac{\delta y''}{\delta x''} = N'.$$

En substituant ces valeurs dans les éq. (92) et (93), nous obtiendrons en divisant la première par $\delta x'$ et la seconde par $\delta x''$ et remplaçant les *valeurs* de M′ et de N′ par M′ et N′ :

$$\frac{dx'}{ds\sqrt{y'}} + \frac{dy'}{ds\sqrt{y'}}\frac{\delta y'}{\delta x'} = o, \text{ ou } \frac{dx'}{ds\sqrt{y'}} + \frac{dy'}{ds\sqrt{y'}}M' = o;$$

et
$$\frac{dx''}{ds\sqrt{y''}} + \frac{dy''}{ds\sqrt{y''}}\frac{\delta y''}{dx''} = o, \text{ ou } \frac{dx''}{ds\sqrt{y''}} + \frac{dy''}{ds\sqrt{y''}}N' = o;$$

de ces éq., nous tirons successivement

$$dx' + dy'M' = o \times ds\sqrt{y'} = o, \text{ d'où } 1 + \frac{dy'}{dx'}M' = o,$$

d'où enfin
$$\frac{dy'}{dx'} = -\frac{1}{M'},$$

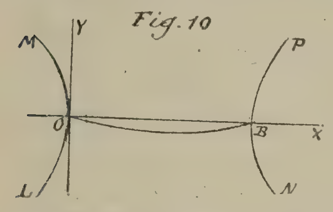
de même
$$\frac{dy''}{dx''} = -\frac{1}{N'}.$$

Si, maintenant, au moyen de l'éq. (88), nons éliminons la valeur de x contenue avec y dans les fonctions M′ et N′, ces fonctions se changeront en d'autres fonctions $M_1$ et $N_1$ qui seront composées en y de la même manière, de sorte que si l'on fait y=o dans l'une et dans l'autre, ces

fonctions se réduiront à une même constante a, qui, suivant le cas, pourra être zéro ; nous aurons donc alors

$$\frac{dy'}{dx'} = a,\ \frac{dy''}{dx''} = a.$$

Or, il est facile de voir que ces valeurs sont précisément celles qui ont lieu aux points O et B, fig. 10, car en ces points, on a $y=0$, comme nous venons de le supposer ; et si l'on considère que $\frac{dy}{dx}$ représente, en général, l'angle que la tangente de l'élément ou l'élément de la courbe fait au point x, y, avec l'axe des abscisses, (art. 3 et 51, calc. diff.); on constate que les éléments en O et B, forment des angles égaux avec l'axe des abscisses en vertu des éq. ci-dessus, et que par suite les tangentes en O et en B sont parallèles — (voir recueil p. 124, 1° et 2° et p. 126, à 7°, 5ª ).




31. — Nous allons examiner maintenant la classe de problèmes dits de maxima ou minima relatifs ; c'est-à-dire des problèmes dans lesquels, on considère des courbes jouissant d'une propriété commune, et l'on doit chercher quelle est, parmi ces courbes, celle pour laquelle une certaine formule intégrale est un maximum ou un minimum. Par exemple :

*Déterminer, entre toutes les courbes planes de même longueur, quelle est celle pour laquelle la formule intégrale* $\int Ydx$ *est un maximum ou un minimum.*

A cet effet, nous avons vu, art 88, calc. diff. que l'élément d'une courbe plane ou différentielle d'un arc S de courbe a pour expression

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

d'où la longueur de cette courbe sera l'intégrale de cette expression ou

$$S = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

En faisant passer le facteur dx en dehors du radical, il viendra

$$S = \int dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Or, les conditions du problème exigent que cette expression de la longueur d'un arc S de courbe soit une quantité constante ; donc la première condition du problème nous donnera

$$\int dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \text{constante} = A. \quad (94).$$

Et la variation, (aussi bien que la différentielle) d'une constante, étant égale à zéro, nous déduirons de l'éq. ci-dessus

$$\delta \int dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = 0. \quad (95).$$

La seconde condition exprimée dans le problème, étant

$$\int Y dx = \text{maximum ou minimum},$$

cette condition sera remplie si l'on a, (art. 19 ci-avant)

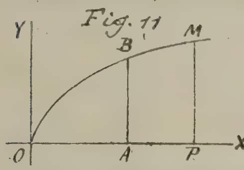
$$\delta \int Y dx = 0, \quad (96) ;$$

d'où $\int Y dx$=constante (art. 8 et art. 9 précédents et 5° p. 12 calc. dift.).

Nous pouvons considérer, sous un certain point de vue, l'intégrale $\int Y dx$ comme l'expression d'une surface, (art. 62, 1e partie cal. intég.), lors même que Y, (fonction de y et non pas cette ordonnée même) ne serait pas d'une seule dimension, ainsi que l'exige la formule (88) de l'article 62 rappelé ci-dessus. — En effet, en prenant autant d'unités linéaires que Y, selon le cas, renferme d'unités, ou carrées, ou cubiques, ou autres, on pourra toujours ramener cette fonction à prendre la forme d'une quantité d'une seule dimension ou linéaire. Par exemple, si Y représentait la fonction $ay^2$, qui est de trois dimensions, et que le centimètre fût l'unité, en prenant autant de centimètres cubes qu'il y a d'unités dans $ay^2$, on aurait pour Y un parallélipipède dont la longueur serait $ay^2$ et qui aurait l'unité pour ses deux autres dimensions.

Représentant donc par $a^2$ le carré de l'unité, on remplacerait $ay^2$ par $\frac{ay^2}{\alpha^2}$, et alors Y prendait la forme d'une expression linéaire.

Cela étant, si nous représentons, fig. 11, par o M P la surface qui a $\int Y\,dx$ pour expression, comme nous l'avons fait art. 62, calc. int. nous prendrons pour origine, un point autre que celui où, comme sur la figure 11, l'intégrale $\int Y\,dx$ s'évanouit, et ce, dans le but de ne pas trop nous restreindre dans le choix que nous pouvons faire de cette origine. Donc, pour plus de généralité nous prendrons pour nouvelle origine, (p. 123, 1°, de mon recueil), au lieu du point o, un point quelconque A, dont les coordonnées par rapport à la première origine o, sont $x'=a$ et $y'=o$, d'où nous aurons.




OP ou $x = OA+AP = a+x'$ ou $x=x'+a$; $y=y'+o=y'$; et il suffira donc de remplacer x par $x'+a$ dans les formules données pour que ces formules soient rapportées aux coordonnées $x'$ et $y'$ ou y ; de sorte que si la formule qui nous est donnée et qui s'évanouit avec l'abscisse x, ayant pour origine o, est exprimée par

$$\int Y dx = fx$$

autrement dit par aire o M P $= fx$, (97) ; en introduisant les nouvelles coordonnées, nous aurons

$$\int Y dx = fx = f(x'+a).$$

Plutôt, on a aussi

$\int Y dx =$ aire OMP $=$ aire $(x=x')+$ aire $(x=a)=$ aire ABMP $+$ aire OBA. (98)

L'aire OBA se déterminera en admettant que l'espace OMP se réduise à OBA lorsque $x=a$, ce qui changera l'éq. (97) en aire OBA $= fa$.

Substituant cette valeur dans l'éq. (98), et remplaçant aire ABMP par $\int Y dx'$, il viendra

$$\int Y dx = \int Y dx' + fa. \quad (99).$$

Remarquons que dans la premiére intégrale indiquée par $\int Y dx$, nous comptons les abscisses à partir du point o, tandis que dans la seconde $\int Y dx'$, nous les comptons depuis le point A, ce qui revient à supposer que la formule $\int Y dx$, renfermée dans l'éq. (96), au lieu de se rapporter à l'origine O, se rapporte à une origne quelconque A, du moment

qu'on y ajoute une constante fa, que nous représenterons par C ; dans cette hypothèse, la formule (99) ci-dessus nous donnera $\int Ydx = \int Ydx' + C$;
et en substituant dans l'éq. (96), celle-ci deviendra

$$\delta\left(\int Ydx' + C\right) = 0,$$

ou en admettant la nouvelle origine, et supprimant l'accent de x désormais inutile, nous aurons en général

$$\delta\left(\int Ydx + C\right) = 0. \quad (100).$$

La constante C qui entre dans cette équation étant arbitraire, car l'origine nouvelle peut être quelconque et son abscisse a pu donc varier, cette constante C ne diffère de la constante déterminée A (éq. 94), qu'en ce qu'elle peut devenir A par une valeur particulière, ce qui donne la condition $C = nA.$ (101),
n étant un facteur indéterminé qui se réduit à l'unité lorsque C=A ; substituant, dans l'éq. (101), à A sa valeur constante, donnée par l'éq. (94), nous optiendrons

$$C = n\int dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}};$$

et par suite la formule $\int Ydx + C$ deviendra

$$\int Ydx + n\int dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

ou, en comprenant toute l'expression sous le signe d'intégration, (art. 6, calc. intég. pag. 182), nous aurons

$$\int \left(Ydx + ndx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\right);$$

et l'éq. (100) deviendra en plaçant dx en évidence,

$$\delta\int dx\left(Y + n\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\right) = 0,$$

d'où en faisant $\frac{dy}{dx} = p$, (voir précédement, art. 11 et suivants), nous aurons

$$\delta\int dx\left(Y + n\sqrt{1 + p^2}\right) = 0. \quad (102).$$

L'équation (102) exprime d'ailleurs d'une manière implicite une condition de maximum ou de minimum ; car la partie constante $\int dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$ (voir éq. 94) ou $\int dx\sqrt{1 + p^2}$

étant commune à toutes les courbes que représente cette équation, si ces courbes ont un maximum ou un minimum, cela ne pourra provenir que de la partie $\int Ydx$, si cette partie en est susceptible.

Le problème ne dépend donc plus que de l'éq. (102), qui change la question de maximum ou de minimum relatif en celle de maximum ou de minimum absolu.

Par la théorie que nous venons d'exposer nous sommes conduits à un procédé qui revient évidemment à multiplier la formule $dx\sqrt{1+p^2}$ par une constante arbitraire n et à l'ajouter à l'autre $\int Ydx$. C'est la règle que Euler proposa le premier pour convertir un maximum ou un minimum relatif en maximum ou minimum absolu.

Nous pouvons donc conclure de ce qui précède, qu'il est maintenant permis d'appliquer la formule (51) art. 16, à l'équation (102). Par exemple, en admettant l'hypothèse que les points extrêmes de la courbe soient fixes, cette expression(51) se réduisant à la partie qui est sous le signe d'intégration, (art. 22 et 19), nous aurons, art. 19 :

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.} = 0. \quad (103);$$

et si nous comparons la partie de l'éq. (102), qui est affectée du signe d'intégration, ou $dx\left(Y + n\sqrt{1+p^2}\right)$, à la formule suivante

$$Vdx = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + \text{etc.},$$

nous aurons $\qquad V = Y + n\sqrt{1+p^2}$, (104),

et par suite, éq. (44) et (45), art. 16, et éq. (104)

$$M \text{ ou } \frac{dV}{dx} = 0,\ N \text{ ou } \frac{dV}{dy} = \frac{dY}{dy},\ P \text{ ou } \frac{dV}{dp} = nd.\sqrt{1+p^2} : dp =$$

$$nd\,(1+p^2)^{1/2} : dp = n\frac{1}{2}(1+p^2)^{-1/2}\,d\,(1+p^2) : dp =$$

$$\frac{1}{2}n\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\,2p\,dp : dp = \frac{np}{\sqrt{1+p^2}};\ Q = \frac{dV}{dq} = 0,\ \ R = \text{etc.}$$

Ces valeurs substituées dans l'éq. (103) donneront

$$\frac{dY}{dy} - \frac{d\,\dfrac{np}{\sqrt{1+p^2}}}{dx} = 0.$$

Si nous effectuons la différentiation du second terme par la règle des fractions (art. 11, p. 16, calc. diff.), et si nous faisons passer le diviseur dx en dehors, nous obtiendrons

$$\frac{dY}{dy}-\frac{1}{dx}\,nd\,\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\ \text{ou}\ \frac{dY}{dy}-\frac{1}{dx}n\frac{(\sqrt{1+p^2}\,dp-pd\sqrt{1+p^2})}{1+p^2}$$

$$\text{ou}\ \frac{dY}{dy}-\frac{1}{dx}n\frac{(\sqrt{1+p^2}\,dp-pd\ (1+p^2)^{1/2})}{1+p^2}\ \text{ou}\ \frac{dY}{dy}-$$

$$\frac{1}{dx}n\frac{\left[\sqrt{1+p^2}\,dp-p\,\frac{1}{2}(1+p^2)^{-1/2}\,d\,(1+p^2)\right]}{1+p^2}\ \text{ou}\ \frac{dY}{dx}-$$

$$\frac{1}{dx}\,n\left(\sqrt{1+p^2}\,dp-\frac{1}{2}\,p\,\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\,2p\,dp\right):1+p^2\ \text{ou}\ \frac{dY}{dx}-$$

$$\frac{1}{dx}\,\frac{n\left(\sqrt{1+p^2}-\frac{p^2}{\sqrt{1+p^2}}\right)dp}{1+p^2}=0\,;$$

en réduisant au même dénominatour et simplifiant, nous trouverons

$$\frac{dY}{dy}-\frac{1}{dx}\,\frac{\frac{n(1+p^2-p^2)}{\sqrt{1+p^2}}}{1+p^2}\,dp=\frac{dY}{dy}-\frac{1}{dx}\,\frac{ndp}{\sqrt{1+p^2}\,(1+p^2)}=$$

$$\frac{dY}{dy}-\frac{1}{dx}\,\frac{ndp}{(\sqrt{1+p^2})^3}=\frac{dY}{dy}-\frac{1}{dx}\,\frac{ndp}{(1+p^2)^{3/2}}=0\,;$$

multipliant par dy, et changeant $\frac{dy}{dx}$ en p, (art 11), nous aurons

$$dY-\frac{dy}{dx}\,\frac{ndp}{(1+p^2)^{3/2}}=0,\ \text{ou}\ dY-\frac{pndp}{(1+p^2)^{3/2}}=0.\quad (105).$$

Comme le numérateur pndp ou npdp est, à un facteur constant près, la différentielle du dénominateur, qui est

$$d.(1+p^2)^{3/2}=\frac{3}{2}(1+p^2)^{1-3/2=-1/2}d(1+p^2)=\frac{3}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\,2pdp=$$

$\frac{3}{\sqrt{1+p^2}}$pdp, nous pourrons intégrer par le procédé de l'art. 9 du calc. intégr., et nous aurons: faisons d'abord $(1+p^2)=z$

et par suite $2pdp=dz$, d'où $pdp=\frac{dz}{2}$ et l'éq. (105) deviendra

$$dY-\frac{\frac{n}{2}dz}{z^{3/2}} \text{ ou } dY-\frac{n}{2}z^{-3/2}dz=0,$$

intégrant nous aurons

$$Y-\frac{n}{2}\,\frac{z^{-3/2+1}}{-\frac{3}{2}+1} \text{ ou } Y-\frac{n}{2}\,\frac{z^{-3/2}}{-\frac{1}{2}}=\int o=\text{constante}=b\,;$$

ou

$$Y-\frac{n}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}\,\frac{1}{z^{1/2}} \text{ ou } Y+n\,\frac{1}{z^{1/2}} \text{ ou } Y+\frac{n}{\sqrt{z}}=b,$$

remplaçant maintenant z par sa valeur, il viendra

$$Y+\frac{n}{\sqrt{1+p^2}}=b, \text{ d'où } \frac{n}{\sqrt{1+p^2}}=b-Y \text{ ou } \frac{n}{b-Y}=\sqrt{1+p^2}\,;$$

remplaçant p par $\frac{dy}{dx}$, et multipliant ensuite par dx, nous obtiendrons

$$\frac{n}{b-Y}dx=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx, \text{ d'où } \frac{ndx}{b-Y}=\sqrt{\frac{dx^2+dy^2}{dx^2}}\times dx,$$

ou $\frac{ndx}{b-Y}=\sqrt{dx^2+dy^2}$, d'où en élévant au carré les deux membres :

$$\frac{n^2}{(b-Y)^2}dx^2=dx^2+dy^2,$$

d'où, en faisant passer $dx^2$ dans le premier membre, et en le mettant en facteur commun, on aura

$$\left[\frac{n^2}{(b-Y)^2}-1\right]dx^2=dy^2,$$

et, en réduisant au même dénominateur

$$\left[\frac{n^2}{(b-Y)^2}-\frac{(b-Y)^2}{(b-Y)^2}\right]dx^2=dy^2, \text{ ou } \left[\frac{n^2-(b-Y)^2}{(b-Y)^2}\right]dx^2=dy^2,$$

d'où

$$dx^2=dy^2:\frac{n^2-(b-Y)^2}{(b-Y)^2}=\frac{dy^2\,(b-Y)^2}{n^2-(b-Y)^2}\,;$$

en extrayant la racine carrée des deux membres, il viendra

$$dx=\frac{(b-Y)\,dy}{\sqrt{n^2-(b-Y)^2}} \quad (106)\,;$$

et en intégrant, nous aurons enfin

$$x = \int \frac{(b-Y)dy}{\sqrt{n^2-(b-Y)^2}} + c. \ (107),$$

expression dans laquelle on doit substituer la valeur de la fonction Y, *pour avoir l'équation de la courbe cherchée.*

*Remarque.*— Les constantes b, c et n se détermineront par les conditions que la courbe devra passer par les points fixes O et B, et que la partie de la courbe comprise entre ces limites soit d'une longueur déterminée.

32. — Lorsque la fonction Y de y est cette ordonnée y même, alors l'intégrale $\int Ydx$ représente, (art. 62, p. 244, calc. intég.), l'aire d'une courbe plane, et le problème énoncé à l'article 31, se ramène à celui-ci :

*Déterminer, parmi toutes les courbes planes de même longueur, quelle est celle dont la surface, représentée par $\int ydx$, est un maximum ou un minimum.*

A cet effet, remarquons que l'équation (106) se ramène à celle-ci, en remplaçant Y par y :

$$dx = \frac{(b-y)dy}{\sqrt{n^2-(b-y)^2}} \quad (108);$$

et, en remarquant que le numérateur est, à une constante près, la différentielle du dénominateur, (car celle-ci est $d\sqrt{n^2-(b-y)^2} = d\sqrt{-(b-y)^2} = d\sqrt{-(b^2-2by+y^2)} =$ $d\sqrt{-b^2+2by-y^2} = d(2by-y^2)^{1/2} = \frac{1}{2}(2by-y^2)^{-1/2}d(2by-y^2) =$ $\frac{1}{2}\frac{1}{(2by-y^2)^{1/2}}(2bdy-2ydy) = \frac{bdy-ydy}{\sqrt{2by-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{2by-y^2}}$ $(b-y)\,dy$), nous intégrerons le second membre de l'éq. (108), en faisant, (art. 9 du calc. intég.) :

$$n^2-(b-y)^2 = z,$$

et nous aurons

$$dz = -2(b-y)d(b-y) = -2(b-y)(-dy) = 2(b-y)dy,$$

et, en substituant dans l'éq. (108), nous obtiendrons

$$dx = \frac{\frac{dz}{2}}{\sqrt{z}} = \frac{dz}{2\sqrt{z}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{z}}dz = \frac{1}{2}\frac{1}{z^{1/2}}dz = \frac{1}{2}z^{-1/2}\,dz,$$

et, en intégrant il viendra

$$x = \int \frac{1}{2} z^{-1/2} dz = \frac{1}{2} \frac{z^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \text{constante} = \frac{1}{2} \frac{z^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c^{te} =$$

$z^{1/2}$ + constante ;

Substituant la valeur de z dans cette expression et représentant par c la constante nons aurons

$$x = [n^2 - (b-y)^2]^{1/2} + c = \sqrt{n^2 - (b-y)^2} + c\,;$$

d'où $\quad (x-c)^2 = n^2 - (b-y)^2 = n^2 - (y-b)^2\,;$

d'où enfin $\quad (x-c)^2 + (y-b)^2 = n^2\,,$

ce qui est l'équation cherchée, laquelle représente un cercle décrit avec le rayon n, et dont les coordonnées du centre seraient c et b. (voir mon recueil p. 141, éq. (2).).

*Remarque.* — Nous pouvons observer qu'en donnant une forme particulière à la fonction Y, comme nous venons de le faire dans ce dernier exemple, nous arriverons à obtenir la solution d'une foule de problèmes analogues.

NOTA. — Comme nous venons de voir, on distingue les maxima et minima absolus, et les maxima et minima relatifs, et l'on peut convertir des questions de maxima ou minima relatifs en d'autres de maxima ou minima absolus.



# Table des Matières

## Calcul des différences



## Calcul des variations

# Cours d'Analyse Infinitésimale

TROISIÈME PARTIE

## CALCUL DES PROBABILITÉS

Suite au calcul différentiel, au calcul intégral, au calcul des différences et à celui des variations faisant l'objet des premières parties

PAR

ALBERT J. M. CREFCŒUR,

ADJOINT DU GÉNIE



ANVERS

IMPRIMERIE DE VLIJT, RUE NATIONALE, 54

1908

# Cours d'Analyse Infinitésimale

TROISIÈME PARTIE

## CALCUL DES PROBABILITÉS

**Suite au calcul différentiel, au calcul intégral, au calcul des différences et à celui des variations faisant l'objet des deux premières parties**

# CALCUL DES PROBABILITES

## Définitions

1. — Les premiers éléments du calcul des probabilités sont dus à Fermat et à Pascal, savants mathématiciens français du 17$^{e}$ siècle.

Lorsqu'on a des données précises et suffisantes, l'application des formules algébriques à la résolution des diverses questions que l'on peut envisager conduit toujours à des résultats d'une exactitude rigoureuse.

Mais les questions que l'on peut avoir à résoudre ne présentent pas toujours des données pouvant amener cette exactitude. Ainsi, par exemple, les évènements de la vie sociale dépendent de causes si multiples et si variées qu'ils paraissent être de simples caprices du hazard et par suite échapper à l'analyse mathématique.

Cependant, si l'on considère ces évènements fortuits dans leur ensemble, en se servant de la statistique, on peut, par analogie, en tirer des éléments précieux de calculs et découvrir des lois remarquables, lois qui n'ont du reste rien d'absolu ; mais lorsqu'elles sont appliquées à un grand nombre de cas semblables, elles peuvent conduire à un degré d'exactitude assez grand pour pouvoir être admises comme bases d'opérations dans certaines administrations.

En outre, on en fait d'autres applications, par exemple : en physique ou en astro physique, la détermination de l'intensité moyenne d'un rayonnement lumineux ou autre sur une surface, dans des conditions données ; en géodésie, la question de l'éloignement moyen des points d'un triangle à un sommet ; en balistique, l'application des probabilités aux questions pratiques du tir ; etc.

Le calcul des probabilités forme l'objet d'une science pratique imposée par la nature des choses, car de tout temps les hommes ont fait des probabilités, même avant l'existence des traités didactiques ; tout comme il en est de même pour d'autres sciences : mécanique, etc.

2. — Un évênement est dit *possible*, lorsque sa réalisation ne rencontre aucun obstacle.

3. — On appelle *chances* les motifs ou les raisons qui nous font supposer qu'un évênement aura ou n'aura pas lieu.

4. — Les chances sont ou *favorables* ou *défavorables*. Les premières sont celles qui paraissent militer pour la réussite ou l'arrivée de l'évênement ; les secondes sont celles qui sont opposées à l'existence de cet évênement.

5. — En langage ordinaire, on dit, en général, qu'un évênement est *probable* lorsqu'on s'attend à le voir se produire, ou bien quand les chances favorables l'emportent sur les chances contraires. Mais, la science, elle, plus exacte dans ses définitions, entend par *probabilité mathématique* le rapport qui existe entre le nombre de chances favorables à l'évênement et le nombre total de chances favorables et défavorables. Par exemple, si dans une urne on a 4 boules blanches et 6 boules noires et qu'on veuille savoir quelle est la probabilité d'en extraire une boule blanche, puisqu'il y a 4 chances favorables et 6 défavorables, soit $4+6=10$ chances ou 10 boules en tout, la probabilité sera exprimée par $\frac{4}{10}$.

On voit donc que la probabilité est d'autant plus grande que le numérateur de la fraction est plus grand par rapport au dénomérateur.

6.— On appelle *évênements contradictoires*, ceux qui s'excluent réciproquement. Ainsi, si notre urne contient des boules blanches, noires et rouges, la chance d'en extraire une boule blanche est contradictoire à celle d'en retirer une noire ou une rouge.

7.—Lorsque les chances favorables et défavorables sont égales, les premières sont donc la moitié du tout et la probabilité est par suite exprimée par $\frac{1}{2}$.

Donc, $\frac{1}{2}$ *réprésente l'incertitude*. En effet, si l'on a 5 boules blanches et 5 noires, la probabilité est exprimée par $\frac{5}{5+5} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ et l'on a autant de chances évidemment de retirer une noire qu'une blanche.

Si, enfin, toutes les chances sont favorables, les deux termes de la fraction sont égaux, et le rapport est égal à l'unité ; mais toutes les chances étant favorables, on a la certitude ; donc, *la probabilité exprimée par l'unité représente la certitude*. En effet si les 10 boules sont blanches, il est clair qu'on à la certitude de retirer une blanche de l'urne, et la probabilité est exprimée par $\frac{10}{10} = 1$.

Si l'on avait dans l'urne 0 boule blanche et 10 noires la probabilité de retirer une blanche serait exprimée par $\frac{0}{10} = 0$ ; en effet, puisqu'il n'y a pas de boule blanche.

En général, art. 5, si l'on a dans l'urne *a* boules blanches et *b* boules noires, la probabilité de retirer une boule blanche sera exprimée par $\frac{a}{a+b}$ ; et celle de retirer une noire par $\frac{b}{a+b}$ ; d'où la somme de ces deux probabilités est $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = \frac{a+b}{a+b} = 1$ ; ce qui représente la certitude, car alors on a la certitude de retirer une blanche ou une noire.

Donc, *la somme des probabilités égale 1* ; car, si sur 10 boules de l'urne, il y en a 4 blanche et 6 noires, il y a une probabilité égale à $\frac{4}{10}$ de tirer une blanche et une probabilité de $\frac{6}{10}$ de tirer une noire ; soit $\frac{4}{10} + \frac{6}{10} = \frac{10}{10} = 1$, ce qui,

comme nous avons vu, exprime la certitude ; et, en effet, il y a alors certitude de tirer une blanche ou une noire.

Si a=o, la probabilité $\frac{a}{a+b}$ devient $\frac{o}{o+b}=\frac{o}{b}=o$, et, en effet, puisqu'il n'y a pas de boule blanche. Lorsque a=b, il vient $\frac{a}{a+b}=\frac{a}{a+a}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$; c'est l'incertitude et cela est évident, les boules étant en même nombre de chaque sorte. Enfin, quand b=o, on obtient $\frac{a}{a+o}=\frac{a}{a}=1$ et l'on a la certitude de tirer une blanche puisque ce sont toutes blanches.

Concluons donc que *toute probabilité est comprise entre les limites o et 1*, car le dénominateur de la fraction n'est jamais plus petit que le numérateur, et celui-ci n'est jamais plus petit que zéro. On peut admettre évidemment tous les intermédiaires entre o et 1.

Une *probabilité est donc* $< 1$, car 1 exprime la certitude.

Nous définirons donc la *probabilité d'un évènement*, lorsqu'on considère deux évènements contradictoires, le *rapport du nombre de chances ou de cas favorables à la production de l'évènement attendu, à la somme des nombres de chances ou de cas favorables et de chances ou de cas défavorables.*

8. — En général, si l'urne renferme *a* boules blanches, *b* boules noires, *c* boules rouges, etc, la probabilité de tirer une boule blanche sera représentée par $\frac{a}{a+b+c+\ldots}$. L'extraction d'une boule blanche, ou celle d'une noire ou rouge, etc, constituent des évènements contradictoires.

9. — On appelle *probabilités objectives*, les probabilités qui, comme celles que nous venons d'examiner, sont définies, rigoureusement et s'imposent à notre raisonnement.

10. — On entend par *probabilités subjectives*, celles qui ne sont pas établies sur des données exactes et suffisantes, mais qui reposent sur notre sentiment ; ces probabi-

lités ne sont pas susceptibles d'une définition aussi précise que les premières. Aussi, par exemple, soit le cas d'une urne contenant 10 boules en tout, blanches et noires. On ignore le nombre de boules qu'il y a de chaque couleur. On se demande quel évênement on doit attendre. Il n'y a évidemment pas plus de raison pour s'attendre à extraire une boule blanche plutôt qu'une noire ; on a la même incertitude que si l'on avait une urne renfermant un nombre égal de boules blanches et noires, soit 5 blanches et 5 noires. Or, dans ce dernier cas, la probabilité serait exprimée par $\frac{5}{10}$ ou $\frac{1}{2}$. Et puisqu'on se trouve dans la même incertitude dans le premier cas, nous représenterons donc la probabilité. pour ce premier cas, également par $\frac{1}{2}$ ; mais remarquons que cette dernière probabilité ne repose pas sur des données exactes et suffisantes comme dans le second cas ; elle est établie d'après notre sentiment, c'est pourquoi on l'appelle *subjective* ; tandis que dans le second cas elle pourrait être appelée *objective*.

## Addition des probabilités

11. — Supposons que notre urne contienne, par exemple, *a* boules blanches, *b* boules noires, *c* boules rouges, etc., soit en tout *n* boules. Les probabilités $P_1$, $P_2$, etc., d'extraire une boule blanche, ou une boule noire, etc., seront exprimées, respectivement, par les quantités (art. 7) ;

$$P_1 = \frac{a}{n}; \ P_2 = \frac{b}{n}; \ P_3 = \frac{c}{n}; \ \text{etc.}$$

Admettons que la production d'un évênement dépende de l'extraction soit d'une boule blanche, soit d'une boule noire, du moment que c'est une boule d'une de ces 2 couleurs ; et que nous voulions exprimer la probabilité de cet évênement. Il est évident que le nombre de chances ou cas favorables à cet évênement est $a + b$ ; et comme le

nombre total de cas, favorables et défavorables, est n, nous aurons, art. 7, la probabilité

$$P = \frac{a+b}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \text{d'après ce qui précède} = P_1 + P_2 .$$

Ce résultat peut donc être exprimé comme il suit :

*Si la production d'un certain évênement dépend de la production de l'un ou de l'autre de 2 évênements dont les probabilités sont respectivement représentées par* $P_1$ *et* $P_2$, *la probabilité de ce nouvel évênement est égale à*

$$P = P_1 + P_2 .$$

Nous pouvons généraliser et dire :

*Lorsqu'un évênement E dépend de la production de l'un ou de l'autre des n évênements* $E_1$; $E_2$; $E_3$;... $E_n$ *dont les probabilités sont respectivement* $P_1$; $P_2$; $P_3$;... $P_n$, *la probabilité P de E est exprimée par*

$$P = \Sigma P_i \quad (1)$$

formule dans laquelle le signe $\Sigma$ signifie somme (voir 2me partie, p. 31); et où i varie de 1 à n c'est-à-dire représente successivement 1, 2, 3, ... jusqu'en général n ; on a donc $P = \text{somme} \quad P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n$ .

*Corollaire.— Si l'évênement proposé pouvait se présenter à la suite de la production de l'un quelconque de tous les évênements possibles dans le cas envisagé ; par exemple, si cet évênement peut se présenter dans le cas de l'urne précitée, à la suite de la production d'une boule blanche, ou d'une noire, ou d'une rouge, etc, autrement dit d'une boule quelconque de l'urne, la probabilité de l'évênement considéré* serait aussi exprimée par

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots P_n . \quad (2)$$

mais, art. 7,

$$P_1 = \frac{a}{n} ; \; P_2 = \frac{b}{n} ; P_3 = \frac{c}{n} ; \ldots P_n = \frac{x}{n} ;$$

d'où

$$P = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n} + \ldots \frac{x}{n} ;$$

et comme $a + b + c + \ldots + x = n$, il vient enfin

$P = \frac{n}{n} = 1 =$ la certitude (art. 5) ; et, en effet, puisque l'évênement doit se produire à la suite d'une boule quelconque.

## Probabilité relative

12.— Notre urne contenant *a* boules blanches, *b* boules noires, *c* boules rouges, *d* boules jaunes, etc., les probabilités $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$, etc, seront proportionnelles à *a*, *b*, *c*, *d*, etc., car, art. 7, on a :

$$P_1 = \frac{a}{n} \therefore \frac{P_1}{a} = \frac{1}{n};$$

$$P_2 = \frac{b}{n} \therefore \frac{P_2}{b} = \frac{1}{n};$$

. . . . . . . . . . .

Donc $$\frac{P_1}{a} = \frac{P_2}{b} = \frac{P_3}{c} = \frac{P_4}{d} = \ldots = \frac{1}{n} \qquad (3)$$

13.— *La probabilité d'une certain évênement est dite relative, lorsqu'elle s'évalue par rapport aux probabilités d'un ou de plusieurs autres évênements.* Ainsi, par exemple, si nous voulons évaluer la probabilité $P_1$ d'un certain évênement (soit l'extraction d'une boule blanche), non plus d'une façon absolue, mais par rapport à la production des 2 évênements (extraction d'une boule blanche et extraction d'une boule noire) dont les probabilités respectives sont $P_1$ et $P_2$, nous aurons pour cette probabilité relative $\frac{P_1}{P_1 + P_2}$, laquelle aura pour valeur $\frac{a}{a+b}$; a et b étant les nombres de boules blanches et noires.

En effet, d'après l'article précédent, on a :

$$P_1 = \frac{a}{n} \text{ et } P_2 = \frac{b}{n}; \text{ d'où } \frac{P_1}{P_2} = \frac{a}{n} : \frac{b}{n} = \frac{a}{n} \times \frac{n}{b} = \frac{a}{b}.$$

Et, d'après la propriété des proportions, p. 18 de notre recueil :

$\frac{P_1 + P_2}{P_1} = \frac{a+b}{a}$, ou, enfin, en renversant les termes

$$\frac{P_1}{P_1 + P_2} = \frac{a}{a+b}. \qquad (4)$$

Par conséquent, nous pouvons prendre comme mesure de la *probabilité relative* $\frac{P_1}{P_1 + P_2}$ la quantité $\frac{a}{a+b}$; ce qui est conforme à ce que nous avons vu à l'art. 7.

## Probabilité composée

14. — On appelle *probabilité composée* celle d'un évènement dépendant, non pas de l'un ou de l'autre d'une série d'évènements contradictoires comme nous avons vu précédemment, mais dépendant de la production simultanée ou successive de plusieurs évènements. Supposons d'abord deux évènements ; par exemple, admettons qu'il y ait, dans une loterie, 4 séries de 5 numéros chacune, savoir :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1re | série | $a_1$ | $b_1$ | $c_1$ | $d_1$ | $e_1$ |
| 2e | id. | $a_2$ | $b_2$ | $c_2$ | $d_2$ | $e_2$ |
| 3e | id. | $a_3$ | $b_3$ | $c_3$ | $d_3$ | $e_3$ |
| 4e | id. | $a_4$ | $b_4$ | $c_4$ | $d_4$ | $e_4$ |

et supposons que le numéro $d_3$ soit sorti. Nous pouvons obtenir ce numéro de deux façons : 1° soit en mettant les 20 numéros ci-dessus dans un vase et en extrayant un numéro, ou 2 signes (lettre et chiffre) en même temps de ce vase ; alors, on sera dans le cas d'une production simultanée de 2 évènements — 2° soit en plaçant dans un premier vase les lettres a, b, c, d et e, et en plaçant dans un second vase les chiffres 1, 2, 3 et 4 qui désignent les séries. Si alors, du 1er vase, nous tirons la lettre d, et du second, le chiffre 3, le numéro gagnant sera $d_3$, et l'on se trouvera dans le cas d'une production successive de 2 évènements.

Il est évident que les 2 évènements produits par ces 2 façons de procéder, sont au fond identiques et que le nombre de cas qui peuvent se présenter est le même pour les 2 procédés. Par conséquent, la probabilité de l'évènement attendu est la même quelle que soit la façon simultanée ou successive de procéder.

Dans le premier cas, la probabilité est exprimée par $\frac{2}{40}$ ou $\frac{1}{20^e}$, art. 7. Dans le second cas, elle est de $\frac{1}{5}$ pour la lettre et de $\frac{1}{4}$ pour le chiffre, puisqu'il faut extraire 1 lettre sur 5 et 1 chiffre sur 4. On doit en conclure

que ces 2 probabilités doivent se multiplier pour que $\frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$.

*Autre exemple.* — Admettons que nous ayons une urne contenant 4 boules blanches et 6 boules noires, et que chaque boule noire soit elle-même une urne renfermant 2 boules rouges et 3 bleues. La probabilité d'extraire une boule noire, puis de celle-ci extraire une boule rouge, cet une probabilité composée.

15. — De ce qui précède, nous pouvons donc conclure :

La *probabilité P d'un évênement E, lequel est dû à la cause simultanée ou successive de 2 évênements $E_1$ et $E_2$ dont les probabilités sont représentées par $P_1$ et $P_2$, est exprimée par*

$$P = P_1 \times P_2$$

En d'autres termes, la *probabilité que 2 évênements de même nature mais distincts, arrivent en même temps est exprimée par le produit des probabilités respectives de chaque évênement.*

Et, en général, *la probabilité d'un évênement composé est égale au produit des probabilités des évênements qui le composent.* En effet, soient $E_1$ et $E_2$ deux évênements dont les probabilités sont $P_1 = \frac{a_1}{m_1}$ et $P_2 = \frac{a_2}{m_2}$.

L'évênement $E_1$ dont la probabilité est $\frac{a_1}{m_1}$ peut être assimilé à l'extraction d'une boule blanche d'une urne qui contiendrait $a_1$ boules blanches sur $m_1$ boules en tout. (art. 7). — De même pour l'évênement $E_2$ en considérant une urne contenant $a_2$ boules blanches sur $m_2$ boules en tout. L'événement attendu E dépend de l'extraction simultanée ou successive d'une boule blanche de chacune des urnes précitées. Voyons quel est d'abord le nombre de cas favorables.

Il faut extraire 2 boules blanches ; par suite le nombre de cas favorables est exprimé par $a_1 a_2$, car 1 même boule blanche de la 1re urne peut sortir respectivement

avec les $a_2$ boules blanches de l'autre urne ; et les $a_1$ boules blanches de la 1re urne avec 1 même boule blanche de la 2e urne ; d'où il peut y avoir $a_1 \times a_2$ cas favorables ou cas d'extraction de 2 boules blanches ; (voir notre receuil p. 54, art. 46, permutations.)

Voyons quel est maintenant le nombre total de cas favorables et défavorables. Il doit sortir chaque fois 2 boules, et comme chaque boule de la 1re urne peut se combiner avec chaque boule de la 2e urne, il y aura en totalité $m_1 m_2$ couples de boules, quelle que soit la couleur.

Donc, par définition, art. 7, la probabilité P de l'évènement attendu est

$$P = \frac{a_1 a_2}{m_1 m_2} \text{ ou } \frac{a_1}{m_1} \times \frac{a_2}{m_2}.$$

Mais $\frac{a_1}{m_1} = P_1$ et $\frac{a_2}{m_2} = P_2$. art. 7 :

donc, enfin $P = P_1 \times P_2$. (5)

16. — Du cas de 2 évènements composants, on peut passer à celui de 3, 4, ... ou n évènements composants. En effet, supposons que nous ayons les évènements $E_1$ ; $E_2$ et $E_3$ ; dont les probabilités sont respectivement $\frac{a_1}{m_1}$ ; $\frac{a_2}{m_2}$ et $\frac{a_3}{m_3}$ ; et soit E l'évènement subordonné à l'arrivée simultanée ou successive de $E_1$ ; $E_2$ et $E_3$ ; nous disons qu'on peut poser symboliquement

$$E = E_1 E_2 E_3$$

ou $P = P_1 P_2 P_3$ (6).

En effet, on peut regarder E comme étant composé d'un évènement $E_1$ et d'un autre évènement composé lui-même de $E_2 E_3$. Soit $Q$ la probabilité de $E_2 E_3$. On a, formule (5) $P = P_1 \times Q$.

mais, d'autre part, art. 15, on a :

$$Q = P_2 \times P_3 ;$$

Donc $P = P_1 P_2 P_3$.

Du cas de 3 évènements composants, on passerait à elui de 4 évènements, et ainsi de suite, de sorte que *la*

*formule générale du théorème des évènements composés est la suivante :* $P = P_1 \ P_2 \ P_3 \ldots \ P_n$. (7)

ou $P = \pi_{i=1}^{i=n} P_i$. (8)

formule qui exprime que *la probabilité P est égale au produit des n facteurs $P_i$, facteurs dans lesquels i varie de 1 à n.*

Le signe $\pi$ ou lettre pi ou lettre équivalente à P majuscule dans le grec moderne, signifie, dans cette formule, produit, tout comme nous avons vu, art. 11, que le signe $\Sigma$ ou sigma ou s grec signifiait somme.

P est la probabilité de E et $P_i$ celle de $E_i$ où i varie de 1 à n ; c'est-à-dire que lorsque dans $E_i$ on fait successivement i = 1, 2, etc., n, il vient successivement $P_1$, $P_2$, etc., $P_n$ ; ou $P_1$ probabilité de $E_1$ ; $P_2$ probabilité de $E_2$, etc. ; et $\pi_{i=1}^{i=n} P_i$ donne $P_1 \times P_2 \times P_3 \times \ldots P_n$

17. — Ce qui précède, art. 16, suppose que les évènements $E_1$ ; $E_2$ ; $E_3$ ; etc. arrivent dans un ordre déterminé. Mais il se peut que E soit réalisé quel que soit l'ordre dans lequel les évènements $E_1$ ; $E_2$ ; $E_3$ ; etc., se produisent. Dans ce cas, nous devons faire usage, non seulement du principe des *probabilités composées*, art. 15 et 16, mais également du principe de l'*addition des probabilités*, art. 11.

Ainsi, si M représente le nombre de façons différentes d'arrivées de $E_1$ ; $E_2$ : $E_3$ ;.... $E_n$, qui permettent l'évènement E ; la probabilité de ce dernier, au lieu d'être $P_1 \ P_2 \ P_3 \ldots. \ P_n$ (art. 16), sera $M \ P_1 \ P_2 \ P_3 \ldots \ P_n$, le coefficient M variant d'après les conditions du problème.

18. — Par exemple, admettons que les n évènements $E_1$ ; $E_2$ $E_3$ ;... $E_n$ puissent arriver dans un ordre quelconque.

Il est évident que, dans ce cas, M égal le nombre de permutations de n évènements (recueil p. 54) ; donc M = 1, 2, 3,... n. Pour abréger, nous représenterons les permutations de n évènements par n ! ; de sorte que nous aurons M = n ! ; et l'on aura (p. 54 recueil) :

$$P = n! \ P_1 \ P_2 \ P_3 \ldots \ P_n.$$

19. — Comme autre exemple, admettons que les évènements $E_1$ ; $E_2$ ; $E_3$ ;... $E_n$ se divisent en 3 groupes, savoir :

$$(1) \quad E_1\ E_2 \ldots E_i$$
$$(2) \quad E_{i+1}\ E_{i+2} \ldots E_k$$
$$(3) \quad E_{k+1}\ E_{k+2} \ldots E_n .$$

Les évènements arriveront dans l'ordre suivant : le groupe (1) d'abord, puis le groupe (2) et en enfin le groupe (3) ; mais l'ordre d'arrivées, dans chacun de ces groupes, est indifférent.

Dans ce cas, il est évident que l'on a

$$M = i\,!\,(k-i)\,!\,(n-k)\,!$$

c'est-à-dire que M égale le produit des nombres de permutations de i, de $k - i$ et de $n - k$ évènements.

20. — Remarque. — Parmi les évènements $E_1$, $E_2$,.... $E_n$, il se peut qu'il y en ait un certain nombre qui soient identiques entre eux, de manière que l'on puisse avoir symboliquement

$$E_1 = E_2 = E_3 = \ldots = E_i$$
$$E_{i+1} = E_{i+2} = E_{i+3} = \ldots = E_k$$

etc. . . . . . . . . . . .

21. — *Exemple. Cas particulier.* — Admettons que nous ayons une urne qui contienne 4 boules blanches et 2 boules noires. L'extraction d'une boule blanche a pour probabilité $\frac{4}{4+2}$ ou $\frac{4}{6}$ ou $\frac{2}{3}$ ; celle d'une boule noire a pour probabilité $\frac{2}{4+2}$ ou $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$. Supposons que l'évènement attendu soit l'extraction en 4 tirages de 3 boules blanches et de 1 noire. Nous admettrons que l'on remette la boule extraite après chaque tirage, de façon à laisser ainsi constante la probabilité de l'évènement attendu.

Les différents cas qui peuvent se présenter en tirant donc 3 boules blanches et 1 noire sont :

| 1° | 2° | 3° | 4° |
|---|---|---|---|
| 1 blanche | 1 blanche | 1 blanche | 1 noire |
| 1 id. | 1 id. | 1 noire | 1 blanche |
| 1 id. | 1 noire | 1 blanche | 1 id. |
| 1 noire | 1 blanche | 1 id. | 1 id. |

L'un quelconque de ces évènements composés, soient le 1°, le 2°, le 3° ou le 4°, amènera la production de l'évènement attendu.

La probabilité $P_1$ du 1° sera, en vertu du théorème sur les probabilités composées, art. 15 et 16, dont la formule générale est

$$P = \pi_{i=1}^{i=n} P_i \text{ ou ici } P_1 = \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} = \left(\frac{2}{6}\right)^3 \times \frac{1}{3}.$$

Celle $P_2$ du 2° deviendra $P_2 = \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{1}{3}.$

Pour le 3°, il viendra $P_3 = \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{1}{3}.$

Enfin, pour le 4°, on obtiendra

$$P_4 = \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{1}{3}.$$

Ces probabilités composées sont donc égales.

L'évènement attendu dépend de l'arrivée du 1°, du 2°, du 3° ou du 4°. D'où, d'après le principe de l'addition des probabilités, art 11, la probabilité P cherchée sera

$$P = \Sigma P_i \text{ où i varie de 1 à 4}$$

donc $P = \Sigma_{i=1}^{i=4} P_i = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{1}{3} +$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{1}{3} = 4 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{1}{3}.$$

Remarquons qu'ici $M = 4$, art. 17.

En effectuant, il vient $P = 4 \times \frac{8}{27} \times \frac{1}{3} = \frac{32}{81}.$

22. — Dans l'urne que nous venons de considérer contenant 4 boules blanche et 2 noires, si nous faisons 4 tirages en remettant, après chacun d'eux, la boule tirée, et si nous nous demandons quelles sont, en général, les boules que nous pouvons extraire par ces 4 tirages, nous aurons :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1° | 4 | blanches | | | |
| 2° | 3 | id. | et | 1 | noire |
| 3° | 2 | id. | et | 2 | id. |
| 4° | 1 | id. | et | 3 | id. |
| 5° | | | | 4 | id. |

La probabilité d'extraire une boule blanche est $\frac{4}{6}$ ou $\frac{2}{3}$ ; et celle de tirer une noire est $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$, art. 7. La probabilité de l'extraction de 4 blanches est art. 16, $\pi_{i=1}^{i=4} P_i = \left(\frac{4}{6}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4$. Celle de 3 blanches et 1 noire est (art. 17 et 1° de l'art. 21, et ci-dessous) $4\left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{1}{3}$. Pour 2 blanches et 2 noires, nous aurons $M = 6$, voir ci-après, et il viendra $6\left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2$.

Pour 1 blanche et 3 noires, comme $M = 4$, voir ci-après, on aura $4 \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3$. Enfin pour 4 noires, il viendra $\left(\frac{1}{3}\right)^4$.

Les évênements renseignés aux 1°, 2°, 3°, 4° et 5° sont les seuls possibles. Donc, si l'on fait 4 tirages, on a la *certitude* de voir arriver l'un de ces 5 arrangements de boules. D'où, en vertu du théorême sur l'addition des probabilités, art. 11, et comme, art. 7, la certitude est exprimée par l'unité, on devra avoir

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 + 4\left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{1}{3} + 6\left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 = 1$$

ou
$$\frac{16}{81} + \frac{32}{81} + \frac{24}{81} + \frac{8}{81} + \frac{1}{81} = \frac{81}{81} = 1.$$

*Remarquons* que dans le cas de 3 blanches et 1 noire, $M = 4$, car on a

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 blanche | 1 bl. | 1 bl. | 1 noire |
| 1 bl. | 1 bl. | 1 noire | 1 bl. |
| 1 bl. | 1 noire | 1 bl. | 1 bl. |
| 1 noire | 1 bl. | 1 bl. | 1 bl. |

et dans le cas de 2 blanches et 2 noires, il vient $M=6$, car on a

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 bl. | 1 bl. | 1 n. | 1 n. | 1 n. | 1 bl. |
| 1 bl. | 1 n. | 1 bl. | 1 bl. | 1 n. | 1 n. |
| 1 n. | 1 bl. | 1 bl. | 1 n. | 1 bl. | 1 n. |
| 1 n. | 1 n. | 1 n. | 1 bl. | 1 bl. | 1 bl. |

enfin, dans le cas de 1 blanche et 3 noires, on obtient $M=4$, car on trouve

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 bl. | 1 n. | 1 n. | 1 n. |
| 1 n. | 1 bl. | 1 n. | 1 n. |
| 1 n. | 1 n. | 1 bl. | 1 n. |
| 1 n. | 1 n. | 1 n. | 1 bl. |

23. Examinons maintenant le *cas de 2 évènements contradictoires quelconques.*

Représentons par A et par B deux évènements contradictoires ayant pour probabilités $\alpha$ et $\beta$. Nous pouvons poser, art. 7

$$\alpha+\beta=1.$$

Si, dans une série de *m* évènements, nous attendons la production des évènements A et B des nombres de fois qui sont compris entre m et o pour A et, par suite, entre o et m pour B,(s'il y a m fois A, il y aura o fois B, etc.), la somme, art. 11, des probabilités de ces évènements composés, ou la probabilité de l'évènement résultant, sera exprimée par

$$(\alpha+\beta)^m=\alpha^m+C_{m,1}\,\alpha^{m-1}\,\beta+C_{m,2}\,\alpha^{m-2}\,\beta^2+\ldots+\beta^m=1\ ;$$

(voir art. 7 et 21 et p. 56 recueil), ce qui est la confirmation de $\alpha+\beta=1$, en faisant $m=1$.

Nous allons chercher l'estimation, non pas de la somme complète de tous les termes de cette expression, mais, d'une façon approchée, la somme d'un certain nombre d'entre'eux.

Représenton d'abord par $T_{p+1}$ [ou le $(p+1)^{me}$ terme], le terme général de$(\alpha+\beta)^m$.(voir art. 28, p. 23, de la 2e partie).

Nous pouvons écrire $T_{p+1}=C_{m,p}\,\alpha^{m-p}\,\beta^p$

(voir recueil p. 56, en y remplaçant n par p et x par $\beta$).

On sait que $C_{m,p}$ veut dire combinaison de m objets ou choses p à p.

D'après ce qui précède, le terme $T_{p+1}$ représente la probabilité de la production dans un ordre quelconque (à cause du coefficient $C_{m,p}$) de m-p évènements A et de p évènements B.

Par conséquent, nous pouvons écrire symboliquement, art. 15 : $T_{p+1}=[(m-p)\,A.\ pB]$.

Donc, art. 11, la probabilité résultante à trouver pourra être représentée par la somme

$$\Sigma_k^i\ T_{p+1}$$

dans laquelle p varie de i à k. Cette somme représente, art. 11, sur m évènements en tout (voir ci-dessus), la probabilité de la production de

(m-i) fois A et i fois B, en faisant p=i dans l'expression de $T_{p+1}$ ci-dessus

ou (m-i-1) A et (i+1) B, en faisant p=i+1 dans l'expression de $T_{p+1}$ ci-dessus

ou . . . . . . . . . . .

ou (m-k) A et k B ; en faisant p=k dans l'expression de $T_{p+1}$ ci-dessus

car $m-i+i=m$ ; $(m-i-1)+(i+1)=m$ ; etc.

Nous procéderons par étape.

24. — Tout d'abord nous dirons que la formule (B) ci-après de Bernouilli, (et voir art. 30 et suivants), sert à démontrer que dans le développement du binôme $(\alpha+\beta)^m=1$, il existe un terme $T_{p+1}$ plus grand que tous les autres ; on trouve la condition du maximum de ce terme ; or, ce terme $T_{p+1}$ étant la probabilité de la production de l'évènement composé (m−p) A et pB ; si ce terme est maximum, c'est que l'évènement composé considéré est le plus probable.

Ce théorème démontre que, étant donnés m évènements, l'évènement le plus probable est celui pour lequel les nombres d'arrivées m—p et p ou *a* et *b* de 2 évènements contradictoires A et B sont proportionnels aux probabilités $\alpha$ et $\beta$ d'arrivée de ces évènements, c'est-à-dire que l'on devra avoir

$$\frac{m-p}{\alpha}=\frac{p}{\beta} \text{ ou } \frac{m-p}{p}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

On trouve aussi la probabilité que les évènements A et B se présentent des nombres de fois compris entre $m\alpha-k$ et $m\alpha+k$ pour A ; $m\beta-k$ et $m\beta+k$ pour B.

En d'autres termes, on trouve qu'il y a une probabilité P qui se rapproche autant qu'on le veut de l'unité, que, sur un nombre suffisamment grand m d'expériences, les nombres d'arrivées m-p et p ou *a* et *b* des évènements contradictoires A et B dont les probabilités sont $\alpha$ et $\beta$, sont com-

pris entre $m\alpha+k$ et $m\alpha-k$ pour A ; $m\beta-k$ et $m\beta+k$ pour B, c'est-à-dire qu'on a

$$m\alpha+k > a > m\alpha-k$$
$$m\beta-k < b < m\beta+k$$

Ce théorême permet aussi de déduire des observations les valeurs approchées des probabilités $\alpha$ et $\beta$ de 2 évênements contradictoires A et B ; et il donne encore la formule générale d'un terme de rang $T_{p+1+k}$ ou $T_{p+k+1}$, c'est-à-dire le terme qui précède ou qui suit (suivant que k est positif ou négatif) de K rangs le terme maximum $T_{p+1}$ du développement. Si, dans la formule obtenue, on fait $k=0$, on obtient la valeur du terme maximum $T_{p+1}$. On prouve également que les termes situés à égale distance du terme maximum sont égaux, c'est-à-dire que les *écarts* égaux de signes contraires sont également probables.

Enfin *le théorême de Bornouilli proprement dit* consiste à évaluer d'une façon approchée la somme, art 11 :

$$P=\Sigma_{-k}^{k}\, T_{(p+1)+K}. \qquad (B).$$

C'est la somme des probabilités exprimées par les termes $T_{p+1-K}$ à $T_{p+1+K}$. On aura donc ainsi la probabilité résultante P dont il s'agit à l'article précédent.

Les différents termes du développement du binôme représentent les probabilités des divers évênements ; le terme maximum $T_{p+1}$ représente la probabilité de l'évênement le plus probable. On sait, art. 5, qu'une probabilité est exprimée par une fraction, et que plus cette fraction est grande, plus l'évênement est probable, jusqu'au moment où le numérateur est égal au dénominateur et qu'alors on a l'unité qui représente la certitude, en effet, puisqu'alors tous les cas sont favorables. Les écarts égaux représentent les probabilités d'évênements également probables. D'après les articles 11 et 23, P représente, dans la formule B, la probabilité de l'évênement résultant.

25. — *Remarque*. La formule de Stirling que nous allons d'abord examiner est appliquée à la formule de Bernouilli pour calculer te terme $T_{p+1+k}$.

26. — *Formule de Stirling.* — L'objet de cette formule est de déterminer la valeur approchée du produit des n premiers nombres naturels, savoir :

$$1 . 2 , 3 \ldots n ;$$

n étant très grand ; c'est le nombre total $P_n$ des permutations dont n objets sont susceptibles (voir recueil p. 54).

On peut employer la formule (voir analyse infinitésimale P. Mansion, Université de Gand) :

$$1 . 2 . 3 \ldots n = \sqrt{2 \pi n}\, n^n e^{-n + \frac{\theta}{12 n}}$$

dans laquelle on a

$$0 < \theta < 1.$$

Mais, on met parfois cette formule de Stirling sous la forme

$$1 . 2 . 3 \ldots n = \sqrt{2 \pi n}\, n^n e^{-n} (1 + \varepsilon n). \qquad (9),$$

$\varepsilon n$ tendant vers zéro à mesure que n croît ou que $\frac{1}{n}$ tend aussi vers zéro.

($\varepsilon$ est la lettre minuscule appelée epsilonn dans le grec ancien équivalente à é).

Nous emploierons cette seconde formule (9) ; et remarquons d'abord qu'elle peut se mettre sous la forme suivante en divisant le premier membre par une partie du second

$$\frac{1 . 2 . 3 \ldots n}{n^n e^{-n} \sqrt{2 \pi n}} = 1 + \varepsilon n.$$

Représentons le premier membre de cette dernière expression par une certaine fonction de n, soit $\varphi$ (n), il viendra

$$\frac{1 . 2 . 3 \ldots n}{n^n e^{-n} \sqrt{2 \pi n}} = \varphi (n). \qquad (10).$$

Il s'agit donc de démontrer que $\varphi (n) = 1 + \varepsilon n$ ou que

$$\varphi (n) = \frac{1 . 2 . 3 \ldots n}{n^n e^{-n} \sqrt{2 \pi n}} \qquad (11);$$

avec limite $\varepsilon n = 0$.

Considérons d'abord la formule de Wallis (voir analyse Catalan, p. 583, Université de Liége, année 1879) laquelle est

$$1 = \frac{\pi}{2} \lim. \frac{\dfrac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}}{\dfrac{2.4.6\ldots 2n}{3.5.7\ldots(2n+1)}}$$

ou

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}.\frac{2}{3}.\frac{4}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{5}.\frac{6}{7}.\frac{8}{7}\ldots$$

ou encore

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.\ 2.\ 4.\ 4.\ 6.\ 6\ldots\overline{2n-2}.\ \overline{2n-2}.\ 2n,}{3.\ 3.\ 5.\ 5.\ 7.\ 7\ldots\overline{2n-1}.\ \overline{2n-1}.}$$

et, en multipliant les deux termes par 2 n, il viendra

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2^2.\ 4^2\ldots\overline{2n-2}^2.}{3^2.\ 5^2\ldots\overline{2n-1}^2}\frac{\overline{2n}^2}{2n};$$

multipliant par 2 et divisant par $\pi$, on aura

$$1 = \frac{2^2\ 4^2\ \ldots\ \overline{2n-2}^2.\ \overline{2n}^2}{3^2\ 5^2\ldots\ \overline{2n-1}\ \ 2n} \times \frac{2}{\pi};$$

extrayant la racine, il vient

$$1 = \frac{2.\ 4.\ 6\ldots\ \overline{2n-2}.\ 2n}{3.\ 5\ldots\ \overline{2n-1}.\sqrt{\pi n}}$$

ou

$$1 = \frac{(2\times 1)(2\times 2)(2\times 3)\ldots 2(n-1).\ 2n}{1.\ 3.\ 5\ldots\ \overline{2n-1}.\ \sqrt{\pi n}}$$

ou

$$1 = \frac{(2.\ 2.\ 2\ldots 2)\ (1.\ 2.\ 3\ldots n)}{1.\ 3.\ 5\ldots\ \overline{2n-1}.\sqrt{\pi n}} = \frac{2^n\ (1.\ 2.\ 3\ldots n)}{1.\ 3\ 5\ldots\ \overline{2n-1}.\sqrt{\pi n}} = \frac{2^n\ (n\ !)}{1.3.5\ldots\ \overline{2n-1}.\ \sqrt{\pi n}}$$

en remarquant, art. 18, que n ! représente le nombre de permutations de n évènements ou (p. 54 recueil) $1.\ 2.\ 3\ldots n = P_n = n\ !$.

Remarquons que si l'on intercale les multiplicateurs 2. 4. 6... 2 n au dénominateur $1.\ 3.\ 5\ldots\ \overline{2n-1}.\ \sqrt{\pi n}$, celui-ci devient $1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6\ldots\ \overline{2n-1}.\ 2n.\ \sqrt{\pi n}$, c'est-à-dire, art. 18, le nombre de permutations de 2 n évènements multiplié par $\sqrt{\pi n}$, ou, art. 18, $2n!\ \sqrt{\pi n}$. Mais, pour rétablir l'égalité, il faut intercaler aussi ces termes, comme multiplicateurs, au numérateur, et on obtient donc ainsi pour le numérateur.

$2^n . n! \, 2.4.6\ldots 2n$ ou $n! \, 2^n . 2\times 1. \; 2\times 2. \; 2\times 3\ldots \; 2\times n$, ou $n! \, 2^n (2.2.2\ldots 2)(1.2.3\ldots n)$ ou $n! \, 2^n . 2^n . (1.2.3\ldots n)$ ou $n! \, 2^{n+n} (1.2.3\ldots n)$ ou $n! \, 2^{2n} (n!)$ ou $(n!)^2 . 2^{2n}$; donc la formule devient enfin

$$1 = \frac{(n!)^2 . \; 2^{2n}}{2n! \sqrt{\pi n}}. \quad (12).$$

27. — Comme nous venons de voir, nous devons démontrer que $\varphi(n) = 1 + \varepsilon n$, avec limite $\varepsilon n = 0$.

Pour cela nous devrons chercher tout d'abord la valeur de

$$\frac{[\varphi(n)]^2}{\varphi(2n)}.$$

Nous disons que cette valeur égale l'unité. En effet, en remarquant que $1.2.3\ldots n = n!$ ou nombre de permutations de n évènements et que $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ d'où $\frac{1}{e^{-x}} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$ (algèbre), l'équation (10) donne

$$\varphi(n) = \frac{n!}{n^n \sqrt{2\pi n}} e^n. \quad (13);$$

et, en élévant au carré

$$[\varphi(n)]^2 = \frac{(n!)^2 . e^{2n}}{n^{2n} . 2\pi n}.$$

Ensuite, en remplaçant n par 2 n dans l'équation (13), il vient

$$\varphi(2n) = \frac{2n!}{(2n)^{2n} \sqrt{2\pi 2n}} e^{2n}$$

Donc $\frac{[\varphi(n)]^2}{\varphi(2n)} = \frac{(n!)^2 e^{2n}}{n^{2n} 2\pi n} : \frac{(2n)!}{(2n)^{2n} \sqrt{4\pi n}} e^{2n} =$

$$= \frac{(n!)^2 e^{2n}}{n^{2n} 2\pi n} \times \frac{(2n)^{2n} \sqrt{4\pi n}}{(2n)! \, e^{2n}} = \frac{(n!)^2 (2n)^{2n} 2\sqrt{\pi n}}{n^{2n} 2 (\sqrt{\pi n})^2 (2n)!} =$$

$$= \frac{(n!)^2 \, 2^{2n}}{\sqrt{\pi n} \, (2n)!}. \quad (14).$$

Si n est très grand, les équations (14) et (12) donnent enfin

$$\frac{[\varphi(n)]^2}{\varphi(2n)} = \frac{(n!)^2 \, 2^{2n}}{\sqrt{\pi n} \, (2n)!} = 1. \quad (15).$$

28. — Nous calculerons maintenant la valeur de

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} \quad . \ (16).$$

La formule 13 nous donne

$$\varphi(n) = \frac{n!\, e^n}{n^n \sqrt{n}\, \sqrt{2\pi}} = \frac{n!\, e^n}{n^n n^{1/2} \sqrt{2\pi}} = \frac{n!\, e^n}{n^{n+1/2} \sqrt{2\pi}} \ ;$$

et, en remplaçant n par n+1, nous obtiendrons

$$\varphi(n+1) = \frac{(n+1)!\, e^{n+1}}{(n+1)^{n+1+1/2} \sqrt{2\pi}}.$$

D'où en substituant, dans la formule (16), ces valeurs de $\varphi(n)$ et de $\varphi(n+1)$, nous aurons

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} = \frac{n!\, e^n}{n^{n+1/2} \sqrt{2\pi}} : \frac{(n+1)!\, e^{n+1}}{(n+1)^{n+1+1/2} \sqrt{2\pi}} = \frac{n!\, e^n}{n^{n+1/2} \sqrt{2\pi}} \times$$

$$\frac{(n+1)^{n+1+1/2} \sqrt{2\pi}}{(n+1)!\, e^{n+1}} = \frac{n!\, e^n (n+1)^{n+1+1/2} \sqrt{2\pi}}{n^{n+1/2} \sqrt{2\pi}\, n!\, (n+1)\, e^{n+1}} = \frac{(n+1)^{n+1/2}}{n^{n+1/2} e} =$$

$$= \frac{1}{e} \frac{(n+1)^{n+1/2}}{n^{n+1/2}} = \frac{1}{e} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{n+1/2} = \frac{1}{e} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n+\frac{1}{2}} \quad (17).$$

Nous pouvons poser l'égalité $1 + \frac{1}{n} = e^{l\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ (18).

En effet, d'abord on sait que dans dans $y = a^n$, n est le logarithme de y dans le système dont la base est a. Cela étant, je dis que l'égalité (18) est vraie, car si l'on prend le logaritme népérien des deux membres, on obtient une identité, c'est-à-dire qu'on a : $l \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = l \left[ e^{l\left(1+\frac{1}{n}\right)} \right]$.

Car si nous prenons le logarithme du second membre, comme le logarithme d'une puissance est égal à l'exposant multiplié par le logarithme du nombre qui est élevé à la puissance marquée par cet exposant, il vient $l\left[e^{l\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right] = l\left(1+\frac{1}{n}\right) \times l.\ e$ ; mais e est la base du système népérien et son logaritme est l'unité, donc enfin on a : $l\left[e^{l\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right] = l\left(1+\frac{1}{n}\right) \times 1 = l\left(1+\frac{1}{n}\right)$ ; donc l'égalité (18) est démontrée.

Mais, remarquons que si l'on a, en général, $(a^m)^n$, cette puisance égale $a^{m \times n} = a^{mn}$, donc il vient

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2}=\left[e^{l\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right]^{n+1/2}=e^{l\left(1+\frac{1}{n}\right)(n+1/2)}=e^{(n+1/2)\,l\left(1+\frac{1}{n}\right)}. \quad (19).$$

Nous pouvons poser $l\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{\theta}{2n^2}.$ (20) ;

et $l\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{\theta'}{3n^3}.$(21);

formules dans lesquelles les indéterminées $\theta$ et $\theta'$ sont $> 0$ et $< 1$.

En effet, on a, p. 195 de la 1re partie :

$$\log(a+x)=\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\frac{x^4}{4a^4}+\ldots$$

Si, dans cette expression, nous faisons $a=1$ et $x=\frac{1}{n}$, il vient

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{\frac{1}{n}}{1}-\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2\times 1}+\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3}{3\times 1}-\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^4}{4\times 1}+\ldots$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\frac{1}{4n^4}+\ldots\mp\varphi\left(\frac{1}{n}\right);$$

et, si la valeur de $\frac{1}{n}$ est comprise entre 0 et 1, la valeur de $\varphi\left(\frac{1}{n}\right)$ converge vers zéro lorque n augmente, et par suite la série ci-dessus est convergente (p. 178, 1re partie). On sait, en effet, que si dans une série, les termes décroissent indéfiniment, et s'ils sont alternativement positifs et négatifs, la série est convergente. Or, on sait que dans toute série convergente, la somme d'un nombre p indéfiniment grand de termes consécutifs tend vers zéro, lorsque le rang du premier de ces termes augmente indéfiniment. On sait encore que dans une série convergente comme celle ci-dessus mentionnée, c'est-à-dire dont les termes, alternativement positifs et négatifs décroissent indéfiniment, l'erreur $\varepsilon$ que l'on commet en prenant la somme $S_n$ des n premiers termes au lieu de la somme totale S, est inférieure au terme $u_{n+1}$ qui suit celui auquel on s'arrête. Or, dans la série ci-dessus

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\frac{1}{4n^4}+\text{etc},$$

les termes décroissent indéfiniment puisque les dénomina-

teurs sont les puissances successives de n, multipliées en outre par un coefficient numérique qui augmente indéfiniment.

Donc, si l'on prend, par exemple, la somme des deux premiers termes $S_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}$, l'erreur est inférieure au 3me terme $\frac{1}{3n^3}$, et cela se comprend puisque l'on doit ajouter ce terme $\frac{1}{3n^3}$, mais ensuite retrancher $\frac{1}{4n^4}$ et ajouter puis retrancher d'autres termes en nombre indéfini pour obtenir la somme S. De même, si l'on prend la somme des trois premiers termes ou $S_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3}$ l'erreur sera moindre que le quatrième terme $\frac{1}{4n^4}$. Et, comme les termes de la série décroissent indéfiniment, si nous prenons la somme des deux premiers termes, cette somme sera trop petite, puisqu'il faut ajouter $\frac{1}{3n^3}$, etc. ; par suite, au lieu de $\frac{1}{2n^2}$, nous prendrons $\frac{\theta}{2n^2}$, terme dans lequel $\theta$ est compris entre 0 et 1 ; de même si l'on envisage les trois premiers termes, on prendra $\frac{\theta'}{3n^3}$ au lieu de $\frac{1}{3n^3}$, terme dans lequel $\theta'$ est compris entre 0 et 1 égalememt. Donc, enfin, on peut poser les égalités (20) et (21).

Mais il est clair qu'on a

$$\left(n+\frac{1}{2}\right) l \left(1+\frac{1}{2}\right) = n\, l\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\, l\left(1+\frac{1}{n}\right);$$

et en substituant dans le second nombre de cette dernière formule, les valeurs données respectivement par les formules (21) et (20), nous obtiendrons

$$\left(n+\frac{1}{2}\right) l \left(1+\frac{1}{n}\right) = n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{\theta'}{3n^3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{\theta}{2n^2}\right) =$$

$$1 - \frac{1}{2n} + \frac{\theta'}{3n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{\theta}{4n^2} = \frac{12n^2 - 6n + 4\theta' + 6n - 3\theta}{12n^2} =$$

$$\frac{12n^2 + 4\theta' - 3\theta}{12n^2} = 1 + \frac{4\theta' - 3\theta}{12n^2} = 1 + \frac{\Theta}{12n^2}. \qquad (22) \;;$$

formule dans laquelle Θ réprésente $4\theta' - 3\theta$, valeur qui est également comprise entre o et I. On sait que le signe Θ est la majuscule thêta du grec ancien, équivalant à th ; tandis que θ en est la minuscule.

Or, formule (17), nous avons

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

d'où, en substituant dans cette expression la valeur donnée par la formule (19), il vient

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} = \frac{1}{e}\left(e^{\left(n+\frac{1}{2}\right) l \left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)$$

et, d'après la formule (22)

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} = \frac{1}{e}\left(e^{1+\frac{\Theta}{12n^2}}\right) = \frac{e^{1+\frac{\Theta}{12n^2}}}{e} = e^{1+\frac{\Theta}{12n^2}-1} = e^{\frac{\Theta}{12n^2}}. \quad (23).$$

29. — Nous allons calculer maintenant $\frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)}$.

Nous pouvons, en remplaçant successivement n par $n+1$, $n+1$ par $n+2$, etc., dans la formule (23), en déduire les n égalités

$$\frac{\varphi(n+0)}{\varphi(n+1)} \text{ ou } \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} = e^{\frac{\Theta}{12n^2}}$$

$$\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n+2)} = e^{\frac{\Theta_{\times 1}}{12(n+1)^2}}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{\varphi[n+(n-1)]}{\varphi(n+n)} \text{ ou } \frac{\varphi(2n-1)}{\varphi(2n)} = e^{\frac{\Theta_{(n-1)}}{12(2n-1)^2}}$$

En multipliant ces égalités membre à membre, il vient en supprimant, dans le premier membre, les termes communs au numérateur et au dénominateur

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)} = e^{\left[\frac{\Theta}{12n^2} + \frac{\Theta_{\times 1}}{12(n+1)^2} + \dots + \frac{\Theta_{(n-1)}}{12(2n-1)^2}\right]}$$

d'où, nous pouvons conclure que

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)} < e^{\frac{K}{12n^2}}. \quad (24) ;$$

formule dans laquelle K est la plus grande valeur du numérateur de l'exposant de e. Cette valeur K est $> 0$ et $< 1$, article précédent.

Lorsque n est suffisamment grand, il vient

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)} = 1 + \frac{1}{n}. \quad (25);$$

et $\frac{1}{n}$ tend vers zéro à mesure que n augmente. En effet, cette valeur a pour limite, lorsque n égalerait l'infini ou à la limite : $\frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)} = 1 + \frac{1}{\infty} = 1 + 0 = 1$;

et la formule (24) donnerait également la limite :

$$\frac{\varphi(n)}{(2n)} = e^{\frac{K}{12\ \infty}} = e^{0} = 1.$$

Remarquons que la formule (18), en faisant $n = \infty$, devient

$$1 + \frac{1}{\infty} = e^{1\left(1 + \frac{1}{\infty}\right)} \text{ ou } 1 + 0 \text{ ou } 1 = e^{1(1)} = e^{0} = 1.$$

Du reste, quand n est infini $\frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)} = \frac{\varphi(\infty)}{\varphi(\infty)} = 1.$

Or, nous avons, formule (15)

$$\frac{[\varphi(n)]^2}{\varphi(2n)} = 1.$$

En divisant la formule (15) par la formule (25), nous aurons

$$\frac{[\varphi(n)]^2}{\varphi(2n)} : \frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)} = 1 : \left(1 + \frac{1}{n}\right) \text{ ou } \frac{[\varphi(n)]^2}{\varphi(2n)} \times \frac{\varphi(2n)}{\varphi(n)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \text{ ou } \varphi(n) = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1},$$ (recueil p. 32).

Et lorsque n est infiniment grand, on a

$$\varphi(n) = \left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^{-1} = (1 + 0)^{-1} = 1^{-1} = \frac{1}{1} = 1,$$ et par suite,

on peut enfin conclure que

$$\varphi(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = 1 + \varepsilon n,$$

en admettant la limite $\varepsilon n = 0$ ; ce qu'il fallait démontrer, articles 26 et 27.

30.— *Théorême de Bernouilli.*— Voir art. 24 les définitions ou propriétés de ce théorême.

Les probabilités des 2 évênements contradictoires A et B étant représentées par $\alpha$ et $\beta$, on a d'après l'art. 23 :

$$\alpha + \beta = 1$$

d'où $$(\alpha + \beta)^m = 1^m = 1 \ ;$$

ou, d'après la formule du binôme de Newton (voir recueil p. 56 en y remplaçant x par $\alpha$ et a par $\beta$ ) :

$$\alpha^m + \frac{m}{1} \beta \alpha^{m-1} + \ldots + C_{m,p} \beta^p \alpha^{m-p} + \ldots + \beta^m = 1$$

ou $\alpha^m + C_{m,1} \alpha^{m-1}\beta^1 + C_{m,2} \alpha^{m-2}\beta^2 + \text{- - -} + \beta^m = 1.$

Tout d'abord considérons le terme général du développement (voir recueil p. 56 en y remplaçant n par p):

$$T_{p+1} = C_{m,p} \alpha^{m-p}\beta^p$$

ou $$T_{p+1} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+2)(m-p+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots\ (p-1)\ p} \alpha^{m-p}\beta^p$$

ou, en remplaçant, pour abréger, le dénominateur par p ! (voir art. 18) il vient

$$T_{p+1} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+2)(m-p+1)}{p\ !} \alpha^{m-p}\beta^p \ . \quad (26).$$

Nous allons démontrer qu'il existe, dans ce développement, un terme plus grand que tous les autres.

Soit $T_{p+1}$ ce terme. Nous pouvons écrire, par hypothèse, les 3 termes successifs :

$$T_p < T_{p+1} > T_{p+2}$$

Nous pouvons obtenir le développement de $T_{p+2}$ en remplaçant p par p+1 dans le développement précédent de $T_{p+1}$ et nous aurons

$$T_{p+2} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)(m-p)}{1.2.3\ldots p(p+1) \text{ ou } (p+1)\ !} \alpha^{m-p-1} \beta^{p+1} \ ;$$

$$\text{ou } T_{p+2} = \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2.3\ldots p} \times \frac{m-p}{p+1} \times \frac{\alpha^{m-p}}{\alpha} \beta^p \ \beta$$

$$\text{ou } T_{p+2} = \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2.3\ldots p} \alpha^{m-p} \ \beta^p \frac{m-p}{p+1} \frac{\beta}{\alpha}$$

et, en comparant cette valeur à celle de $T_{p+1}$, nous aurons

$$T_{p+2} = T_{p+1} \frac{m-p}{p+1} \frac{\beta}{\alpha} . (27).$$

Ensuite, en remplaçant p par p+1 dans l'expression de $T_{p+2}$, il vient

$$T_{p+1+2} \text{ ou } T_{p+3} = \frac{m(m-1)\ldots(m-(p+1))}{1.2.3\ldots(p+1+1)} \alpha^{m-p-1-1} \beta^{p+1+1}$$

ou $T_{p+3} = \frac{m(m-1)\ldots(m-p)(m-p-1)}{1.2.3\ldots(p+1)(p+2) \text{ ou } (p+2)!} \alpha^{m-p-2} \beta^{p+2}$ ou

$\alpha^{m-p-1} \beta^{p+1} \frac{\beta}{\alpha}$.

Et, en comparant $T_{p+2}$ et $T_{p+3}$, il vient

$$T_{p+3} = \frac{m(m-1)\ldots(m-p)}{1.2.3\ldots(p+1)} \times \frac{m-p-1}{p+2} \times \alpha^{m-p-1} \beta^{p+1} \frac{\beta}{\alpha} =$$

$$= T_{p+2} \times \frac{m-p-1}{p+2} \frac{\beta}{\alpha}.$$

Or, l'expresssion $\frac{m-p-1}{p+2} < \frac{m-p}{p+1}$ puisque le numérateur diminue et que le dénominateur augmente, et ainsi de suite en remplaçant chaque fois dans l'expression précédente p par p+1, on trouverait $\frac{m-p-2}{p+3} < \frac{m-p-1}{p+2}$, de de sorte que les termes vont en diminuant et que

$$\ldots T_{p+3} < T_{p+2} < T_{p+1}.$$

De même, pour obtenir le développement de $T_p$ il suffirait de changer p en p−1 dans le développement de $T_{p+1}$; de sorte que nous obtiendrons

$$T_p = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(p-1)+1)}{1.1.3\ldots(p-1)} \alpha^{m-(p-1)} \beta^{(p-1)}$$

ou $T_p = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+2)}{1.2.3\ldots(p-1) \text{ ou } (p-1)!} \alpha^{m-p+1} \beta^{p-1}$

d'où en comparant cette valeur avec celle de $T_{p+1}$, nous pourrons mettre cette dernière valeur sous la forme :

$$T_{p+1} = \frac{m(m-1)\ldots(m-p+2)}{1.2.3\ldots(p-1)} \frac{m-p+1}{p} \frac{\alpha^{m-p+1}}{\alpha} \beta^{p-1} \beta$$

$$= \frac{m(m-1)\ldots(m-p+2)}{1.2.3\ldots(p-1)} \frac{m-p+1}{p} \alpha^{m-p+1} \beta^{p-1} \frac{\beta}{\alpha}$$

$$= \frac{m(m-1)\ldots(m-p+2)}{1.2.3\ldots(p-1)} \alpha^{m-p+1} \beta^{p-1} \frac{m-p+1}{p} \frac{\beta}{\alpha}$$

$$= T_p \frac{m-p+1}{p} \frac{\beta}{\alpha}. \qquad (28).$$

Mais, par hypothèse, nous avons

$$T_p < T_{p+1} > T_{p+2}$$

et, en remplaçant, respectivement, dans cette expression $T_{p+1}$ et $T_{p+2}$ par leurs valeurs (28) et (27), nous aurons

$$T_p < T_p \frac{m-p+1}{p} \frac{\beta}{\alpha} > T_{p+1} \frac{m-p}{p+1} \frac{\beta}{\alpha}$$

d'où, évidemment,

$$\frac{m-p+1}{p} \frac{\beta}{\alpha} > 1 \; ; \quad (29) \; ;$$

$$\frac{m-p}{p+1} \frac{\beta}{\alpha} < 1. \quad (30) \; ;$$

puisque l'expression du milieu de l'inégalité est plus grande que $T_p$ ou que $T_p \times 1$ ; et que la 3[me] expression est plus petite que celle du milieu qui équivaut à $T_{p+1}$ ou à $T_{p+1} \times 1$.

Ces conditions sont nécessaires et suffisantes à partir du moment où l'on a trouvé un terme supérieur à celui qui le précède et à celui qui le suit, car les termes de droite et de gauche vont encore en diminuant. En effet, c'est ce que nous avons vu plus haut pour les termes situés à la droite $T_{p+2}$, $T_{p+3}$, etc. On constate la même chose pour les termes situés à la gauche, en remarquant qu'en faisant $p=p-1$ dans l'équation (28), nous obtenons :

$$T_{(p-1)+1} \text{ ou } T_p = T_{p-1} \times \frac{m-(p-1)+1}{p-1} \frac{\beta}{\alpha} = T_{p-1} \frac{m-p+2}{p-1} \frac{\beta}{\alpha}.$$

De même, en continuant à substituer $p-1$ à $p$ dans l'expression précédemment obtenue, on trouverait

$$T_{p-1} = T_{(p-1)-1} \text{ ou } T_{p-2} \times \frac{m-(p-1)+2}{(p-1)-1} \frac{\beta}{\alpha} = T_{p-2} \frac{m-p+3}{p-2} \frac{\beta}{\alpha}$$

etc.

La suite des nouvelles expressions $\frac{m-p+2}{p-1}$, $\frac{m-p+3}{p-2}$, etc. vont en augmentant puisque le numérateur augmente alors que le dénominateur diminue, et par suite les termes de la série ou les valeurs de $T_{p-1}$ ; $T_{p-2}$ ; etc. vont en diminuant puisqu'il faut chaque fois multiplier le terme précédent ou $T_{p-1}$ ; $T_{p-2}$ ; etc. ; par une quantité $\frac{m-p+2}{p-1}$ ; $\frac{m-p+3}{p-2}$ ; etc., qui devient de plus en plus grande, et par suite, on a aussi $\ldots T_{p-2} < T_{p-1} < T_p$.

Donc, enfin, les termes situés à droite et à gauche (du terme supérieur $T_{p+1}$ trouvé) vont en diminuant.

31. — Les deux inégalités (29) et (30) donnent en multipliant par $\frac{\alpha}{\beta}$

$$\frac{m-p+1}{p}\frac{\beta}{\alpha}\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha}{\beta} \text{ ou } \frac{m-p+1}{p} > \frac{\alpha}{\beta}$$

et

$$\frac{m-p}{p+1} < \frac{\alpha}{\beta}$$

ou

$$\frac{m-p}{p+1} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{m-p+1}{p},$$

et en divisant par p les deux termes des fractions extrêmes

$$\frac{\frac{m-p}{p}}{1+\frac{1}{p}} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\frac{m-p}{p}+\frac{1}{p}}{1} \text{ ou } \frac{\frac{m}{p}-1}{1+\frac{1}{p}} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\frac{m}{p}-1+\frac{1}{p}}{1}$$

et, à la limite, quand p augmente indéfiniment $\frac{1}{p}=\frac{1}{\infty}=0$, et il vient

$$\frac{\frac{m}{p}-1}{1+0} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\frac{m}{p}-1+0}{1} \text{ ou } \frac{m}{p}-1 < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{m}{p}-1.$$

Mais alors $\frac{m}{p}-1$ serait en même temps plus petit et plus grand que $\frac{\alpha}{\beta}$, ce qui serait absurde, donc il faut admettre que $\frac{m}{p}-1=\frac{\alpha}{\beta}$, et si p croît, m doit croître également de telle façon que $\frac{m}{p}-1$ reste une quantité finie.

Donc, lorsque les nombres m—p et p et par suite m et p vont en croissant, autrement dit lorsque le nombre d'expériences va en augmentant, et si l'on conserve à $\frac{m}{p}-1$ ou $\frac{m-p}{p}$ une valeur finie, on pourra poser à la limite

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{m}{p}-1=\frac{m-p}{p}.$$

Cette expression peut donc être considérée comme la condition du maximum du terme $T_{p+1}$. Mais nous savons que ce terme $T_{p+1}$ est la probabilité de la production de l'évênement composé (m—p) A et pB, (voir art. 14 et 23). Donc si $T_{p+1}$ est maximum, c'est que l'évênement composé

considéré a la plus grande probabilité, est le plus probable.

Par suite, on peut enfin conclure de ce qui précède que : *si l'on a 2 évênements contradictoires A et B dont les probabilités d'arrivées sont exprimées par* $\alpha$ *et* $\beta$, *et si l'on exprime par m-p ou a et par p ou b les nombres d'arrivée respectifs de ces évênements A et B, l'évênement le plus probable est celui pour lequel les nombres m-p et p ou a et b sont proportionnels aux nombres* $\alpha$ *et* $\beta$, *ce qui s'exprime par la formule*

$$\frac{m-p}{p} \text{ ou } \frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Maintenant, en transformant l'expression précédente, on obtient d'après la propriété des proportions

$$\frac{m-p}{(m-p)+p} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \text{ ou } \frac{m-p}{m} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$ Mais, art. 23, $\alpha+\beta=1$,

donc il vient
$$\frac{m-p}{m} = \frac{\alpha}{1} = \alpha.$$

Egalement, d'après la même propriété des proportions, on a

$$\frac{(m-p)+p}{p} = \frac{\alpha+\beta}{\beta} \text{ ou } \frac{m}{p} = \frac{1}{\beta}.$$

Donc, on tire des valeurs précédentes

$$m-p = m\alpha \qquad (31);$$
$$p = m\beta. \qquad (32);$$

c'est-à-dire qu'on *prendra donc comme valeurs approchées de m-p et de p respectivement m* $\alpha$ *et m* $\beta$.

Remarquons que m-p et p sont des nombres de fois, c'est-à-dire des nombres entiers ; et que $\alpha$ et $\beta$ sont des probabilités, c'est-à-dire des fractions, art. 5, puisqu'elles sont comprises, avons-nous vu à l'art. 7, entre 0 et 1 ; et, que par suite m $\alpha$ et m $\beta$ sont également des fractions. On serait donc tenter de considérer les équations (31) et (32) comme absurdes si l'on ne réfléchissait bien à ceci : c'est que ce sont des *équations limites*.

32. — Pour déterminer la valeur d'un terme du développement du binôme, reprenons la formule (26)

$$T_{p+1} = \frac{m(m-1)\dots(m-p+1)}{p!} \alpha^{m-p} \beta^{p}$$

qui peut être transformée comme ceci $T_{p+1} =$

$$\frac{(\overline{m}.\overline{m-1}.\overline{m-2}\ldots\overline{m-p+1})(\overline{m-p}.\overline{m-p-1}.\overline{m-p-2}\ldots 3.2.1)\,\alpha^{m-p}\beta^{p}}{p\,!\,(\overline{m-p}.\,\overline{m-p-1}\cdots 3.2.1)} =$$

$$\frac{1.2.3\ldots m}{p\,!\,(1.2.3\cdots\overline{m-p})}\,\alpha^{m-p}\,\beta^{p} = \frac{m\,!}{p\,!\,\overline{m-p}\,!}\,\alpha^{m-p}\,\beta^{p}.$$

Si, dans cette expression, nous remplaçons p par $p+K$ (la quantité K étant plus grande ou plus petite que zéro, c'est-à-dire positif ou négatif, donc en prenant à droite ou à gauche de $T_{p+1}$) nous aurons en général

$$T_{(p+K)+1} = \frac{m\,!}{(p+K)\,!\,\overline{m-(p+K)}\,!}\,\alpha^{m-(p+K)}\,\beta^{p+K}$$

$$\text{ou } T_{p+K+1} = \frac{m\,!}{\overline{p+K}\,!\,\overline{m-p-K}\,!}\,\alpha^{m-p-K}\,\beta^{p+K}. \qquad (33).$$

Lorsque le terme $T_{p+1}$ à partir duquel on compte le terme $T_{p+1+K}$ que l'on veut estimer est le plus grand du développement de $(\alpha+\beta)^m$, (voir commencement art. 30), il faudra dans l'expression (33) remplacer $m-p$ et p par $m\alpha$ et $m\beta$ (voir fin art. 31), et l'on aura ainsi

$$T_{p+K+1} = \frac{m\,!}{\overline{m\beta+K}\,!\,\overline{m\alpha-K}\,!}\,\alpha^{m\alpha-K}\,\beta^{m\beta+K}. \qquad (34);$$

et l'on obtient ainsi l'expression générale d'un terme de rang $p+K+1$, terme qui suit ou qui précède de K rangs (suivant que K est positif ou négatif) le terme maximum $T_{p+1}$ du développement de $(\alpha+\beta)^m$.

33. — Nous allons maintenant estimer la probabilité donnée par la valeur de ce terme $T_{p+K+1}$, (formule (B) art. 24), à l'aide de la formule de Stirling, formule 9, art. 26, ou

$$1.\,2.\,3\ldots n = \sqrt{2\pi n}\;n^n\,e^{-n}\,(1+\varepsilon n),$$

$\varepsilon n$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Nous supposerons que la valeur m du nombre total d'évênements soit assez grande pour que les expressions $m\alpha$ et $m\beta$ le soient également, formules (31) et (32), et ce, afin de négliger $\varepsilon n$ qui, ici, serait $\varepsilon m$ et qui tend vers zéro lorsque $\frac{1}{m}$ tend vers zéro ou que m devient très grand. (Voir la formule (34) dans laquelle $m\,! = 1.2.3\ldots m$, art. 18, valeur qui est donnée par la formule de Stirling

dans laquelle n serait remplacé par m). Donc, en remplaçant dans la formule de Stirling n par m et n ! ou 1. 2. 3... n par m ! ou 1.2.3... m et en substituant la valeur obtenue ainsi pour 1. 2. 3 ... m ou m ! dans la formule (34) ; en faisant de même pour $(m\beta+K)$ ! et pour $(m\alpha-K)$ ! et en remarquant que puisque m, $m\alpha$ et $m\beta$ sont des valeurs assez grandes, on peut négliger les termes de la forme $1+\varepsilon m$ ; $1+\varepsilon(m\beta+K)$ et $1+\varepsilon(m\alpha-K)$ et il vient

$$T_{p+K+1}=\frac{\sqrt{2\pi m}\, m^m e^{-m}}{\sqrt{2\pi(m\beta+K)}\,(m\beta+K)^{m\beta+K} e^{-(m\beta+K)}}$$

$$\overline{\sqrt{2\pi(m\alpha-K)}\,(m\alpha-K)^{(m\alpha-K)} e^{-(m\alpha-K)}}\quad \alpha^{m\alpha-K}\ \beta^{m\beta+K}$$

d'où, en divisant et en multipliant par $m\beta^{m\beta+K}$ et par $m\alpha^{m\alpha-K}$ au dénominateur, nous aurons

$$T_{p+k+1}=\frac{\sqrt{2\pi m}\ m^m e^{-m}}{\sqrt{2\pi(m\beta+k)}\left(1+\frac{K}{m\beta}\right)^{m\beta+K} m\beta^{m\beta+K} e^{-(m\beta+K)}}$$

$$\overline{\sqrt{2\pi(m\alpha-K)}\left(1-\frac{K}{m\alpha}\right)^{m\alpha-K} m\alpha^{m\alpha-K}\ e^{-(m\alpha-K)}}\quad \alpha^{m\alpha-K}$$

$\beta^{m\beta+K}$. (35).

En remarquant que $\alpha+\beta=1$, art. 23, on trouve

$$e^{-(m\beta+K)}e^{-(m\alpha-K)}=e^{-(m\beta+K-m\alpha-K)}=e^{-m\beta-K-m\alpha+K}=$$
$$e^{-m\beta-m\alpha}=e^{-m(\beta+\alpha)}=e^{-m(1)}=e^{-m}. \qquad (36).$$

En outre,
$$m\beta^{m\beta+K}m\alpha^{m\alpha-K}=m^{m\beta+K}\beta^{m\beta+K}m^{m\alpha-K}\alpha^{m\alpha-K}=$$
$$=m^{m\beta+K}m^{m\alpha-K}\beta^{m\beta+K}\alpha^{m\alpha-K}=m^{m\beta+K+m\alpha-K}\beta^{m\beta+K}\alpha^{m\alpha-K}=$$
$$=m^{m(\beta+\alpha)}\beta^{m\beta+K}\alpha^{m\alpha-K}=m^{m(1)}\beta^{m\beta+K}\alpha^{m\alpha-K}=$$
$$=m^m\beta^{m\beta+K}\alpha^{m\alpha-K}=\beta^{m\beta+K}\alpha^{m\alpha-K}m^m. \qquad (37).$$

De plus

$$\sqrt{2\pi(m\beta+K)}=\sqrt{2\pi m\beta+2\pi K}=\sqrt{2\pi m\beta+\frac{2\pi m\beta K}{m\beta}}=$$
$$=\sqrt{2\pi m\beta}\sqrt{1+\frac{K}{m\beta}}=\sqrt{2\pi m\beta}\left(1+\frac{K}{m\beta}\right)^{1/2} \qquad (38);$$

et
$$\sqrt{2\pi(m\alpha-K}=\sqrt{2\pi m\alpha}\left(1-\frac{K}{m\alpha}\right)^{1/2} \qquad (39).$$

Mais, nous pouvons écrire la valeur précédente de $T_{p+K+1}$ de la façon suivante :

$$T_{p+K+1} = \frac{m^m e^{-m} \sqrt{2\pi m}\, \alpha^{m\alpha - K}\, \beta^{m\beta+K}}{\left(1+\frac{K}{m\beta}\right)^{m\beta+K} m\beta^{m\beta+K}\, m\alpha^{m\alpha-K} \sqrt{2\pi(m\beta+K)}\sqrt{2\pi(m\alpha-K)}\, e^{-(m\beta+K)}\, e^{-(m\alpha-K)}\left(1-\frac{K}{m\alpha}\right)^{m\alpha-K}}$$

et, en transposant les termes et en ajoutant les exposants des termes semblables, il vient :

$$T_{p+K+1} = \frac{m^m e^{-m} \sqrt{2\pi m}\, \alpha^{m\alpha-K}\, \beta^{m\beta+K}}{\left(1+\frac{K}{m\beta}\right)^{m\beta+K+1/2} \sqrt{2\pi m \beta}\, e^{-m}\, \beta^{m\beta+K}\, \alpha^{m\alpha-K}\, m^m \sqrt{2\pi m\alpha}\left(1-\frac{K}{m\alpha}\right)^{m\alpha-K+1/2}}$$

et, en supprimant les facteurs communs aux deux termes de la fraction

$$T_{p+K+1} = \frac{1}{\left(1+\frac{K}{m\beta}\right)^{m\beta+K+1/2} \sqrt{2\pi m\beta}\,\sqrt{\alpha}\left(1-\frac{K}{m\alpha}\right)^{m\alpha-K+1/2}} =$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{K}{m\beta}\right)^{m\beta+K+1/2} \sqrt{2\pi}\,\sqrt{m\beta}\,\sqrt{\alpha}\left(1-\frac{K}{m\alpha}\right)^{m\alpha-K+1/2}} =$$

en multipliant les deux termes par $\sqrt{m} =$

$$= \frac{\sqrt{m}}{\left(1+\frac{K}{m\beta}\right)^{m\beta+K+1/2} \sqrt{2\pi}\,\sqrt{m}\,\sqrt{\alpha}\,\sqrt{m\beta}\left(1-\frac{K}{m\alpha}\right)^{m\alpha-K+1/2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{m}}{\left(1+\frac{K}{m\beta}\right)^{m\beta+K+1/2} \sqrt{2\pi m\alpha}\,\sqrt{m\beta}\left(1-\frac{K}{m\alpha}\right)^{m\alpha-K+1/2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2\pi m\alpha}\,\sqrt{m\beta}} \times \frac{1}{\left(1+\frac{K}{m\beta}\right)^{m\beta+K+1/2}} \times \frac{1}{\left(1-\frac{K}{m\alpha}\right)^{m\alpha-K+1/2}};$$

et en divisant par $\sqrt{m}$ les 2 termes de la fraction et en observant qu'en général $\frac{1}{\alpha^n} = \alpha^{-n}$, nous aurons :

$$T_{p+K+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi m\,\alpha\beta}} \times \left(1 + \frac{K}{m\beta}\right)^{-(m\beta+K+1/2)} \times \left(1 - \frac{K}{m\alpha}\right)^{-(m\alpha-K+1/2)} \quad (40).$$

Si, dans cette formule, nous faisons K=0, nous aurons la valeur du terme maximum $T_{p+1}$, art. 24 et 30, en observant que toute puissance de 1=1, nous aurons ainsi :

$$T_{p+0+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi m\alpha\beta}} \times (1+0)^{-(m\beta+K+1/2)} \times (1-0)^{-(m\alpha-K+1/2)}$$

ou
$$T_{p+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi m\alpha\beta}}. \quad (41).$$

34. — Remarquons que la quantité $1 + \frac{K}{m\beta} = l\, e^{\left(1+\frac{K}{m\beta}\right)} = e^{l\left(1+\frac{K}{m\beta}\right)}$.

Prouver ces égalités, cela revient à démontrer que $x = l.\,e^x = e^{lx}$, c'est-à-dire que le lagarithme népérien de $e^x$, lequel est x, égale e élevé à la puissance lx ou puissance logarithme népérien de x. En effet, le logarithme de $e^x$ = x fois le logaritme de e ; or, le logarithme népérien de e=1, puisque e est la base du système ; donc $l.e^x = x \times 1 = x$. (On sait que le signe l représente les log. népériens).

Maintenant, il faut prouver que $x = e^{lx}$. Ces deux quantités seront égales si elles ont même logarithme, c'est-à-dire si $lx = l\,e^{lx}$. Or, $l.\,e^{lx}$ ou le logarithme d'une puissance égale $lx \times le$ ; et $le = 1$, avons-nous vu ; donc, $l.e^{lx} = l.x.\,l\,e = lx.1 = lx$, ce qu'il fallait démontrer.

Par suite, on peut poser

$$1 + \frac{K}{m\,\beta} = e^{l\left(1+\frac{K}{m\beta}\right)}$$

D'où
$$\left(1 + \frac{K}{m\beta}\right)^{-(m\,\beta+K+1/2)} = e^{-(m\,\beta+K+1/2)\,l.\left(1+\frac{K}{m\beta}\right)}$$

De même
$$\left(1 - \frac{K}{m\alpha}\right)^{-(m\alpha-K+1/2)} = e^{-(m\alpha-K+1/2)\,l.\left(1-\frac{K}{m\alpha}\right)}$$

De là, en multipliant membre à membre les deux dernières égalités, il viendra

$$\left(1+\frac{K}{m\beta}\right)^{-(m\beta+K+1/2)}\left(1-\frac{K}{m\alpha}\right)^{-(m\alpha-K+1/2)} =$$

$$= e^{-(m\beta+K+1/2)\,l.\left(1+\frac{K}{m\beta}\right)-(m\alpha-K+1/2)\,l.\left(1-\frac{K}{m\alpha}\right)} \quad (42).$$

Lorsque $\frac{K}{m\beta}$ est assez petit, on a (voir cours d'analyse de l'Université de Liége, Catalan, 1879, page 151, en y remplaçant x par $\frac{K}{m\beta}$)

$$l.\left(1+\frac{K}{m\beta}\right) = \frac{K}{m\beta} - \frac{1}{2}\frac{K^2}{m^2\beta^2} + \frac{1}{3}\frac{K^3}{m^3\beta^3} - \ldots \pm \frac{1}{n}\frac{K^n}{m^n\beta^n} \mp \varphi\left(\frac{K}{m\beta}\right);$$

expression dans laquelle $\varphi\left(\frac{K}{m\beta}\right)$ est une fonction inconnue qui s'annule avec $\frac{K}{m\beta}$.

De même (voir p. 153 du cours précité) :

$$l.\left(1-\frac{K}{m\alpha}\right) = -\frac{K}{m\alpha} - \frac{1}{2}\frac{K^2}{m^2\alpha^2} - \frac{1}{3}\frac{K^3}{m^3\alpha^3} - \ldots \text{ etc.}$$

Et, en multipliant ces 2 dernières égalités respectivement par $-\left(m\beta+K+\frac{1}{2}\right)$ et par $-\left(m\alpha-K+\frac{1}{2}\right)$, nous aurons ;

$$-\left(m\beta+K+\frac{1}{2}\right) l.\left(1+\frac{K}{m\beta}\right) = -K + \frac{1}{2}\frac{K^2}{m\beta} - \frac{1}{3}\frac{K^3}{m^2\beta^2} - \ldots$$
$$-\frac{K^2}{m\beta} + \frac{1}{2}\frac{K^3}{m^2\beta^2} - \ldots - \frac{1}{2}\frac{K}{m\beta} + \frac{1}{4}\frac{K^2}{m^2\beta^2} - \text{ etc.}$$

$$\text{et } -\left(m\alpha-K+\frac{1}{2}\right) l.\left(1-\frac{K}{m\alpha}\right) = +K + \frac{1}{2}\frac{K^2}{m\alpha} + \frac{1}{3}\frac{K^3}{m^2\alpha^2} + \ldots - \frac{K^2}{m\alpha} - \frac{1}{2}\frac{K^3}{m^2\alpha^2} - \frac{1}{3}\frac{K^4}{m^3\alpha^3} - \ldots + \frac{1}{2}\frac{K}{m\alpha} + \frac{1}{4}\frac{K^2}{m^2\alpha^2} + \ldots$$

En additionnant ces 2 dernières égalités membre à membre, le premier membre sera l'exposant de e de la formule (42) et le second membre nous donnera pour la valeur de cet exposant

$$-K+K+\frac{1}{2}K^2\left(\frac{1}{m\beta}+\frac{1}{m\alpha}\right)+\frac{1}{3}K^3\left(\frac{1}{m^2\alpha^2}-\frac{1}{m^2\beta^2}\right)\ldots -$$
$$K^2\left(\frac{1}{m\beta}+\frac{1}{m\alpha}\right)+\frac{1}{2}K^3\left(\frac{1}{m^2\beta^2}-\frac{1}{m^2\alpha^2}\right)\ldots -\frac{1}{2}K\left(\frac{1}{m\beta}-\frac{1}{m\alpha}\right)$$

$$+\frac{1}{4}K^2\left(\frac{1}{m^2\beta^2}+\frac{1}{m^2\alpha^2}\right)\ldots \text{ ou } \frac{1}{2}K^2\left(\frac{m\alpha+m\beta}{m\alpha m\beta}\right)+\frac{1}{3}K^3$$

$$\left(\frac{m^2\beta^2-m^2\alpha^2}{m^2\alpha^2 m^2\beta^2}\right)\ldots -K^2\left(\frac{m\alpha+m\beta}{m\alpha m\beta}\right)+\frac{1}{2}K_3\left(\frac{m^2\alpha^2-m^2\beta^2}{m^2\alpha^2 m^2\beta^2}\right)$$

$$\ldots -\frac{1}{2}K\left(\frac{m\alpha-m\beta}{m\alpha m\beta}\right)+\frac{1}{4}K^2\left(\frac{m^2\alpha^2+m^2\beta^2}{m^2\alpha^2 m^2\beta^2}\right)\ldots$$

$$\text{ou } \frac{1}{2}K^2\frac{m(\alpha+\beta)}{m^2\alpha\beta}+\frac{1}{3}K^3\frac{m^2(\beta^2-\alpha^2)}{m^4\alpha^2\beta^2}\ldots -K^2\frac{m(\alpha+\beta)}{m^2\alpha\beta}+$$

$$\frac{1}{2}K^3\frac{m^2(\alpha^2-\beta^2)}{m^4\alpha^2\beta^2}\ldots -\frac{1}{2}K\frac{m(\alpha-\beta)}{m^2\alpha\beta}+\frac{1}{4}K^2\frac{m^2(\alpha^2+\beta^2)}{m^4\alpha^2\beta^2}\ldots\ldots$$

ou, en observant que $\alpha+\beta=1$, art. 23 :

$$\frac{1}{2}K^2\frac{1}{m\alpha\beta}+\frac{1}{3}K^3\frac{(\beta^2-\alpha^2)}{m^2\alpha^2\beta^2}\ldots -K^2\frac{1}{m\alpha\beta}+\frac{1}{2}K^3\frac{(a^2-\beta^2)}{m^2\alpha^2\beta^2}\ldots$$

$$-\frac{1}{2}K\frac{(\alpha-\beta)}{m\alpha\beta}+\frac{1}{4}K^2\frac{\alpha^2+\beta^2}{m^2\alpha^2\beta^2}\ldots$$

$$\text{ou } \frac{\left(\frac{1}{2}K^2-K^2\right)}{m\alpha\beta}+\left(\frac{1}{3}K^3-\frac{1}{2}K^3\right)\frac{\beta^2-\alpha^2}{m^2\alpha^2\beta^2}\ldots -\frac{1}{2}K\frac{(\alpha-\beta)}{m\alpha\beta}+$$

$$\frac{1}{4}K^2\frac{\alpha^2+\beta^2}{m^2\alpha^2\beta^2}\ldots$$

$$\text{ou } -\frac{1}{2}\frac{K^2}{m\alpha\beta}-\frac{1}{6}\frac{K^3(\beta^2-\alpha^2)}{m^2\alpha^2\beta^2}\ldots -\frac{1}{2}\frac{K}{m}\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}+\text{etc.}$$

$$\text{ou } -\frac{1}{2}\frac{K^2}{m\alpha\beta}-\frac{1}{6}\frac{K^3}{m^2}\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2\beta^2}\ldots \text{ ou } -\frac{1}{2}\frac{K^2}{m\alpha\beta}-\frac{1}{6}\frac{K}{m}\frac{K^2}{m}$$

$$\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2\beta^2}\ldots$$

Si $K<\sqrt{m}$, on a $K^2<m$ et $\frac{K^2}{m}<1$, ce qui permet de négliger $\frac{K}{m}$, car on a alors $\frac{K}{m}<\frac{\sqrt{m}}{m}<\frac{\sqrt{m}}{(\sqrt{m})^2}<\frac{1}{\sqrt{m}}$ ; or, quand le nombre d'évênements m est très grand, $\frac{1}{\sqrt{m}}$ est très petit, et à plus forte raison $\frac{K}{m}$. On négligera donc dans l'expression de l'exposant de e, tous les

termes de l'ordre $\frac{K}{m}$ et l'on ne tiendra compte que de ceux de l'ordre $\frac{K^n}{m}$. D'une façon approchée, en ne prenant que le premier terme, on aura pour la valeur de l'exposant de e, celle-ci :

$$-\frac{1}{2}\frac{K^2}{m\,\alpha\,\beta}. \qquad (43).$$

Concluons donc, puisque $K < \sqrt{m}$, que le nombre de termes K que l'on prendra à droite et à gauche du terme maximum $T_{p+1}$ ne pourra dépasser la racine carrée de la puissance m de $(\alpha+\beta)$ ; m étant le nombre d'expériences et $\alpha$, $\beta$ étant les probabilités de 2 évènements contradictoires A et B. (Voir art. 24).

35. — Cela étant, pour avoir la valeur d'un terme quelconque de rang représenté par $p+K+1$, on substituera, dans la formule (40), d'abord la valeur donnée par la formule (42) et l'on aura :

$$T_{p+K+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi m\,\alpha\,\beta}} \times$$

$$e^{-\left(m\beta+K+\frac{1}{2}\right)\left[l\left(1+\frac{K}{m\beta}\right)\right]-\left(m\alpha-K+\frac{1}{2}\right)\left[l\left(1-\frac{K}{m\alpha}\right)\right]}$$

et, en remplaçant l'exposant de e par la valeur représentée par la formule (43), nous aurons enfin pour la valeur approchée du terme considéré :

$$T_{p+K+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi m\alpha\beta}} \times e^{-1/2\,\frac{K^2}{m\alpha\beta}} \qquad (44).$$

*Remarque I.* — Puisque K est élevé au carré dans le second membre, la valeur de ce membre ne varie pas avec la signe de K, donc on peut poser

$$T_{p+K+1} = T_{p-K+1} \text{ ou } T_{p+1+K} = T_{p+1-K}. \qquad (45) ;$$

ce qui exprime que les *termes situés à égale distance K du terme maximum* $T_{p+1}$ *sont égaux* ; et comme K s'appelle *écart*, on peut exprimer ce qui précède en disant que les *écarts égaux de signes contraires, sont également probables.*

*Remarque II.* — Nous avons vu, d'après les formules (31) et (32), art. 31, que les valeurs approchées de $m-p$ et de p sont respectivement $m\alpha$ et $m\beta$ ; or, de $m-p = m\alpha$ on

tire $p = m - m\alpha = m(1-\alpha)$; donc, en substituant dans la formule (45), il vient

$$T_{m(1-\alpha)+1+K} = T_{m(1-\alpha)+1-K}$$

et de même
$$T_{m\beta+1+K} = T_{m\beta+1-K}$$

ou
$$T_{m(1-\alpha)+1+K} = T_{m\beta+1+K}$$

et
$$T_{m(1-\alpha)+1+K} = T_{m\beta+1-K}$$

etc.

*Remarque III.* — Voir art. 24.

36. – Revenons enfin à l'art. 24, et évaluons d'une façon approchée la somme

$$P = \Sigma_{-K}^{K}\ T_{(p+1)+K} \qquad (46);$$

K variant entre $-K$ et $+K$, c'est donc la somme à partir du terme de rang $p+1-K$ jusqu'au terme de rang $p+1+K$; et, nous aurons ainsi, (voir art. 24 et 31):

***La probabilité P que les évênements contradictoires A et B, dont les probabilités sont respectivement*** $\alpha$ ***et*** $\beta$, ***se présenteront des nombres de fois compris entre*** $m\alpha - K$ ***et*** $m\alpha + K$ ***pour*** A, ***et*** $m\beta - K$ ***et*** $m\beta + K$ ***pour*** B.

D'après la formule (44), la formule (46) qui nous donne la somme à évaluer peut se mettre sous la forme :

$$P = \Sigma_{-K}^{K}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi m\alpha\beta}}\ e^{-1/2\,\frac{K^2}{m\alpha\beta}}$$

ou, en faisant sortir du signe $\Sigma$ la valeur indépendante de K :

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi m\alpha\beta}}\ \Sigma_{-K}^{K}\ e^{-1/2\,\frac{K^2}{m\alpha\beta}} \qquad (47);$$

formule dans laquelle K, exprimant un nombre de termes, prend toutes les valeurs entières comprises entre $-K$ et $+K$.

Nous pouvons poser l'équation

$$y = e^{-1/2\,\frac{x^2}{m\alpha\beta}}$$

laquelle représente une courbe qui s'approche asymptotiquement de l'axe des abscisses x. (Voir 1re partie, art. 117, p. 147 et 148, où l'on peut remplacer a par e et l'exposant $-n$ par l'exposant $-\frac{1}{2}\,\frac{x^2}{m\alpha\beta}$).

Représentons par $y_x$ l'ordonnée, de la courbe, correspondant à l'abscisse x, nous aurons, en faisant successive-

ment $x = -K$, $x = -K+1$, $x = -K+2$, ... $x = -1$, $x = 0$, $x = +1$, ... $x = +K$, les valeurs correspondantes pour $y$, savoir : $y_{-K}$ ; $y_{-K+1}$ ; $y_{-K+2}$ ; ... ; $y_{-1}$ ; $y_0$ ; $y_{+1}$ ; ... $y_{+K}$.

En faisant la somme, nous pouvons donc poser

$$\sum_{-K}^{+K} e^{-\frac{x^2}{2m\alpha\beta}} = y_{-K} + y_{-K+1} + \dots + y_{-1} + y_0 + y_{+1} + \dots + y_{+K} = S \qquad (48) ;$$

formule dans laquelle x varie donc de $-K$ à $+K$ et où S représente la somme de toutes les ordonnées correspondantes.

Observons que le terme $y_0$ correspond au terme $T_{p+1}$ et que les termes également distants de $y_0$ sont égaux, voir art. 35, remarque I. Il y aura K termes à gauche de $y_0$ et K termes à droite, et ces termes sont égaux deux à deux. Par suite on peut poser, en représentant donc le premier membre de l'égalité ci-dessus, ou la somme, par S :

$$S = y_0 + 2 \sum_1^K y_x$$

formule dans laquelle x varie de 1 à K.

Les formules (47) et (48) donnent pour la probabilité résultante P :

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi m\alpha\beta}} S$$

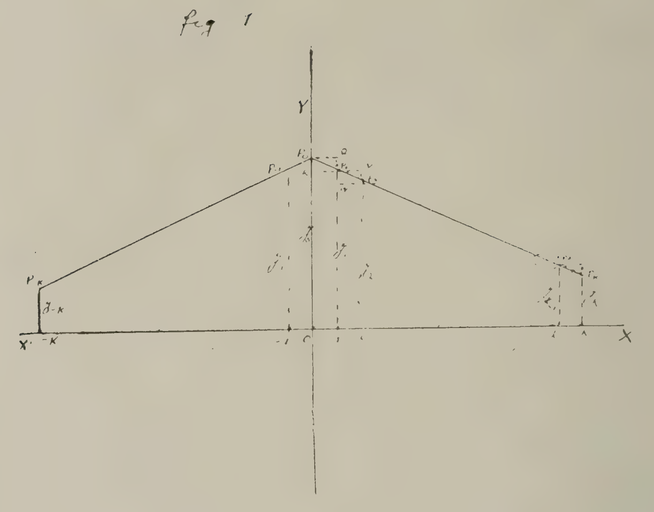
Nous allons d'abord chercher la valeur de S.

Pour cela, imaginons tracée, par points, la courbe que représente l'équation

$$y = e^{-\frac{x^2}{2m\alpha\beta}}$$

Soient les deux axes coordonnés O X et OY, figure ci-contre. Admettons une unité quelconque et portons-la K fois à droite et K fois à gauche de l'origine sur l'axe des x. Par les points 1, 2, 3, ..., K, $-1$, $-2$, $-3$, ..., $-K$, obtenus, menons avec la même unité, les ordonnées correspondantes $y_0$ jusque $y_K$ et jusque $y_{-K}$. Nous obtenons les points $P_0$, $P_1$, ..., $P_K$, et $P_{-1}$, ... $P_{-R}$ de la courbe. Joignons par une ligne droite les points $P_0$ et $P_K$ ; $P_0$ et $P_{-K}$.

Menons les parallèles $P_0$ Q et $P_1$ R, etc, de façon à former les rectangles O 1 Q $P_0$ ; O 1 $P_1$ K ; etc.




Considérons la moitié de droite de la figure et soit A l'aire de la courbe comprise entre les ordonnées O $P_0$ et K $P_K$.

Cette aire est plus petite que la somme des rectangles O 1 Q $P_0$ ; 12 V $P_1$ ; etc, que nous appellerons rectangles *excédents* ; et elle est plus grande que la somme des rectangles O 1 $P_1$ R; 12 $P_2$ W ; etc, que nous appellerons rectangles *déficients*.

Il est évident que la somme $A_1$ des rectangles excédents a pour valeur

$(O, P_0 \times O, 1) + (1, P_1 \times 1, 2) + \ldots + (K_{-1}, P_{K-1} \times K_{-1}, K)$.

Mais les longueurs o, 1 = 1, 2 = ... = $K_{-1}$, K ; donc, la somme ci-dessus est

$A_1 = (O\,P_0 + 1\,P_1 + \ldots + K_{-1}, P_{K-1}) \times o1 = (y_0 + y_1 + \ldots + y_{K-1}) \times o1$.

Or, o1 = l'unité ; donc

$$A_1 = y_0 + y_1 + \ldots + y_{K-1}.$$

De même, on trouverait que la somme, soit $A_2$, des rectangles déficients est égale à

$$A_2 = y_1 + y_2 + \ldots + y_K.$$

Mais on a, en représentant par A l'aire exacte de la courbe (moitié droite) :

$$A_1 > A > A_2 .$$

En admettant prises les unités (abscisses) $01 = 1, 2 =$ etc, assez petites, on peut considérer A comme égal à la moyenne de $A_1$ et de $A_2$. On ainsi :

$$A = \frac{A_1 + A_2}{2} = \frac{(y_0 + y_1 + \ldots + y_{K-1}) + (y_1 + y_2 + \ldots + y_K)}{2} =$$

$$\frac{y_0 + y_K + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{K-1})}{2}$$ et, par suite, l'aire totale de la figure (courbe) sera

$$2A = y_0 + y_K + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{K-1}) = (y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{K-1} + y_K) + (y_1 + y_2 + \ldots + y_{K-1}).$$

Mais nous avons vu que

$$S = y_0 + 2\sum_{1}^{K} y_x = (y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_K) + (y_1 + y_2 + \ldots + y_K)$$

$= (y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_K) + (y_1 + y_2 + \ldots + y_{K-1}) + y_K =$ $= 2A + y_K$ ; et pour réduire la différence résultant de ce que nous avons considéré A comme égal à la moyenne de $A_1$ et de $A_2$, ayant pris les unités sur l'axe des abscisses assez petites, nous ajouterons une indéterminée $\varepsilon$ (i ou epsilonn minuscule du grec ancien) pour représenter la somme des *triangles mixtilignes* excédents ou en plus sur l'aire de la courbe ; et une autre indéterminée $\rho$ (ou r ou rô minuscule du grec ancien) pour représenter la somme des triangles mixtilignes déficients ou en moins sur l'aire précitée, nous aurons ainsi

$$S = 2A + y_K + \varepsilon - \rho. \qquad (49).$$

Remarquons que nous ajoutons la somme des triangles mixtilignes excédents et que nous retranchons la somme des triangles mixtilignes déféciens, de sorte que la différence est très petite.

Revenons à la formule (47) qui donne pour la probabilité cherchée

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi m \alpha \beta}} \sum_{K}^{K} e^{-\frac{1}{2}\frac{K^2}{m\alpha\beta}}$$

et, en vertu des formules (48) et (49), nous pourrons poser successivement

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi m \alpha \beta}} S = \frac{1}{\sqrt{2\pi m \alpha \beta}} (2A + J_K + \varepsilon - \rho). \quad (50).$$

Mais la quantité A est l'aire de la courbe, avons-nous vu, dont l'équation est $y = e^{-\frac{x^2}{2m\alpha\beta}}$ = une certaine fonction de $x = f(x)$ ; et, (voir 1re partie p. 244), si pour la courbe représentée par $y = f(x)$, la quadrature ou l'aire est exprimée par $A = \int y dx$, pour le cas ici présent, nous remplacerons $f(x)$ par $e^{-\frac{x^2}{2m\alpha\beta}}$ et nous obtiendrons (pour la $\frac{1}{2}$ de droite ) :

$$A = \int y dx = \int f(x) dx = \int e^{-\frac{x^2}{2m\alpha\beta}} dx$$

et, en prenant l'aire du $-K$ à $+K$, il viendra

$$2A = \int_{-K}^{K} e^{-\frac{x^2}{2m\alpha\beta}} dx.$$

En substituant cette valeur dans l'équation(50), on aura :

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi m\alpha\beta}} \left( \int_{-K}^{K} e^{-\frac{x^2}{2m\alpha\beta}} dx + y_K + \varepsilon - \rho \right). \quad (51).$$

Et, comme la quantité $\varepsilon - \rho$ est très petite, nous pourrons le négliger et nous aurons :

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi m\alpha\beta}} \left( \int_{-K}^{K} e^{-\frac{x^2}{2m\alpha\beta}} dx + y_K \right). \quad (52).$$

37. — Nous pouvons poser, puisque m, $\alpha$ et $\beta$ sont des nombres positifs et que $x^2$ l'est essentiellement :

$\frac{x^2}{2m\alpha\beta} = t^2$, d'où $x = \sqrt{2m\alpha\beta t^2} = \sqrt{2m\alpha\beta}\, t$ et $dx = \sqrt{2m\alpha\beta}\, dt$. (Voir 4° p. 12, 1re partie).

D'après ce que nous avons dit et la figure qui précède, on voit que lorsque $x = 0$, l'aire $= 0$ et l'on a $t = 0$ ; et si $x = k$, il vient $t = \frac{K}{\sqrt{2m\alpha\beta}}$, d'où $K = t\sqrt{2m\alpha\beta}$.

En substituant la nouvelle variable t dans l'intégrale, nous aurons donc

$$\int_{-K}^{K} e^{-\frac{x^2}{2m\alpha\beta}} dx = \int_{-K}^{K} e^{-t^2} dt \sqrt{2m\alpha\beta} = \sqrt{2m\alpha\beta} \int_{-K}^{K} e^{-t^2} dt$$

et la formule (52) devient

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi m\alpha\beta}} \left[ \left( \sqrt{2m\alpha\beta} \int_{-K}^{K} e^{-t^2} dt \right) + y_K \right] = \frac{\sqrt{2m\alpha\beta}}{\sqrt{2\pi m\alpha\beta}} \int_{-K}^{K} e^{-t^2} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi m\alpha\beta}} y_K.$$

Mais, art. 36, nous avons $y = e^{-\frac{x^2}{2m\alpha\beta}}$ et quand $x = K$, $y$ devient $y_K$ et l'on a : $y_K = e^{-\frac{K^2}{2m\alpha\beta}}$, d'où l'expression ci-dessus de P devient, en simplifiant le premier facteur et en substituant cette valeur de $y_K$ :

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-K}^{K} e^{-t^2} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi m\alpha\beta}} e^{-\frac{K^2}{2m\alpha\beta}}.$$

Mais $\frac{1}{\sqrt{2\pi m\alpha\beta}} e^{-\frac{K^2}{2m\alpha\beta}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi m\alpha\beta}\; e^{\frac{K^2}{2m\alpha\beta}}}$. Or, $K^2$ est positif, et, par suite le dénominateur de l'expression précédente est positif puisque $\pi$, m, $\alpha$, $\beta$ le sont aussi, et lorsque le nombre d'expériences m est très-grand cette fraction devient très-petite et peut être négligée, de sorte qu'il vient

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-K}^{K} e^{-t^2} dt. \qquad (53).$$

Et, comme l'aire de o à K est égale à celle de o à $-K$, il suffit de prendre l'intégrale de o à K en multipliant par 2, et l'on a enfin

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{K} e^{-t^2} dt. \qquad (53^{bis}).$$

Soit à trouver par la méthode des séries l'intégrale $\int e^{-t^2} dt$.

On sait qu'on a

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots \qquad (a).$$

Or, à la p. 195 de la 1[re] partie, nous voyons le moyen d'intégrer par les séries une différentielle représentée par l'expression générale Xdx, dans laquelle X représente une fonction de x. En développant X et représentant ce développement par la suite

$$X = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + Dx^{\delta} + \text{etc.}$$

ordonnée par rapport aux expressions $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, etc., on a pour l'intégrale

$$\int Xdx = \int \left(Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + Dx^{\delta} + \dots\right)dx = \frac{Ax^{\alpha+1}}{\alpha+1} + B\frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} + C\frac{x^{\gamma+1}}{\gamma+1} + D\frac{x^{\delta+1}}{\delta+1} + \dots$$

On voit donc que par la méthode d'intégration par les séries, on cherche l'intégrale d'une différentielle donnée, en la mettant sous la forme X dx, en opérant le développement de l'expression représentée par X, en multipliant par dx, puis en intégrant chaque terme en particulier.

Si donc, dans l'expression $e^{-t^2}\,dt$, nous faisons $e^{-t^2} = X$ et $dt = dx$, il vient

$$\int e^{-t^2}\,dt = \int X\,dx.$$

On pourrait mettre $\int e^{-t^2}\,dt = \int T\,dt$ ; T étant une fonction de t.

Il nous faut donc développer X ou $e^{-t^2}$. Or, la formule (a) donne en posant $x = -t^2$ :

$$e^x = e^{-t^2} = 1 + \frac{(-t^2)}{1} + \frac{(-t^2)^2}{1.2} + \frac{(-t^2)^3}{1.2.3} + \frac{(-t^2)^4}{1.2.3.4} + \frac{(-t^2)^5}{1.2.3.4.5} + \dots = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{6} + \frac{t^8}{24} - \frac{t^{10}}{120} + \dots$$

$$\text{et} \int X\,dx = \int e^{-t^2}\,dt = \int \left(1 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{6} + \frac{t^8}{24} - \frac{t^{10}}{120} + \dots\right)dt = t^1 - \frac{t^{2+1}}{2+1} + \frac{t^{4+1}}{2(4+1)} - \frac{t^{6+1}}{6(6+1)} + \frac{t^{8+1}}{24(8+1)}$$

$$- \frac{t^{10+1}}{120\,(10+1)} + \ldots = t - \frac{t^3}{1 \times 3} + \frac{t^5}{(1 \times 2)5} - \frac{t^7}{(1 \times 2 \times 3)\,7} +$$

$$+ \frac{t^9}{(1 \times 2 \times 3 \times 4)\,9} - \frac{t^{11}}{(1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5)\,11} + \ldots$$

Remarquons la loi de formation des termes de cette série ; ils sont alternativement positif et négatif; les numérateurs sont formés de l'inconnue t affectée d'exposants formant la suite des nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, 11, etc. ; et les dénominateurs sont formés des produits successifs des mêmes nombres impairs correspondants aux exposants de leur numérateur respectif, multiplié, respectivement par la suite des produits $1, 1 \times 2, 1 \times 2 \times 3, 1 \times 2 \times 3 \times 4, 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$, etc., ou 1, 2, 6, 24, 120, etc. La formation des termes de la série est donc facile.

Or, on a
$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^K e^{-t^2}\, dt$$
et, comme, art. 69 du calcul intég. 1re partie, pour prendre l'intégrale de 0 à K, il suffit de remplacer t par K dans l'ingrale, il vient

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( K - \frac{K^3}{3} + \frac{K^5}{10} - \frac{K^7}{42} + \ldots \right).$$

Mais $\sqrt{\pi} = 1{,}77245385\ldots$ et $\frac{2}{\sqrt{\pi}} = 1{,}1284\ldots$, donc

$$P = 1{,}1284\ldots \left( K - \frac{K^3}{3} + \frac{K^5}{10} - \frac{K^7}{42} + \ldots \right)$$

Nous avons vu que $x = K = t\sqrt{2m\alpha\beta}$, et si l'on prend t très-petit, K sera également assez petit et l'on verra que la probabilité P se rapproche cependant beaucoup de l'unité. En effet, soient $\alpha = 3/5$ et $\beta = 2/5$ ; $m = 100$, il vient $K = t\sqrt{2m\alpha\beta} = t\sqrt{2 \times 100 \times 3/5 \times 2/5} = t\sqrt{48} = 7\,t$ environ.

Remarquons que K doit être entier en tant qu'indiquant le nombre des termes du développement.

Lorsque $t = 0$, il vient $K = 0$, l'aire $= 0$ et $P = 0$.

Si $t = 0{,}1$ on obtient $K = 0{,}1\sqrt{48} = 0{,}7$ enviro ; en effet $K = 7\,t = 7 \times 0{,}1 = 0{,}7$ environ. Nous ne poussons pas

les calculs bien loin dans la recherche des décimales ; nous laissons ce soin au lecteur pour chaque cas particulier ; sa tâche sera facilitée en faisant usage des logarithmes ; nous nous contentons d'indiquer la marche à suivre.

Pour $K=0,7$ il vient $P=1,1284 \ldots \left(0,7-\frac{\overline{0,7}^{3}}{3}+\frac{\overline{0,7}^{5}}{10}-\text{etc}\right)=0,754$ approximativement.

Quand $K=1$, $t=\frac{K}{\sqrt{2m\alpha\beta}}=\frac{1}{\sqrt{2\times 100\times 3/5\times 2/5}}=\frac{1}{\sqrt{48}}=$ $=\frac{1}{7}$ environ $=0,143 \ldots$ et alors $P=1,1284 \ldots \left(1-\frac{1}{3}+\right.$ $\left.+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\ldots\right)=1,1284 \ldots (0,743 \ldots)=0,8384 \ldots$ environ ; donc on voit que pour des valeurs même relativement faibles de t ou de K, P se rapproche de l'unité à mesure que t ou K augmente. (Plus K est grand, plus l'aire A est grande et P est grand, formule (50), mais, ainsi que le montre la figure précédente cette aire augmente de moins en moins puisque les ordonnées $y_K$, $y_{K+1}$, etc., diminuent.

Or, la probabilité *unité* exprime la certitude, art. 7.

Nous pouvons donc énoncer le théorême de Bernouilli comme il suit (art. 24) :

*Il existe une probabilité P qui se rapproche autant qu'on le veut de l'unité, que sur un nombre m suffisamment grand d'expériances, les nombres d'arrivées m—p et p ou a et b des événements contradictoires A et B, dont les probabilités sont* $\alpha$ *et* $\beta$, *sont compris entre* $m\alpha+K$ *et* $m\alpha-K$ *pour a ;* $m\beta-K$ *et* $m\beta+K$ *pour b ; ce qu'on exprime en posant :*

$$m\alpha+K > a > m\alpha-K$$
$$m\beta+K > b > m\beta-K.$$

*Remarque.* — Pour la démonstration du théorême, nous avons supposé $K<\sqrt{m}$, voir art. 34 ; néanmoins lorsque l'on prend tout le développement de $(\alpha+\beta)^m$, on

obtient pour l'expression de P une valeur qui se rapproche beaucoup de l'unité, même quand m n'est pas très-grand. Dans les exemples cités ci-dessus, applications, nous n'avons pris que 4 termes du développement et m n'est pas très-grand, aussi, ainsi que nous l'avons dit, nous nous sommes contentés d'indiquer la marche à suivre dans chaque cas particulier.

38. — *Écart absolu et écart relatif.* — Nous venons de voir, art. précédent, que le théorème de Bernouilli donne (les nombres des arrivées effectives des évênements étant représentés par a et b) :

$$m\alpha + K > a > m\alpha - K$$
$$m\beta + K > b > m\beta - K$$

La quantité K, considérée en valeur absolue, c'est-à-dire indépendemment du signe, est la différence entre $m\alpha$ et a, et entre $m\beta$ et b.

Cette quantité K est appelée *écart absolu*, remarque 1, art. 35.

Les inégalités ci-dessus peuvent s'écrire, en divisant par m :

$$\alpha + \frac{K}{m} > \frac{a}{m} > \alpha - \frac{K}{m};$$
$$\beta + \frac{K}{m} > \frac{b}{m} > \beta - \frac{K}{m};$$

et la quantité $\frac{K}{m}$, considérée en valeur absolue, indique la différence entre $\alpha$ ou $\beta$ et $\frac{a}{m}$ ou $\frac{b}{m}$.

$\alpha$ et $\beta$ sont les probabilités données à priori des évênements A et B, (voir art. 24) ; $\frac{a}{m}$ et $\frac{b}{m}$ sont des rapports de nombres, donnés par l'observation, qui s'approchent indéfiniment de $\alpha$ et de $\beta$ à mesure que K diminue ; en effet, $\frac{a}{m} < \alpha + \frac{K}{m}$ et $> \alpha - \frac{K}{m}$ ; or, à la limite, où K est très petit, $\frac{K}{m}$ s'annule, et il vient $\frac{a}{m} < \alpha + 0$ et $> \alpha - 0 = \alpha$ à

la limite. De même pour $\frac{b}{m} = \beta$ à la limite. Nous admettons ici que l'indéfiniment petit, ou l'infiniment petit, s'annule à la limite.

La quantité $\frac{K}{m}$, prise en valeur absolue, s'appelle *écart relatif*; et elle exprime donc la différence qui existe entre les probabilités $\alpha$ et $\beta$ (données à priori des évênements contradictoires A et B), et les nombres $\frac{a}{m}$ et $\frac{b}{m}$ qui peuvent représenter approximativement ces probabilités. De sorte que, envisagé sous ce point de vue, le théorême de Bernouilli donne le moyen de déduire des observations, les valeurs $\frac{a}{m}$ et $\frac{b}{m}$, valeurs approchées des probabilités $\alpha$ et $\beta$ de deux évênements contradictoires A et B.

39. — *Ecart mé tian et écart médian relatif.*— Supposons qu'on ait deux évênements contradictictoires A et B, dont les probabilités respectives sont $\alpha$ et $\beta$. Les nombres de fois qu'ils se présentent sont respectivement a et b, sur m expériences. On a donc

$$a + b = m.$$

Mais on a vu, art. 37, formule $53^{bis}$, que

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int^{K} e^{-t^2} dt.$$

Et approximativement nous avons trouvé pour K=1 ou t = 0, 1 4 3..., P = 0, 8 3 2 1 6 environ, et plus P s'aprsche de l'unité, plus on s'approche de la certitude, art. 7.

Pour certaine valeur de t ou de K, on trouverait $P = 0{,}5 = \frac{1}{2}$, ce qui marquerait l'incertitude, art. 7, c'est-à-dire qu'on pourrait s'attendre aussi bien à l'évênement considéré qu'à son contradictoire.

Réciproquement, pour une certaine probabilité donnée, il est possible de calculer la valeur correspondante K de l'écart absolu, cet écart dépendant aussi du nombre d'observations m et des probabilités $\alpha$ et $\beta$ des évènements A et B.

Si l'on calcule la valeur de K correspondant à la probabilité $\frac{1}{2}$,laquelle marque l'incertitude, alors on représente K par $\lambda$, (ou lettre l ou lambda du grec ancien). Et alors, on peut donc dire qu'il est aussi probable que l'évênement A arrive un nombre de fois compris entre les limites $m\alpha - \lambda$ et $m\alpha - \lambda$, art. 38, que de voir cet évênement tomber en dehors de ces limites, puisque $\frac{1}{2}$ indique l'incertitude, art. 7.

On donne à $\lambda$ l'appellation d'*écart médian*, et à $\frac{\lambda}{m}$ celle d'*écart médian relatif.*

On a cherché quelle est la probabilité que l'écart absolu K ne dépasse pas un certain nombre de fois l'écart médian $\lambda$. Par exemple, si l'on admet que l'écart absolu K soit égal à 5 fois l'écart médian $\lambda$, il faudra donner une valeur 5 fois plus grande à la valeur de t qui a amené $K = \lambda$, et la probabilité que l'on obtiendra sera celle exprimant que le nombre d'arrivées de A tombe entre $m\alpha + 5\lambda$ et $m\alpha - 5\lambda$, c'est à dire la probabilité que l'écart absolu n'atteigne pas 5 fois l'écart médian.

40. — *Espérance mathématique.* — Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ représentent les gains ou les pertes (suivant les signes de ces quantités) qui peuvent être amenés par des évênements dont les probabilités sont respectivement $p_1$, $p_2$, ..., $p_n$, on appelle, *par définition, espérance mathémathique* la valeur exprimée par

$$E = p_1\,\alpha_1 + p_2\,\alpha_2 + \ldots + p_n\,\alpha_n . \qquad (56).$$

41. — *Ruine du joueur.* — Considérons le cas de deux joueurs et soient $p_1$ et $p_2$ leur probabilité respective de gain ; soient $\alpha_1$ et $\alpha_2$ leurs mises. Cherchons quelles sont les conditions pour que le jeu soit juste. S'il existe une disproportion marquée entre les chances de jeu des deux joueurs,il faut évidemment,pour que le jeu soit juste, soit la faire disparaître, soit faire varier les enjeux. Il est évident que le jeu sera juste, si les enjeux $\alpha_1$ et $\alpha_2$ sont proportionnels aux probabilités de gagner $p_1$ et $p_2$ ; ce qu'on traduit comme il suit :

$$\frac{\alpha_1}{p_1} = \frac{\alpha_2}{p_2}. \qquad (57);$$

d'où $\alpha_2 p_1 = \alpha_1 p_2$ ou $\left.\begin{array}{l}\alpha_2 p_1 - \alpha_1 p_2 = 0 \\ \alpha_1 p_2 - \alpha_2 p_1 = 0\end{array}\right\}$ (58).

Lorsque le premier joueur gagne, il emporte la mise $\alpha_2$ du second joueur ; $\alpha_2$ est donc le *gain* possible du premier et sera positif ; $\alpha_1$ est sa *perte* possible et sera négative.

Donc, par définition, l'espérance mathématique de ce premier joueur est exprimée par

$$E_1 = \alpha_2 p_1 + (-\alpha_1) p_2$$

ou, en vertu des expressions (58)

$$E_1 = \alpha_2 p_1 + (-\alpha_1) p_2 = 0 \text{ ou } E_1 = \alpha_2 p_1 - \alpha_1 p_2 = 0.$$

Et, si c'est le second joueur qui gagne, il emportera la mise $\alpha_1$ du premier joueur ; $\alpha_1$ est donc le gain probable du second joueur et $\alpha_2$ est sa perte probable ; donc, son espérance mathématique sera exprimée par

$$E_2 = \alpha_1 p_2 + (-\alpha_2) p_1$$

et, en vertu des expression (58)

$$E_2 = \alpha_1 p_2 + (-\alpha_2) p_1 = 0 \text{ ou } \alpha_1 p_2 - \alpha_2 p_1 = 0.$$

Comme ces espérances mathématiques sont basées sur la proportionnalité des enjeux aux probabilités de gagner, ou en conclut que pour *que le jeu soit juste, il faut que l'espérance mathématique de l'un comme de l'autre des deux joueurs soit nulle.*

Supposons que le nombre des parties jouées par ces deux joueurs soit représenté par m, les autres données restant les mêmes.

La théorême de Bernouilli, art. 24 et 37, indique que sur un nombre m de parties, les joueurs gagneront un nombre de parties compris entre (en remplaçant $\alpha$ et $\beta$ par $p_1$ et $p_2$) :

$m p_1 + K$ et $m p_1 - K$ pour le premier joueur ;

et $m p_2 - K$ et $m p_2 + K$ pour le second joueur.

Au bout de ces m parties, le gain G du premier joueur sera, (puisque $\alpha_2$ et $\alpha_1$ sont respectivement le gain et la perte par partie) :

G=gain du 1er joueur moins perte du 1er ou gain du 2e joueur,

ou $G=(mp_1 \pm K)\,\alpha_2 - (mp_2 \mp K)\,\alpha_1 = mp_1\,\alpha_2 \pm K\,\alpha_2 - mp_2\,\alpha_1 \pm K\,\alpha_1 = m\,(p_1\,\alpha_2 - p_2\,\alpha_1) \pm K\,(\alpha_2 + \alpha_1)$.

Supposons que le jeu ne soit pas juste et qu'il soit arrangé de telle façon que $p_1\,\alpha_2 - p_2\,\alpha_1$, (qui est comme nous avons vu, l'espérance mathématique du premier joueur), ait une valeur déterminée $l^2$, par exemple, (positive puisque c'est un carré, ainsi elle représente un gain), aussi petite que l'on veut, c'est-à-dire qu'on ait donc

$$p_1\,\alpha_2 - p_2\,\alpha_1 = l^2 .$$

Le gain final du 1^er^ joueur pourra par suite être représenté par

$$G = m\,l^2 \pm K\,(\alpha_1 + \alpha_2). \qquad (59).$$

Le cas le plus défavorable pour le premier joueur est celui où l'on prend, dans cette formule (59), K avec le signe négatif. Par conséquent, le gain sera plus grand que $ml^2 - K\,(\alpha_1 + \alpha_2)$, ce qui s'exprime ainsi

$$G > m\,l^2 - K\,(\alpha_1 + \alpha_2).$$

Or, on a vu, art. 34, que $K < \sqrt{m}$ ; donc on peut poser $K = \theta\,\sqrt{m}$, $\theta$ étant $> 0$ et $< 1$.

($\theta$ est la lettre thêta (th) du grec ancien).

En substituant, il vient

$$G > m\,l^2 - \theta\sqrt{m}\,(\alpha_1 + \alpha_2)$$

ou
$$G > \sqrt{m}\ \sqrt{m}\,l^2 - \sqrt{m}\,\theta\,(\alpha_1 + \alpha_2)$$

ou enfin
$$G > \sqrt{m}\,[\sqrt{m}\,l^2 - \theta\,(\alpha_1 + \alpha_2)].$$

Mais quel que soit $l^2$ (qui est essentiellement positif), on peut toujours prendre $\sqrt{m}\,l^2$ assez grand, (en augmentant ou faisant croître le nombre m de parties, pour que la partie entre crochets, de l'expression ci-dessus de G, soit $> 0$ et que cette partie, entre crochets, multipliée par $\sqrt{m}$ dépasse toute limite donnée, m ou $\sqrt{m}$ pouvant augmenter indéfiniment.

Concluons donc que si l'on n'admet pas la condition $p_1\,\alpha_2 - p_2\,\alpha_1 = 0$, condition, avons-nous vu, pour que le jeu soit juste, quel que soit l'avantage $l^2$, aussi minime que l'on veut, que l'on attribue à l'un des joueurs, cet avantage lui procurera au bout d'un certain nombre de

parties m suffisamment grand, un gain G dépassant toute limite donnée.

On comprend donc le parti qu'un joueur peut tirer de cette propriété.

## Assurances contre l'incendie

42. Nous allons chercher *quelle serait l'espérance mathématique de quelqu'un qui attendrait l'arrivée de m événements, dont chacun pourrait amener, avec une probabilité p, un gain a ; et avec une probabilité q, un gain b.* L'espérance mathémathique, ainsi calculée, sert de base pour la constitution des sociétés d'assurance.

Les probabilités p et q étant celles de 2 évênements contradictoires, on a, art. 23, en remplaçant $\alpha$ et $\beta$ par p et q, le développement des probabilités, savoir :

$$(p+q)^m = p^m + C_{m,1}\, p^{m-1}\, q + \ldots + C_{m,K}\, p^{m-K}\, q^K + \ldots + q^m = 1. \quad (60).$$

Si, sur les m évênements, on a m—K fois un évênement A produisant chaque fois un gain a ; et K fois un évênement B dont chacun donne une perte b, le gain final sera

$$(m-K)\, a - K\, b\ ;$$

et les gains précédents seront m a ; $[(m-1)a-b]$; $[(m-2)a-2b]$;... $[(m-K)a-Kb]$;... $[(m-m)a-mb]$ ou $-mb$; avec les pertes $p^m$ ; etc., ou les termes du binôme ci-dessus.

Dans ces conditions, en appliquant la formule (56), ou $E = p_1\, \alpha_1 + p_2\, \alpha_2 + \ldots + p_n\, \alpha_n$, l'espérance mathématique sera dans le cas que nous considérons ici :

$$E = p^m\, m\alpha + C_{m,1}\, p^{m-1}\, q\, [(m-1)\, a - b] + C_{m,2}\, p^{m-2}\, q^2\, [(m-2)\, a - 2\, b] + \ldots + C_{m,K}\, p^{m-K}\, q^K\, [(m-K)\, a - K\, b] + \ldots + q^m\, (-mb). \quad (61)\ ;$$

ou bien, comme il y a m + 1 termes dans le second membre

$$E = \Sigma_{K=0}^{K=m}\, C_{m,K}\, p^{m-K}\, q^K [m\, a - K(a+b)]. \quad (62),$$

en remarquant que $(m-K)\, a - k\, b = m\, a - K\, (a+b)$ ; et en observant aussi que si l'on fait K=o dans le terme général $C_{m,K}\, p^{m-K}\, q^K$ on obtient $C_{m,0}\, p^{m-0}\, q^0 = p^m$ puisque

$q^0=1$, c'est-à-dire le premier terme $p^m$ du développement (éq. 60) ; et ainsi de suite jusque $K=m$ où l'on obtient le dernier terme $q^m$, car $C_{m,m}\, p^{m-m}\, q^m = C_{m,m}\, p^0\, q^m = q^m$.

Egalement, si dans $m a - K(a+b)$, on fait $K=0$, on obtient $m a$ (facteur du 1[er] terme du développement (61) ; si $K=1$, on obtient $ma-a-b$ ou $(m-1)a-b$, c'est-à-dire le facteur du 2[d] terme de ce développement (61) ; etc. ; et $K=m$ donne $m a - m a - m b$ ou $-m b$, ce qui est le facteur du dernier terme.

De l'équation (62) on tire

$$E = ma \sum_{K=0}^{K=m} C_{m,K}\, p^{m-K}\, q^K - (a+b) \sum_{K=0}^{K=m} K\,(C_{m,K}\, p^{m-K} q^K). \quad (63).$$

Remarquons que le coefficient de $m a$ est le développement de $(p+q)^m = 1$ ; [voir formules (60) et (62)].

De la formule (63), on tire

$$E = m a - (a+b) \sum_{K=0}^{K=m} K\, C_{m,K}\, p^{m-K}\, q^K. \quad (64).$$

Soit la fonction $y=(p+tq)^m$. (65).

d'où, en développant

$$y = p^m + C_{m,1}\, p^{m-1}\, tq + C_{m,2}\, p^{m-2}\, t^2 q^2 + C_{m,3}\, p^{m-3}\, t^3 q^3 + \ldots + C_{m,K}\, p^{m-K}\, t^K q^K + \ldots \quad (66),$$

d'où, d'après l'éq. (65) :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d.\,(p+tq)^m}{dt} = \frac{m(p+tq)^{m-1} q\, dt}{dt} = m(p+tq)^{m-1} q. \quad (67),$$

car, $d(p+tq)=q\, dt$. (Art. 6, 4° et 5°, 1[re] partie).

En différentiant par rapport à $t$ le développement, éq. (66), de $y$, on a, en remarquant que la différentielle de $p^m$ par rapport à $t$, est nulle :

$$dy = C_{m,1}\, p^{m-1}\, q\, dt + C_{m,2}\, p^{m-2}\, q^2\, 2\, t\, dt + C_{m,3}\, p^{m-3}\, q^3\, 3\, t^2\, dt + \ldots + C_{m,K}\, p^{m-K}\, q^K\, K\, t^{K-1}\, dt + \ldots$$

d'où, en transposant les facteurs 2, 3,… K et divisant par $dt$, il vient

$$\frac{dy}{dt} = C_{m,1}\, p^{m-1}\, q + 2\, C_{m,2}\, p^{m-2}\, q^2\, t + 3\, C_{m,3}\, p^{m-3}\, q^3\, t^2 + \ldots + K\, C_{m,K}\, p^{m-K} q^K\, t^{K-1} + \ldots \quad (68).$$

Si nous faisons $t=1$, la formule (65) donne, d'après ce que nous avons vu, formule (60) :

$$y = (p+q)^m = 1^m = 1 \; ;$$

et la formule (67) ou $\frac{dy}{dt} = m\,(p+tq)^{m-1}\, q$ donne en intégrant dans l'hypothèse de $t=1$ :

$\int \frac{dy}{dt}$ ou plutôt $\int dy$ ou $y = \int m(p+tq)^{m-1} q\,dt = \int m(p+q)^{m-1}$ $q\,dt = \int m(1)^{m-1} q\,dt = m\,q\,t = m\,q$, (69).

Mais le développement, éq. (68), de $\frac{dy}{dt}$ égale K multipliant le développement du terme général $C_{m.K}\,p^{m-K}q^K$ donnant un produit dans lequel K varierait de o à K, égale le développement de l'expression placée sous le signe $\Sigma$ dans $\sum_{K=o}^{K=m}$ $K\,C_{m.K}\,p^{m-K}q^K$ ou multiplicateur de $(a+b)$ dans l'éq. (64). Donc $\Sigma$(expression ci-dessus) $= \int \frac{dy}{dt} = m\,q$. Par suite les éq. (64), (68) et (69) donnent

$$E = ma - (a+b)mq = ma - amq - bmq = ma(1-q) - bmq$$

et comme de $p+q=1$, on tire $1-q=p$, il vient

$$E = map - mbq = m\,(ap - bq). \qquad (70).$$

Concluons donc, d'après cette formule (70), les probabilités p et q étant données à l'avance, que si l'on choisit les valeurs des gains a et b de telle façon que l'expression $ap - bq$ ait une valeur déterminée V, l'espérance mathématique E sera proportionnelle au nombre m d'expériences, puisqu'on tire de la formule (70), V étant déterminé :

$$E = mV \therefore \frac{E}{m} = V$$

43. — *Remarque.* — Comme nous l'avons déjà dit, les conclusions précitées servent aux sociétés d'assurances pour calculer à l'avance l'espérance mathématique. Mais dans les calculs on ne devra pas tenir compte des événements trop dissemblables les uns des autres ; c'est même pour uniformiser les événements que les sociétés d'assurances ont établi la réassurance. Ainsi, par exemple, supposons qu'une société assure un entrepôt d'une valeur considérable, soit 2.000.000 francs. Elle exigera une prime proportionnelle à cette somme. Mais si le capital de cette société n'est que de 1.000.000 francs, elle se trouverait ruinée et ne saurait satisfaire à ses engagements si l'entrepôt venait à brûler.

Pour éviter cet inconvénient, la société divise les 2.000.000 en parties égales, par exemple, soit 50 de 40.000 francs chacune. Elle tiendra pour elle, par exemple, 1 part de 40.000 francs et elle réassurera, près d'autres sociétés, les 1.960.000 francs qui restent.

## Assurances sur la vie.

44. — Les compagnies d'assurances sur la vie humaine sont des sociétés qui, moyennant le versement d'une somme unique ou d'un certain nombre d'annuités, prennent l'engagement de payer aux héritiers de l'assuré un capital convenu, ou bien de servir à l'assuré une rente viagère à dater d'une époque déterminée. Ces sociétés offrent à leurs clients d'autres combinaisons ingénieuses ; mais celles que nous venons de citer sont usuelles et fondamentales.

Les compagnies d'assurances sur la vie ont rendu un grand service social, en propageant dans les masses l'esprit d'ordre, d'économie et de prévoyance.

Pour faire les calculs nécessaires pour régir ces sociétés, on a recours aux renseignements fournis par les statistiques. Par exemple, si nous prenons les statistiques de certaines années, soient de 1830 à 1905 inclusivement, et si nous admettons qu'en

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1830, | il soit nés | | A | individus ; |
| 1831, | il soit | resté | B | id. |
| 1832, | id. | id. | C | id. |
| 1833, | id. | id. | D | id. |
| 1834, | id. | id. | E | id. |
| 1835, | id. | id. | F | id. |
| etc. | | | | |

nous pourrons déduire de ces données, la probabilité d'atteindre respectivement 1, 2, 3,... jusque 75 ans, pour chaque individu né en 1830 ; cette probabilité, en vertu de l'art. 7, sera exprimée par $\frac{B}{A}$ pour 1 an, $\frac{C}{A}$ pour 2 ans, $\frac{D}{A}$ pour 3 ans, etc.

De même, la probabilité pour un individu de 1 an, d'atteindre 2 ans, sera exprimée par $\frac{C}{B}$; celle pour un individu de 2 ans d'atteindre 3 ans, sera $\frac{D}{C}$, etc.

Egalement, la probabilité pour un individu de 2 ans par exemple, d'atteindre 2+3 ou 5 ans, sera exprimée par $\frac{F}{C}$, c'est-à-dire qu'au bout de 2 ans, soit en 1832, comme il reste C individus, chacun d'eux a une probabilité d'atteindre encore 2+3=5 ans, soit l'année 1835, probabilité exprimée par $\frac{F}{C}$, puisqu'en 1835, il reste F individus.

On comprend donc ainsi que les statistiques (lorsque le nombre de cas que nous envisageons est très-grand, pour plus d'exactitude, les imprévus étant moins sensibles dans un grand nombre de cas) nous permettent d'établir la probabilité qu'en général un individu d'âge x a d'atteindre l'âge x+n.

45. — Représentons donc, en général, par lx le nombre d'individus ayant atteint l'âge x; un an après, soit pour l'âge x+1, ce nombre d'individus sera, supposons, diminué de 1, et l'on aura le nombre lx−1. En vertu de ce que nous venons de dire à l'art. précédent, *la probabilité α de vie pendant un an d'un individu d'âge x, sera exprimée par*

$$\alpha = \frac{lx-1}{lx}. \qquad (71).$$

Et, en vertu de l'art. 23, la probabilité β de mort de cet individu sera

$$\beta = 1-\alpha = 1-\frac{lx-1}{lx} = \frac{lx}{lx} - \frac{lx-1}{lx} = \frac{lx-lx+1}{lx} = \frac{1}{lx}. \quad (72).$$

Dans la pratique, on réduit ces nombres en tables en partant, par exemple, de lx=10000.

46.— Comme application, envisageons le cas où deux personnes voudraient former un contrat d'assurances pour un certain nombre d'années. Admettons d'abord que l'assureur convienne que, moyennant le paiement d'une certaine prime p, payée au commencement de l'année, il assurera aux héritiers de l'assuré, s'il meurt pendant l'année, une somme déterminée A; cette somme serait donc

versée à la fin de la première année. Pour que le contrat soit juste, art. 41, l'espérance mathématique doit être nulle, ce que nous allons exprimer. Remarquons d'abord que la probabilité pour l'assuré de payer la prime p est 1, puisqu'elle se paie par année et à l'avance, que cette probabilité est donc certaine (art. 7). La probabilité pour l'assureur de payer la somme A est égale à la probabilité β de mort de l'assuré, c'est-à-dire, art. 45 :

$$\frac{lx - lx+1}{lx} = \frac{1}{lx}.$$

Soit r le taux de l'intérêt composé auquel l'assureur peut placer la somme A ; et comme cette somme, dans le cas de mort de l'assuré, ne devra être payée qu'à la fin de l'année, l'assureur pourra donc ne disposer, au commencement de cette année, que de la somme $Q = \frac{A}{1+r}$. En effet, 1 franc devenant $1+r$ à la fin de l'année, Q francs deviendront $Q \times (1+r) = A$, d'où $Q = \frac{A}{1+r}$, (voir recueil p. 41, art. 37, en faisant le nombre d'années $n = 1$).

Au commencement de l'année, la probabilité pour l'assuré étant 1 et la prime qu'il doit payer étant p ; de même la probabilité pour l'assureur de payer, à cette même époque, la somme Q ou $\frac{A}{1+r}$ étant $\frac{lx - lx+1}{lx}$, l'espérance mathématique E sera donc (art. 40 et 41), en remarquant que les sommes p et Q doivent être de signes contraires :

$$E = (p \times 1) - \left(\frac{A}{1+r} \frac{lx - lx+1}{lx}\right) = 0. \qquad (73).$$

ou

$$E = p - \frac{A}{1+r} \frac{1}{lx} = 0. \qquad (74).$$

De cette égalité, on peut tirer l'une des quantités A ou p, l'autre étant connue.

Admettons maintenant que ces deux personnes veuillent faire un contrat pour la 2^e^ année, et représentons par p′ la prime à payer par l'assuré au commencement de cette 2^e^ année. Il suffit de changer dans l'égalité (73), x en (x+1) et (lx—1) en (lx 2), et nous aurons (voir formules (72) et (73) :

$$E'=(p'\times 1)-\frac{A}{1+r}\left(1-\frac{lx-2}{lx+1}\text{ ou }\frac{lx+1-lx+2}{lx+1}\right)=$$

$$=p'-\frac{A}{1+r}\,\frac{lx+1-lx+2}{lx+1}=p'-\frac{A}{1+r}\,\frac{3}{lx+1}=0.\quad(75).$$

On peut remarquer, d'après les formules (74) et (75) que, en général, p' est plus grand que p.

47.— Mais si nous voulons régler le contrat de façon qu'on ait à payer la même prime chaque année, nous devrons calculer l'espérance mathématique en la déduisant d'un contrat de 2 années ramené au commencement de la première année. Soit $p_1$ cette prime constante. Au moment de la passation du contrat, l'assuré paye donc $p_1$. Au bout d'un an, s'il est encore en vie, il devra encore payer $p_1$. Mais, la 2e prime $p_1$ qu'il qu'il ne verse qu'au bout d'un an peut être placée à intérêts composés, et il suffit donc qu'il ait lors de la passation du contrat la 1re prime $p_1$ et une 2e valeur représentée (p. 41 du recueil) par $\frac{p_1}{1+r}$; et comme la probabilité de vie de la 1re année est, formule (71), $\frac{lx-1}{lx}$;
et que la probabilité pour la 1re année est l'unité, certitude (voir commencement art. 46), l'espérance mathématique de l'assuré, pour ces 2 années, sera :

$$(p_1\times 1)+\left(\frac{p_1}{1+r}\,\frac{lx-1}{lx}\right)=p_1+\frac{p_1}{1+r}\,\frac{lx-1}{lx}.\quad(a).$$

Quant à l'assureur, si son assuré meurt dans la 1re année, il devra payer la somme A à la fin de cette année ; il devra donc disposer, au commencement du contrat, comme nous avons vu, d'un capital égal à $\frac{A}{1+r}$. Et remarquons que la probabilité de mort de l'assuré, pendant cette première année, est formule (72) :

$$\frac{lx-lx+1}{lx}.$$

Mais si l'assuré meurt dans la seconde année, l'asreur devra payer cette somme A pour laquelle on

s'est assuré ; alors il suffit (p. 41 recueil) que l'assureur dispose seulement d'un capital représenté par $\frac{A}{(1+r)^2}$ au commencement de la 1re année. Cherchons quelle est la probabilité P de mort de l'assuré pendant la 2me année. C'est une probabilité composée (voir art. 14 et 15), dont les évènements composants sont : 1° la vie de l'assuré dans la 1re année ; et 2° la mort dans la 2de. Par suite, la probabilité composée P cherchée sera donnée par la formule ci-après :

$$P = \frac{lx-1}{lx}\left(\frac{lx-1-lx+2}{lx-1}\right).$$

En effet, remarquons que le 1° ou la probabilité de vie pendant la 1re année est, d'après la formule (71) : $\frac{lx-1}{lx}$.

Quant au 2°, observons que le nombre d'individus ayant atteint l'âge $(x+1)$ est, art. 45, $lx-1$, et au bout de la 2me année il sera $lx-2$ ; de sorte que la probabilité de vie pendant la 2me année de l'individu d'âge $x+1$, sera

$$\frac{lx-2}{lx-1}. \qquad (76) ;$$

et sa probabilité de mort sera

$$1-\frac{lx-2}{lx-1}=\frac{lx-1-lx+2}{lx-1} \text{ ou} = \frac{lx-lx+1}{lx-1}=\frac{1}{lx-1}. \qquad (77).$$

Donc, la probabilité composée sera(formule 71 et 77 et art. 14) :

$$P=\frac{lx-1}{lx}\left(\frac{lx-1-lx+2}{lx-1}\right) \text{ ou} = \frac{lx-1}{lx}\,\frac{1}{lx-1}=\frac{1}{lx}.$$

Et l'espérance mathématique de l'assureur pour la 2me année, sera :

$$\frac{A}{(1+r)^2}\left[\frac{lx-1}{lx}\times\frac{lx-1-lx+2}{lx-1}\right] \text{ou} = \frac{A}{(1+2)^2}\,\frac{1}{lx}.$$

Mais son espérance mathématique, pour la 1re année, est, art 46 formule (72) :

$$\frac{A}{1+r}\,\frac{lx-lx+1}{lx} \text{ ou} = \frac{A}{1+r}\,\frac{1}{lx}.$$

Donc, pour les 2 années, son espérance mathématique sera :

$$\frac{A}{1+r}\,\frac{lx - lx+1}{lx} + \frac{A}{(1+r)^2}\left[\frac{lx-1}{lx}\,\frac{lx-1-lx+2}{lx-1}\right]. \quad (b).$$

ou encore
$$= \frac{A}{lx}\left(\frac{1}{1+r}\,\frac{1}{(1+r)^2}\right).$$

Par conséquent, pour que le contrat soit juste, pour ces 2 années, l'équation qui exprimera que l'espérance mathématique est nulle sera :

E = espérance mathématique de l'assuré ou formule (a) + espérance de l'assureur ou formule (b) prise négativement, donc

$$E = \text{formule (a)} - \text{formule (b)} = \left(p_1 + \frac{p_1}{1+r}\,\frac{lx-1}{lx}\right) -$$
$$\left[\frac{A}{1+r}\,\frac{lx - lx+1}{lx} + \frac{A}{(1+r)^2}\,\frac{lx-1}{lx}\,\frac{lx-1-lx+2}{lx-1}\right) = 0. (78).$$

ou encore

$$E = p_1\left(1 + \frac{1}{1+r}\,\frac{lx-1}{lx}\right) - \frac{A}{lx}\left(\frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2}\right) = 0. \ (78^{\text{bis}}).$$

On peut remarquer, d'après les formules qui précèdent que la prime $p_1$ est comprise entre p et p'.

Conformément à ce que nous venons de voir, on trouverait que la probabilité de vie de l'assuré pendant la $3^e$ année est $\frac{lx-3}{lx-2}$ ; etc ; et que la probabilité de mort est $\frac{1}{lx-2}$ ; etc. Donc, les probabilités de vie sont respectivement, formules (71), (76), etc :

$$\frac{lx-1}{lx},\ \frac{lx-2}{lx-1},\ \frac{lx-3}{lx-2},\ \text{etc} ;$$

et les probabilités de mort sont, formules (72), (77),... :

$$\frac{lx-lx+1}{lx},\ \frac{lx-1-lx+2}{lx-1},\ \text{etc},$$

ou
$$\frac{1}{lx},\ \frac{1}{lx-1},\ \frac{1}{lx-2},\ \text{etc.}$$

Mais les primes sont respectivement pour l'assureur (art. 46 et 47) ;

$$\frac{A}{1+r},\ \frac{A}{(1+r)^2},\ \frac{A}{(1+r)^3},\ \text{etc} ;$$

de même, pour l'assuré, elles seront

$$p_1\,,\ \frac{p_1}{1+r}\,,\ \frac{p_1}{(1+r)^2}\,,\ \text{etc.}$$

Donc comme l'assuré paye la prime $p_1$ au commencement de chaque année, nous aurons pour les espérances mathématiques d'un nombre quelconque n d'années :

$$p_1 \times 1 \text{ ou } p_1 + \left(\frac{p_1}{1+r}\,\frac{lx-1}{lx}\right) + \left(\frac{p_1}{(1+r)^2}\,\frac{lx-2}{lx-1}\right) + \left(\frac{p_1}{(1+r)^3}\,\frac{lx-3}{lx-2}\right) + \ldots + \left(\frac{p_1}{(1+r)^n}\,\frac{lx-n}{lx-(n-1)}\right). \quad (79)\,;$$

$$\text{ou}\quad p_1\left[1 + \frac{1}{1+1}\,\frac{lx-1}{lx} + \frac{1}{(1+r)^2}\,\frac{lx-2}{lx-1} + \ldots + \frac{1}{(1+r)^n}\,\frac{lx-n}{lx-n+1}\right].\ (80).$$

Et pour l'assureur qui devrait payer à la fin de chaque année, nous aurons les espérances mathématiques

$$\frac{A}{1+r}\,\frac{lx-lx+1}{lx} + \frac{A}{(1+r)^2}\,\frac{lx-1-lx+2}{lx-1} + \ldots \text{ etc.} \quad (81)\,;$$

$$\text{ou}\quad \frac{A}{1+r}\,\frac{1}{lx} + \frac{A}{(1+r)^2}\,\frac{1}{lx-1} + \frac{A}{(1+r)^3}\,\frac{1}{lx-2} + \ldots + \frac{A}{(1+r)^n}\,\frac{1}{lx-(n-1)}.\ (82).$$

$$\text{ou}\quad A\left[\frac{1}{1+r}\,\frac{1}{lx} + \frac{1}{(1+r)^2}\,\frac{1}{lx-1} + \frac{1}{(1+r)^3}\,\frac{1}{lx-2} + \ldots + \frac{1}{(1+r)^n}\,\frac{1}{lx-n+1}\right].\ (83).$$

Les formules précédentes sont des séries dont il faut faire la sommation des termes.

Enfin, l'espérance mathémathique résultante, art. 40 et 41 sera, dans ce cas, en remarquant que la formule (83) doit être prise de signe contraire à la formule (80) :

$$E = \text{formule (80)} - \text{formule (83)} = p_1\left[1 + \frac{1}{1+r}\,\frac{lx-1}{lx} + \frac{1}{(1+r)^2}\,\frac{lx-2}{lx-1} + \ldots + \frac{1}{(1+r)^n}\,\frac{lx-n}{lx-n+1}\right] - A\left[\frac{1}{1+r}\,\frac{1}{lx} + \right.$$

$$\frac{1}{(1+r)^2}\frac{1}{lx-1}+\frac{1}{(1+r)^3}\frac{1}{lx-2}+\ldots+\frac{1}{(1+r)^n}\frac{1}{lx-n+1}\Bigg]=$$
$0.$ (84).

De cette formule, dans les applications, on tirera, par exemple,la valeur du versement annuel à payer, ou inconnue $p_1$, connaissant les valeurs de la prime A, taux r, nombres d'années n, etc; de même si l'on cherchait une autre inconnue relative à certaines données.

Pour les calculs concernant les assurances sur la vie, on doit consulter les tables de mortalité qui ont été dressées, soit par Deparcieux en 1746, soit par Duvillard en 1806, ou autres statistiques plus récentes. La table de Deparcieux, légèrement modifiée dans les 1res années,est souvent adoptée.

On peut vouloir prendre une assurance sur la vie, ou se constituer à un certain âge une rente viagère avec abandon ou réserve du capital, etc. Il existe des tables relatives aux rentes viagères.

Dans les applications concernant les assurances sur la vie,on remplacera les valeurs indéterminées de la formule (84) par leurs valeurs connues, et on en déduira l'inconnue cherchée.

48. — *Remarque.* — Reportons-nous au commencement de l'art. 45, et soient, *d'une façon générale,* alx le nombre d'individus ayant atteint l'âge x. Un an après, soit pour l'âge x+1, le nombre alx sera, supposons, diminué de a, c'est-à-dire qu'il restera alx – a individus, et ainsi de même pour chaque année suivante. La formule (71) deviendra

$$\alpha=\frac{alx-a}{alx}=\frac{lx-1}{lx}. \qquad (71^{bis});$$

et la formule (72) donnera

$$\beta=1-\alpha=1-\frac{alx-a}{alx}=\frac{alx-alx+a}{alx}=\frac{1}{lx}. \qquad (72^{bis}).$$

La formule (73) devient alors

$$E=p\times 1-\left(\frac{A}{1+r}\,\frac{alx-alx+a}{alx}\right)=p-\left(\frac{A}{1+r}\,\frac{lx-lx+1}{lx}\right).(73^{bis}).$$

La formule (74) donne

$$E = p - \frac{A}{1+r}\,\frac{1}{lx}. \qquad (74^{bis}).$$

etc, etc.

On voit qu'on obtient les mêmes formules ; et, en effet, il est évident qu'on peut toujours prendre lx égal à un nombre tel que la diminution par année soit de 1. Ainsi, admettons qu'on parte de l'âge $x=10$ ans ; et que sur 880 individus ou $alx=880$, d'où $al=88$, il en meurt 8, d'où $a=8$ et par suite $l=11$ ; il est clair que nous pouvons faire $\frac{alx}{a} = lx = \frac{880}{8} = 110$ individus et $a=1$ c'est-à-dire que lx diminuera d'une unité par année. Nous pouvons donc supposer la diminution de lx comme étant de 1 unité par année.

49. — *Remarque II.* — Pour établir les statuts des sociétés d'assurances, il faudrait des calculs compliqués ; mais il existe des tables qui rendent les recherches moins ardues, et l'usage des logarithmes, appliqués aux formules ci-dessus exposées, rend les calculs plus faciles.

## Théorême de Bayes

50. — L'objet de ce théorême peut être exposé comme suit : *soient E un évênement qui se produit ; 1, 2, 3, ..., n les différentes causes qui peuvent produire cet évênement ;* $l_1, l_2, l_3, \ldots l_n$ *les probabilités d'action différentes des causes 1, 2, 3, ... n ;* $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ *les probabilités différentes qu'une de ces causes agissant donnerait à l'évênement E ; il s'agit de déterminer* $X_1, X_2, X_3, \ldots X_n$ *qui sont les probabilités que l'évênement qui s'est produit est dû à l'une des causes 1, 2, 3, ..., n.*

Par exemple, supposons que nous ayons une série d'urnes, soit 6, dont 3 rouges, 2 vertes et 1 blanche. Admettons que chacune de ces urnes contienne 100 boules, dont

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| chaque urne | rouge : | 25 | boules blanches et | 75 | noires |
| id. | verte | 75 | id | 25 | id |
| id. | blan. | 50 | id | 50 | id. |

Plaçons ces urnes sous un voile. Il est évident qu'on a plus de chances de mettre la main sur une urne rouge que

sur une verte ou sur une blanche ; et plus de chances de choisir une verte que la blanche.

Nous avons donc 3 évênements à considérer, savoir :

1° choisir une urne rouge
2° id id verte
3° id id blanche.

Supposons que nous tirons une boule blanche ; c'est l'évênement E. Cette boule blanche a pu être extraite de l'une quelconque des urnes : rouge, verte ou blanche. Si nous avons mis la main sur une urne rouge, nous avons une probabilité exprimée par $\frac{25}{100}$ soit $\frac{1}{4}$ de tirer une boule blanche. De même, si c'est d'une urne verte que nous avons tiré cette boule blanche, la probabilité sera de $\frac{75}{100}$ ou $\frac{3}{4}$ ; et pour l'urne blanche, cette probabilité devient $\frac{50}{100}$ ou $\frac{1}{2}$. La cause qui a amené l'extraction d'une boule blanche est la suivante : *choisir l'une quelconque des urnes.* Cr, nous avions une probabilité égale à $\frac{1}{6}$ de mettre la main sur une urne quelconque ; et une probabilté égale à $\frac{3}{6}$ de choisir une urne rouge ; une probabilité égale à $\frac{2}{6}$ de choisir une urne verte et une probabilité de $\frac{1}{6}$ de tomber sur la blanche.

Donc $\frac{3}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}$ sont les probabilités des 3 causes différentes pouvant amener l'évênement ; en outre, les probabilités que chacune des 3 causes donne à l'évênement (ici extraction d'une boule blanche) sont, comme nous avons vu, $\frac{1}{4}$ pour une urne rouge, $\frac{3}{4}$ pour une verte et $\frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$ pour l'urne blanche. Le théorême ou problème peut donc se poser (dans le cas particulier que nous envisageons ici) comme suit :

*Ayant tiré une boule blanche, quelle est la probabilité que l'on a mis la main sur une telle couleur d'urne.* Dans ce cas nous avons :

$l_1 = \frac{3}{6}$; $l_2 = \frac{2}{6}$ et $l_3 = \frac{1}{6}$; $p_1 = \frac{1}{4}$, $p_2 = \frac{3}{4}$ et $p_3 = \frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$

Convenons que i représentera, en général, les causes variables 1, 2, 3, … n ; $p_i$ et $l_i$ représenteront, en général, les probabilités se rapportant à la cause générale i. Avant la production de l'évênement E, la probabilité de son arrivée en vertu de la cause i (pouvant seule agir) est le produit $p_i\ l_i$ (en vertu du théorême sur les évênements composés, art. 15). Donc, d'une façon générale, $l_i$ représente la probabilité d'action de la cause indéterminée i ; $p_i$ représente la probabilité que cette cause i donne à l'évênement E. Par conséquent, d'une façon générale, la production d'un évênement E en vertu d'une cause *quelconque* i, aura une probabilité exprimée par $\Sigma\ p_i\ l_i$ . (85).

Supposons, maintenant, que sans rien changer aux conditions de l'expérience, nous passions cette expérience une *très-grand* nombre de fois m. En vertu du théorême de Bernouilli, art. 24, le nombre de fois que se présente l'évênement E en vertu d'une cause *particulière* i sera $m\ p_i\ l_i$ . . (86).

Et le nombre de fois en vertu d'une cause *quelconque* i sera, dans le cas de m expériences (voir formule 85) :

$m\ \Sigma\ p_i\ l_i$ . . (87).

Par conséquent, et en général, pour évaluer la probabilité de la production de l'évênement E en vertu de la cause i, nous devons chercher le rapport qui existe entre les nombres de cas où la cause *particulière* i l'a produit, et les nombres de cas où la cause *quelconque* i l'a produit ; nous aurons donc, art. 5, en représentant, en général, par $X_i$ la probabilité que l'évênement E est dû à la cause i (i variant de 1 à n) :

$$X_i = \frac{m\ p_i\ l_i}{m \Sigma\ p_i\ l_i} = \frac{p_i\ l_i}{\Sigma p_i\ l_i}. \qquad (88).$$

51. — *Remarque I.* — On peut démontrer ce théorême d'une façon un peu différente. En effet, soit $P_i$ la probabilité à priori de la production de l'évênement E en vertu

de la cause i ; par exemple, $P_i$ est égal à la probabilité de l'extraction d'une boule blanche d'une urne qui contiendrait $\alpha_i$ boules blanches et m boules en tout de diverses couleurs. En vertu de l'article précédent, on aura $P_i = p_i l_i$. Nous pouvons représenter $P_i$ par $\frac{\alpha_i}{m}$, (art. 5). On prend m commun à tous les nombres P; P représentant la probabilité d'une façon générale.

La probabilité de l'extraction d'une boule blanche de n'importe quelle urne sera donc $\Sigma \frac{\alpha_i}{m}$. (art. précédent).

Nous pouvons transformer le problème en une question de probabilité relative (art. 13).

En effet, supposons que toutes les urnes soient placées dans une même urne de façon que nous puissions extraire une boule quelconque de l'une des urnes. On peut toujours concevoir un procédé d'extraction où les parois des différentes urnes seraient supprimées, de sorte qu'on n'aurait en réalité qu'une seule urne contenant des boules blanches et autres couleurs. Si chaque boule portait un numéro d'ordre relatif à l'urne à laquelle elle appartient, chaque boule extraite décèlerait l'urne d'où elle provient.

Nous avons tiré une boule blanche, par exemple. La somme des boules blanches est $\Sigma \alpha_i$. La probabilité que la boule blanche extraite porte le numéro i est, en vertu de l'article précédent :

$$X_i = \frac{\alpha_i}{\Sigma \alpha_i}. \qquad (89).$$

Or, $\frac{\alpha_i}{m} = P_i$ (voir ci-dessus). Donc, cette probabilité $X_i$ peut s'écrire aussi comme suit :

$$X_i = \frac{\frac{\alpha_i}{m}}{\frac{\Sigma \alpha_i}{m}} = \frac{P_i}{\Sigma \frac{\alpha_i}{m}} = \frac{P_i}{\Sigma P_i}. \quad (90).$$

52. — *Remarque II. — L'évènement E s'étant produit en vertu de la cause i, supposons que nous veuillons savoir quelle est la probabilité $X_{ii}$ qu'un nouvel évènement semblable puisse se produire.*

Comme nous venons de voir, la probabilité à priori que l'évènement E soit dû à la cause i est $P_i$. En outre, nous avons trouvé $X_i = \frac{P_i}{\sum P_i}$. Soit $p_i$ la probabilité donnée à la production de l'évênement par la cause i.

La production d'un nouvel évênement sera un évênement composé qui pourra se produire si la cause i agit et que dans ce cas la probabilité soit $p_i$.

Par suite, la probabilité $X_{ii}$ de la production d'un nouvel évênement sera (art. 15) :

$$X_{ii} = X_i \; p_i = \text{en vertu de la formule (90)} = \frac{P_i \; p_i}{\sum P_i}. \quad (91).$$

53. — *Remarque III.* – Supposons que nous veuillons savoir *quelle est la probabilité qu'un évênement observé soit dû à l'une des causes 1, 2, 3,.., n dont l'indice soit compris entre deux quantités déterminées a et b.*

Il est évident que l'action de l'une de ces causes a la probabilité :

$$\frac{X_i}{\sum_1^n P_i} = \frac{\dfrac{P_i}{\sum P_i}}{\sum_1^n P_i}. \qquad (92);$$

formule dans laquelle i varie de a à b, au numérateur ; (en vertu des art. 5 et 11).

54. — *Cas particulier.* — Il se peut que la probabilité y de la production d'un évênement E soit une fonction continue d'une variable x, c'est-à-dire que l'on ait

$$y = f(x)$$

Par exemple, supposons que nous ayons une série d'urnes, et que leur composition soit la suivante :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1° | 10000 | boules blanches et | 0 | boule noire |
| 2° | 9999 | id | 1 | id |
| 3° | 9998 | id | 2 | id |
| . . . | . . . | . . . | . . . | . . . |
| . . . | . . . | . . . | . . . | . . . |
| 10001 | 0 | id | 10000 | id |

La probabilité d'extraire une boule noire, de la 1re urne est $\frac{0}{10000}$; pour la 2e nous avons $\frac{1}{10000}$; pour la 3e, $\frac{2}{10000}$

et ainsi de suite. On peut augmenter le nombre total des boules de façon que la suite des probabilités forme une suite continue. Ainsi, par exemple, la différence dans le cas présent, des probabilités pour les 3e et 2e urnes est de $\frac{2}{10000} - \frac{1}{10000}$ soit $\frac{1}{10000^e}$. Si les urnes contenaient 1 000.000 boules en tout au lieu de 10.000, les boules noires étant en nombre de 0 à 1000.000, la différence des probabilités pour les 3e et 2e urnes deviendraient $\frac{1}{1000000^e}$, donc cette différence serait déjà 100 fois plus petites, et ainsi de suite. Donc, une quelconque de ces probabilités pourra se représenter par x, x ayant une valeur comprise entre 0 et 1. (art. 7). Supposons que la probabilité de la production de l'évênement E, en vertu d'une certaine cause, soit réprésentée par f(x), x variant donc entre 0 et 1. Cette quantité x pourra être la probabilité de l'hypothèse qui conduit à la production de l'évênement. Par conséquent, art. 5 et théorême de Bayes), l'expression

$$P = \frac{f(x)}{\sum_0^1 f(x)}. \qquad (93) ;$$

sera la probabilité de la production de l'évênement observé en vertu d'une cause dont la probabilité est x. Multiplions les deux termes de l'expression (93) par $\Delta x$, qui est l'accroissement de x, nous aurons

$$P = \frac{f(x)\,\Delta x}{\sum_0^1 f(x)\,\Delta x},$$

et, en passant à la limite, nous aurons $f(x)\,dx$ pour la valeur du numérateur ; et au dénomérateur, pour limite de $\sum_0^1 f(x)\,\Delta x$, nous aurons $\int_0^1 f(x)\,dx$. (Voir mon cours d'analyse, 2e partie, art. 2 et 33). Donc, la probabilité P de la production de l'évênement E, en vertu d'une cause dont la probabilité d'action est x, sera exprimée par

$$P = \frac{f(x)\,dx}{\int_0^1 f(x)\,dx}. \quad (94).$$

55. — *Applications du théorème de Bayes.*—

1°. — *Quelle est la probabilité P que la cause qui a produit l'évênement E ait une probabilité comprise entre a et b.*

Cette probabilité sera exprimée par (art. 5 et formule 94):

$$P = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{\int_0^1 f(x)\,dx}. \quad (95).$$

2°. — *Quelle est la probabilité P qu'un évênement dont la probabilité* $\psi(x)$, *soit dû à une cause dont la probabilité d'action est* $x$.($\psi$ est la lettre minuscule psi du grec ancien [valeur ps).

La probabilité cherchée sera (en vertu des art. 15 et 52):

$$P = \frac{f(x)\,\psi(x)\,dx}{\int_0^1 f(x)\,dx}. \quad (96)\,;$$

3°.—*Quelle est la probabilité P de la production de l'évênement lorsque, dans le cas précédent, x puisse varier entre a et b.* Elle sera exprimée par

$$P = \frac{\int_a^b f(x)\,\psi(x)\,dx}{\int_0^1 f(x)\,dx}. \quad (97).$$

56. — *Cas spécial.*

1°.—*Détermination de la probabilité P de l'évênement E.*

Supposons que l'évênement observé soit la production d'évênements contradictoires A et B, respectivement en nombre m et n.

Puisque les évênements A et B, sont contradictoires, leurs probabilités sont respectivement x et (1 - x) ; x pouvant prendre toutes les valeurs comprises entre o et 1. [$x+(1-x)=1$, art. 7 et 23]. Par suite, la probabilité de l'arrivée de l'évênement composé mA et nB est exprimée (art. 11 et 15), par $x^m (1-x)^n$, dans le cas où l'ordre des arrivées des évênements A et B est déterminé.

Si cet ordre des arrivées n'est pas déterminé, nous devrons multiplier cette probabilité par un certain coefficient

M variant avec les conditions, (art. 17). Donc, dans le cas actuel, nous aurons

$$f(x) = M\, x^m (1-x)^n\,;$$

et, en vertu de la formule (93), il viendra

$$P = \frac{M\, x^m (1-x)^n\, dx}{\int_0^1 M\, x^m (1-x)^n\, dx} = \frac{x^m\, dx\, (1-x)^n}{\int_0^1 x^m\, dx\, (1-x)^n}. \qquad (98),$$

et ce, en supprimant le facteur M commun aux deux termes.

P est donc la probabilité que, l'évênement m A et n B s'étant produit, la cause qui l'a produit attribuait à l'arrivée de A une probabilité x.

2°. — *Calcul de l'intégrale* $\int_0^1 x^m\, dx\, (1-x)^n$. Nous appliquerons la formule $\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$. (Voir mon cours d'analyse, 1re partie, p. 191, intégration par parties).

L'intégrale est $\int_0^1 (1-x)^n x^m dx$; et nous poserons $(1-x)^n = u$ et $x^m\, dx = dv$, d'où (p. 17 et 180, 1re p.): $du = n\,(1-x)^{n-1}\, d.(1-x) = n\,(1-x)^{n-1}(-dx) = -n\,(1-x)^{n-1}\, dx$. Et $v = \frac{1}{m+1} x^{m+1}$. Faisons $I = \int u\, dv = u\, v - \int v\, du$; en substituant, nous aurons $I = \int (1-x)^n x^m\, dx = (1-x)^n . \frac{1}{m+1} x^{m+1} - \int \frac{1}{m+1} x^{m+1}(-n(1-x)^{n-1})dx)$ = en transposant $= \frac{1}{m+1} x^{m+1} (1-x)^n + \frac{n}{m+1} \int (1-x)^{n-1} x^{m+1}\, dx$.

Donc, en prenant par la même méthode les intégrales successives du 2e terme du 2d membre, sans représenter les parties non à intégrer, nous aurons :

$$\int_0^1 (1-x)^n x^m\, dx = \frac{n}{m+1} \int_0^1 (1-x)^{n-1} x^{m+1}\, dx,$$

$$\int_0^1 (1-x)^{n-1} x^{m+1} dx = \frac{n-1}{m+2} \int_0^1 (1-x)^{n-2} x^{m+2}\, dx.$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\int_0^1 (1-x)^{n-(n-1)} x^{m+(n-1)}\, dx = \frac{n-(n-1)}{m+n} \int_0^1 (1-x)^{(n-(n-1)-1)} x^{m+n}\, dx$$

ou $$\int_0^1 (1-x)\, x^{m+n-1}\, dx = \frac{1}{m+n} \int_0^1 (1-x)^0\, x^{m+n}\, dx$$

ou $$\int_0^1 (1-x)\, x^{m+n-1}\, dx = \frac{1}{m+n} \int_0^1 x^{m+n}\, dx.$$

Multipliant, membre à membre, et observant que les intégrales des seconds membres se répètent au 1[er] membre de l'expression qui suit, nous ne devrons donc considérer que le 1[er] membre de la 1[re] égalité, que les facteurs qui précèdent les intégrales aux 2[ds] membres, et que le 2[d] membre de la dernière égalité, nous obtiendrons ainsi :

$$\int_0^1 (1-x)^n x^m dx = \frac{n}{m+1} \cdot \frac{n-1}{m+2} \cdots \frac{1}{m+n} \int_0^1 x^{m+n} \; dx.$$

Mais nous avons vu, art. 18, que 1. 2. 3... n sera représenté par n !, donc nous aurons

$$\int_0^1 (1-x)^n x^m dx = \frac{n!}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)} \int_0^1 x^{m+n} \; dx.$$

En négligeant la dernière intégrale du 2[d] membre, dans cette dernière expression, et en multipliant les 2 termes du 2[d] membre par 1. 2. 3 ... m ou par m !, il viendra

$$\int_0^1 (1-x)^n x^m dx = \frac{n!\, m!}{1.2.3 \ldots m.\,(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}$$

ou, enfin $\int_0^1 x^m dx(1-x)^n = \frac{n!\, m!}{(m+n)!}$. (99) ;

et, la formule (98) devient

$$P = \frac{x^m dx\,(1-x)^n}{\frac{n!\, m!}{(m+n)!}} = \frac{(m+n)!}{n!\, m!} x^m dx(1-x)^n. \quad (100).$$

3° — *Recherche de la valeur maximum de la probabilité P.* Il est évident que l'expression de P change de valeur avec celle que l'on donne à x ; par suite comme le facteur $\frac{\overline{m+n}\,!}{n!\, m!}$ est indépendant de x, d'après l'expression (100), il nous suffit de chercher le maximum de la partie $x^m(1-x)^n$. Pour cela, posons $y = x^m(1-x)^n$. La condition du maximum pour y (voir mon cours d'analyse, 1[e] partie, pages 78-79) est : $\frac{dy}{dx} = 0$, ou (p. 15 du cours précité)

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}(1-x)^n - n(1-x)^{n-1} x^m = 0,$$

ou $$x^{m-1}(1-x)^n m - nx\, x^{m-1}\frac{(1-x)^{n-1}}{1-x}(1-x)=0,$$

ou $$x^{m-1}(1-x)^n m - x^{m-1}(1-x)^n \frac{nx}{1-x}=0,$$

ou enfin $$x^{m-1}(1-x)^n\left(m-\frac{nx}{1-x}\right)=0. \qquad (101).$$

Et en écartant les solutions $x=0$ et $x=1$ qui sont les valeurs limites, art. 7, nous aurons pour la valeur de $x$ comprise entre 0 et 1, et satisfaisant à l'équation (101) :

$$x=\frac{m}{m+n}. \qquad (102) ;$$

et par suite (art. 23 et ci-dessus) :

$$1-x=1-\frac{m}{m+n}=\frac{m+n-m}{m+n}=\frac{n}{m+n} \text{ ; donc}$$

$$\frac{x}{1-x}=\frac{m}{m+n}:\frac{n}{m+n}=\frac{m\,(m+n)}{n\,(m+n)}=\frac{m}{n}.$$

Cette conséquence du théorème de Bayes nous permet de retrouver sous une autre forme une conséquence du théorème de Bernouilli exposée à l'art. 31, savoir : *Les 2 événements A et B s'étant produits respectivement m et n fois, la probabilité P devient maximum lorsqu'on attribue aux événements A et B des probabilités x et (1—x) proportionnelles à leur nombre d'arrivées m et n, ce qui se traduit comme suit :*

$$\frac{x}{1-x}=\frac{m}{n}. \qquad (103).$$

Si nous voulons vérifier la valeur $x=\frac{m}{m+n}$, en la substituant dans l'expression (101), nous obtenons successivement :

$$\left(\frac{m}{m+n}\right)^{m-1}\left(1-\frac{m}{m+n}\right)^n\left(m-\frac{n\frac{m}{m+n}}{1-\frac{m}{m+n}}\right)=0,$$

ou $$\left(\frac{m}{m+n}\right)^{m-1}\left(\frac{m+n-m}{m+n}\right)^n\left(m-\frac{\frac{mn}{m+n}}{\frac{m+n-m}{m+n}}\right)=0,$$

ou $$\left(\frac{m}{m+n}\right)^{m-1}\frac{n^n}{(m+n)^n}\left(m-\frac{mn}{n}\right)=0,$$

ou $$\left(\frac{m}{m+n}\right)^{m-1}\frac{m^n}{(m+n)^n}\frac{mn-mn}{n}=0,$$

ou $$\frac{m^{n+m-1}}{(m+n)^{n+1}}\times 0=0, \text{ ou } 0=0.$$

57. — *Etant donné que 2 évènements A et B sont arrivés respectivement m et n fois, soit à chercher quelle est la probabitité* P′ *qu'un nouvel évènement A ou B se produise.*

La probabilité de l'arrivée de A peut être représentée par x ; et la probabilité de l'hypothèse qui attribue à A une probabilité x est, d'après le théorême de Bayes, formule (98) :

$$P=\frac{x^m\, dx\,(1-x)^n}{\int_0^1 x^m\, dx(1-x)^n}\;;$$

et la probabilité P′ de l'arrivée de l'évènement A sera Px. (voir art. 15) — Comme x n'est pas déterminé, mais peut prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et 1, (art. 7), la probabilité P′ de l'évènement A sera $\int_0^1 Px$, ou en remplaçant P par la valeur ci-dessus, et en remarquant que $x^m\, x = x^{m+1}$, nous aurons

$$P'=\int_0^1\frac{x^{m+1}\, dx\,(1-x)^n}{\int_0^1 x^m\, dx\,(1-x)^n},$$

ou, en vertu de la formule (99) ;

$$P'=\int_0^1\frac{x^{m+1}\, dx\,(1-x)^n}{\dfrac{n\,!\;m\,!}{(n+m)\,!}}=\int_0^1\frac{x^{m+1}dx(1-x)^n(n+m)\,!}{n\,!\;m\,!}=$$

$=\dfrac{(n+m)\,!}{n\,!\;m\,!}\displaystyle\int_0^1 x^{m+1}\,dx\,(1-x)^n$; et, en remplaçant dans la formule (99) m par m + 1, il vient :

$$P'=\frac{(n+m)\,!}{n\,!\;m\,!}\cdot\frac{n\,!\,(m+1)\,!}{[(m+1))+n]\,!}=\frac{n\,!\;(n+m)\,!\;(m+1)\,!}{n\,!\;m\,!\,(m+n+1)\,!}=$$

$$=\frac{1.\,2.\,3\ldots n.\;1.\,2.\,3\ldots(n+m).\;1.\,2.\,3\ldots(m+1)}{1.\,2.\,3\ldots n.\;1.\,2.\,3\ldots m.\;1.\,2.\,3\ldots(m+n+1)}=$$

$$= \frac{1.\,2.\,3\ldots(m+n)\;1.\,2.\,3\ldots m.\,(m+1)}{1.\,2.\,3\ldots m.\;1.\,2.\,3\ldots(m+n)(m+n+1)} =$$

$$= \frac{1.\,2.\,3\ldots m\,(m+1).\;1.\,2.\,3\ldots(m+n)}{1.\,2.\,3\ldots m.\;1.\,2.\,3\ldots(m+n)\,(m+n+1)} = \frac{(m+1)}{m+n+1} =$$

$$= \frac{m}{m+n+1} + \frac{1}{m+n+1}.$$

Et si m et n sont très-grands, il vient

$$P' = \frac{m}{m+n+1} + \frac{1}{\infty} = \frac{m}{m+n+1} + 0 = \frac{m}{m+n+1}.\ (104).$$

*Remarque.* — Pour l'évênement B, on trouverait

$$P'' = \frac{n}{n+m+1}.\quad (105).$$

58. — *Soit à trouver la probabilité P‴ que sur p nouvelles expériences, l'évênement A se produise (p—q) fois ; alors B se produira évidemment q fois puisqu'on doit avoir (p—q)+q=p.*

Soit x la probabilité que nous attribuons à A ; donc B a une probabilité égale à (1—x) en vertu de l'art. 23 ; et supposons que les évênements A et B puissent se produire dans un ordre indéterminé, la probabilité de l'évênement composé (p—q) A et qB sera : [art. 15, 17, 18, et 1° de l'art. 56 où p—q et q sont remplacés par m et n et où $C_{p,q}$ est remplacé par M. On sait que $C_{p,q}$ signifie combinaison de p choses, q à q ; recueil p. 55] :

$(C_{p,q}) \times x^{p-q}\,(1-x)^q$ ou simplement $C_{p,q}\,x^{p-q}(1-x)^q$.

La probabilité que A ait une probabilité x est P. (art. 54.)

Donc, lorsque A a une probabilité déterminée x, la production de l'évênement aura une probabilité exprimée par (art. 15) :

$P \times C_{p,q} \times x^{p-q}\,(1-x)^q$ ou simplement $P\,C_{p,q}\,x^{p-q}(1-x)^q$.

Si x peut varier de 0 à 1, art. 7, la probabilité P‴ de l'évênement composé sera, en remplaçant, dans la formule précédente, P par sa valeur donnée par la formule (98) et en prenant au numérateur les limites pour l'intégrale de 0 à 1 :

$$P''' = \frac{\int_0^1 x^m\,dx\,(1-x)^n}{\int_0^1 x^m\,dx\,(1-x)^n}\,C_{p,q}\,x^{p-q}\,(1-x)^q,$$

ou $$P''' = \frac{\int_0^1 x^{m+p-q}\, dx\, (1-x)^{n+q}\, C_{p,q}}{\int_0^1 x^m\, dx\, (1-x)^n},$$

ou $$P''' = \frac{\int_0^1 C_{p,q}\, x^{m+p-q}\, (1-x)^{n+q}\, dx}{\int_0^1 x^m\, (1-x)^n\, dx}. \quad (106).$$

59. — Nous avons vu au 3° de l'art. 56, que la valeur maximum de la probabilité P est donnée lorsque l'on donne à l'évênement A une probabilité $x = \frac{m}{m+n}$. (Voir formule 102).

Cela étant, nous pouvons nous demander *quelle est la probabilité $P_1$ que la probabilité de l'évênement A soit comprise entre 2 limites voisines de cette valeur extrême.*

Donc, il s'agit de rechercher la valeur de P lorsque l'on veut que la probabilité que l'on attribue à A soit comprise, par exemple, entre les limites suivantes :

$$\frac{m}{m+n} + 1 \text{ et } \frac{m}{m+n} - 1.$$

Nous avons vu, formules (95) et (98) que

$$P = \frac{\int_a^b x^m\, dx\, (1-x)^n}{\int_0^1 x^m\, dx\, (1-x)^n},$$

il suffit donc de faire dans cette formule $a = \frac{m}{m+n} - 1$ et $b = \frac{m}{m+n} + 1$, et P devient

$$P = \frac{\int_{\frac{m}{m+n}-1}^{\frac{m}{m+n}+1} x^m\, dx\, (1-x)^n}{\int_0^1 x^m\, dx\, (1-x)^n}. \quad (107).$$

Faisons $\frac{m}{m+n} = p$ ; $\frac{n}{m+n} = q$ ; $m + n = r$. Il en résulte que $p + q = 1$, car $\frac{m}{m+n} + \frac{n}{m+n} = \frac{m+n}{m+n} = 1$ ; $m = p\,(m+n) = p\,r$ ; $n = q\,(m+n) = q\,r$. Calculons la valeur approchée du numérateur de cette valeur de P ; la valeur du dénominateur est donnée au 2° de l'art. 56. Le numérateur, en y substituant les valeurs précédentes est :

$$X = \int_{p-l}^{p+l} x^{pr}\,dx\,(1-x)^{qr} = \int_{p-l}^{p+l} x^{pr}(1-x)^{qr}\,dx.$$

Posons $x=p+r$, d'où $1-x=1-p-r=(1-p)-r=q-r$; $-dx=-dr$ ou $dx=dr$. Pour $x=p+l$, on a $r=l$ ; et pour $x=p-l$, on a $p+r=p-l \therefore r=-l$. Donc, en remplaçant dans l'expression de X, x par $p+r$; $1-x$ par $q-r$; dx par dr, nous pourrons écrire

$$X = \int_{-l}^{+l}(p+r)^{pr}(q-r)^{qr}\,dr = \int_{-l}^{+l} p^{pr}\left(1+\frac{r}{p}\right)^{pr} q^{qr} \left(1-\frac{r}{q}\right)^{qr} dr = p^{pr}q^{qr}\int_{-l}^{+l}\left(1+\frac{r}{p}\right)^{pr}\left(1-\frac{r}{q}\right)^{qr} dr. \qquad (108).$$

Mais on sait que

$$(1+z)^m = 1 + \frac{m}{1}z + \frac{m(m-1)}{1.2}z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}z^3 + \ldots \qquad (109).$$

Donc, en remplaçant dans formule (109) d'abord z par $\frac{r}{p}$ et m par pr, on obtiendra le développement de $\left(1+\frac{r}{p}\right)^{pr}$ ; de même en remplaçant dans la même formule (109) z par $-\frac{r}{q}$ et m par qr, nous obtiendrons le développement de $\left(1-\frac{r}{q}\right)^{qr}$. On a ainsi :

$$\left(1+\frac{r}{p}\right)^{pr} = 1 + \frac{pr}{1}\,\frac{r}{p} + \frac{pr(pr-1)}{1.2}\,\frac{r^2}{q^2} + \frac{pr(pr-1)(pr-2)}{1.2.3}\,\frac{r^3}{p^3} + \ldots$$

et

$$\left(1-\frac{r}{q}\right)^{qr} = 1 - \frac{qr}{1}\,\frac{r}{q} + \frac{qr(qr-1)}{1.2}\,\frac{r^2}{q^2} - \frac{qr(qr-1)(qr-2)}{1.2.3}\,\frac{r^3}{q^3} + \ldots$$

Ces formules pourraient se simplifier comme suit :

$$\left(1+\frac{r}{p}\right)^{pr} = 1 + r^2 + \left(\frac{r^4}{1.2} - \frac{r^3}{1.2.p}\right) + \left(\frac{r^6}{1.2.3} - \frac{3\,r^5}{1.2.3.p} + \frac{r^4}{1.3.p^2}\right)\ldots$$

$$= 1 + r^2 - \frac{r^3}{1.2.\,p} + \frac{(3\,p^2+2)\,r^4}{1.2.3.p^2} - \frac{r^5}{1.2.p} + \frac{r^6}{1.2.3}\ldots$$

$$\left(1-\frac{r}{q}\right)^{qr} = 1 - r^2 - \frac{r^3}{1.2.q} + \frac{r^4}{1.2} + \frac{r^5}{1.2.q} - \frac{r^6}{1.2.3} - \frac{r^4}{1.3\,q^2}\ldots$$

$$= 1 - r^2 - \frac{r^3}{1.2.q} + \frac{(3\,q^2-2)\,r^4}{1.2.3.q^2} + \frac{r^5}{1.2.q} - \frac{r^6}{1.2.3}\ldots$$

En multipliant on aura des termes positifs et négatifs allant en augmentant.

Négligeons les puissances de $\frac{r}{p}$ et de $\frac{r}{q}$ et ne conservons donc que les deux 1ers termes de chaque série, nous aurons :

$$\left(1+\frac{r}{p}\right)^{pr}\left(1-\frac{r}{q}\right)^{qr}=1+pr\frac{r}{p}-qr\frac{r}{q}-pq\,r^2\frac{r^2}{pq}=1-r^4.$$

En substituant dans l'équation (108), il vient

$$X=p^{pr}\,q^{qr}\int_{-1}^{+1}(1-r^4)dr. (110).$$

Posons $(1-r^4)=t^2 \therefore d(1-r^4)=dt^2$ ou $-4r^3dr=$ $2\,t\,dt \therefore dr=-\frac{2tdt}{4r^3}$

et l'expression (110) devient

$$X=p^{pr}\,q^{qr}\int_{-1}^{+1}t^2\left(\frac{-2t}{4\,r^3}\right)dt=-\frac{2}{4r^3}\,p^{pr}\,q^{qr}\int_{-1}^{+1}t^3\,dt,$$

formule facilement intégrable.

On substitue la valeur de X dans la formule (107), expression de P ; on substitue au dénominateur la valeur, pour ce dernier, donnée par la formule (99), et l'on obtient :

$$P=\frac{-\frac{2}{4r^3}p^{pr}q^{qr}\int_{-1}^{+1}t^3\,dt}{\frac{n!\,m!}{(m+n)!}}.$$

Mais, $m+n=r$, $m=pr$, $n=qr$, avons-nous vu, donc il vient

$$P=\frac{-\frac{2}{4r^3}p^{pr}q^{qr}\int_{-1}^{+1}t^3\,dt}{\frac{qr!\;pr!}{r!}}=-\frac{2\,r!\,p^{pr}\,q^{qr}}{4r^3.\;qr!\;pr!}\int_{-1}^{+1}t^3\,dt.$$

Mais, art. 26, la formule de Stirling donne pour la valeur de

$$1.\,2.\,3\ldots\,r \text{ ou } r!=\sqrt{2\pi r}\;r^r\,e^{-r}$$

$$1.\,2.\,3\ldots\,qr \text{ ou } qr!=\sqrt{2\pi qr}\;qr^{qr}\,e^{-qr}$$

$$1.\,2.\,3\ldots\,pr \text{ ou } pr!=\sqrt{2\pi pr}\;pr^{pr}\,e^{-pr}.$$

En substituant, il vient

$$P = -\frac{2.\sqrt{2\pi r}\; r^r\, e^{-r}\, p^{pr}\, q^{qr}}{4\, r^3 \sqrt{2\pi q r}\;\; q r^{qr}\;\; e^{-qr}\, \sqrt{2\pi p r}\; pr^{pr} e^{-pr}} \int_{-1}^{+1} t^3\, dt.$$

Observons que $\frac{p^{pr}}{pr^{pr}} = \left(\frac{p}{pr}\right)^{pr} = \left(\frac{1}{r}\right)^{pr}$ et $\frac{q^{qr}}{qr^{qr}} = \left(\frac{1}{r}\right)^{qr}$ ;

de même $\frac{e^{-r}}{e^{-qr}} = \left(\frac{e}{e^q}\right)^{-r} = \left(\frac{1}{e^{q-1}}\right)^{-r} = \frac{1}{\left(\frac{1}{e^{q-1}}\right)^r} = \frac{1}{\frac{1}{e^{qr-r}}} = e^{qr-r}$

$= e^{(q-1)r} = e^{-pr}$ car de $p+q=1$ il vient $q-1 = -p$. En mettant l'expression ci-dessus sous la forme

$$P = -\left(\frac{2\sqrt{2\pi r}\; r^r}{4\, r^3 \sqrt{2\pi q r}\;\; \sqrt{2\pi p r}}\; \frac{e^{-r}\; p^{pr}\, q^{qr}}{e^{-qr}\, pr^{pr}\, qr^{qr}\, e^{-pr}} \int_{-1}^{+1} t^3\, dt\right)$$

et en substituant les valeurs ci-dessus, il vient

$$P = -\left(\frac{2\sqrt{2\pi r}\; r^r}{4\, r^3 \sqrt{2\pi qr}\sqrt{2\pi pr}}\, e^{-pr} \left(\frac{1}{r}\right)^{pr} \left(\frac{1}{r}\right)^{qr} \frac{1}{e^{-pr}} \int_{-1}^{+1} t^3\, dt\right)$$

et en remarquant que $\sqrt{2\pi q r} = \sqrt{2\pi r}\sqrt{q}$ et que $\sqrt{2\pi pr} = \sqrt{2\pi r}\sqrt{p}$, il vient

$$P = -\frac{2\sqrt{2\pi r}\; r^r}{4\, r^3 \sqrt{2\pi r}\; \sqrt{2\pi r}\; \sqrt{q}\; \sqrt{p}}\; \frac{e^{-pr}}{e^{-pr}} \left(\frac{1}{r}\right)^{pr+qr} \int_{-1}^{+1} t^3\, dt$$

$$= -\frac{r^{r-3}}{2\sqrt{2\pi r}\sqrt{pq}} \left(\frac{1}{r}\right)^{(p+q)r} \int_{-1}^{+1} t^3\, dt$$

et comme $p+q=1$, et que $\sqrt{r} = r^{1/2}$ il vient

$$P = \frac{-r^{r-3}}{2\sqrt{2\pi}\,\sqrt{r}\,\sqrt{pq}} \left(\frac{1}{r}\right)^r \int_{-1}^{+1} t^3\, dt = \frac{-r^{r-3-1/2}}{2\sqrt{2\pi}\,\sqrt{pq}}\; \frac{1}{r^r} \int_{-1}^{+1} t^3\, dt$$

ou, en remarquant que $-\frac{r^{r-3-1/2}}{r^r} = -r^{r-r-3-1/2} = -r^{-3-1/2} =$

$= -\frac{1}{r^{3\,1/2}} = -\frac{1}{\sqrt{r^3}}$ il vient

$$P \text{ ou } P_1 = -\frac{1}{\sqrt{r^3}} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{pq}} \int_{-1}^{+1} t^3\, dt$$

mais $\sqrt{pq} = \frac{\sqrt{mn}}{r}$ d'où $P = -\frac{r}{\sqrt{r^3}} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{mn}} \int_{-1}^{+1} t^3\, dt$

$$= -\frac{1}{\sqrt{r}} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{mn}} \int_{-1}^{+1} t^3\, dt.$$

## Théorie des erreurs.— Cas d'une seule inconnue.

60.— *Erreurs systématiques et accidentelles.*— On distingue, en probabilités, 2 sortes d'erreurs : les erreurs systématiques et les erreurs accidentelles. Les premieres sont celles qui se produisent toujours dans le même sens ; elles ne sont donc pas soumises au calcul des probabilités. Les secondes, se produisant tantôt dans un sens et tantôt dans un autre, sont soumises à ce calcul.

Autant que possible, les erreurs systématiques doivent toujours être éliminées, probablement au calcul ; tandis que les erreurs accidentelles ne doivent jamais être modifiées. Nous nous poserons la question:

Supposons que nous ayons une grandeur à mesurer, et que nous fassions plusieurs mesures de cette grandeur parce que nous ne pouvons la mesurer directement étant sujet à des erreurs accidentelles qui se produisent donc tantôt dans un sens et tantôt dans un autre. Chaque mesure faite donnera un certain résultat, soient ces résultats : $a_1$, $a_2$, $a_3$, ... $a_n$ et soit A la mesure exacte qu'on voudrait obtenir. Nous admettrons que toutes les erreurs systématiques, sur ces résultats, ont été éliminées. Les grandeurs $a_1$, $a_2$, $a_3$, ... $a_n$ seront en général différentes. La question est de déduire de ces grandeurs, la valeur la plus probable de A. Il est clair que si toutes les mesures ont été faites avec le même soin, on doit donner, dans l'affirmation de A, la même importance aux mesures isolées $a_1$, $a_2$, $a_3$, ... $a_n$ ; donc on doit pouvoir écrire

$$A = \varphi(a_1, a^2, a_3, \ldots a_n)$$

ou fonction des valeurs $a_1$, $a_2$, $a_3$, ... $a_n$ ; laquelle est une fonction symétrique par rapport aux a. On ne peut déterminer d'une façon absolue la forme de cette fonction $\varphi$ ; mais on peut démontrer que la valeur que l'on choisit pour A satisfait à deux des conditions fondamentales auxquelles doit satisfaire cette fonction $\varphi$, avoir :

1°. — Si nous changeons, d'une certaine quantité $\alpha$, l'origine des mesures, la valeur A doit être augmentée de $\alpha$, ce qui est un principe qui doit nous paraître évident. On aura donc :

$$A + \alpha = \varphi(a_1 + \alpha_1, a_2 + \alpha_2, \ldots a_n + \alpha_n)$$

ou, d'après la formule (59) de Taylor (voir 1e partie, p. 47, et art. 44 formule 78 et formule 78[bis], remarque II):

$$A + \alpha \text{ ou } \varphi(a_1, a_2, \ldots a_n) + \alpha = \varphi(a_1, a_2, \ldots a_n) + \left(\frac{dA}{da_1} + \frac{dA}{da_2} + \ldots \frac{dA}{da_n}\right)\alpha + \left(\frac{d^2A}{da_1^{\,2}} + \frac{d^2A}{da_2^{\,2}} + \ldots \frac{d^2A}{da_n^{\,2}}\right)\frac{\alpha^2}{1.2} + \left(\frac{d^3A}{da_1^{\,3}} + \frac{d^3A}{da_2^{\,3}} + \ldots + \frac{d^3A}{da_n^{\,3}}\right)\frac{\alpha^3}{1.2.3} + \ldots$$

Cette dernière égalité sera vérifiée si

$$\frac{dA}{da_1} + \frac{dA}{da_2} + \frac{dA}{da_3} + \ldots + \frac{dA}{da_n} = 1,$$

car les termes $\frac{d^2A}{da_1^{\,2}}$, $\frac{d^2A}{da_2^{\,2}}$, etc. $\frac{d^3A}{da_1^{\,3}}$, $\frac{d^3A}{da_2^{\,3}}$, etc. etc. équivalant aux termes $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc., s'annulent, (voir 1re partie : art. 54, 138 et 141,) et il reste

$$A + \alpha \text{ ou } \varphi(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n) + \alpha = \varphi(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) + (\alpha \times 1) + 0 = \varphi(a_1\ a_2\ a_3, \ldots a_n) + \alpha.$$

2°. Si l'on rend l'unité qui sert à faire la mesure, m fois plus petite ou en général si l'on modifie cette unité de telle façon que les grandeurs $a_1$, $a_2$, ... $a_n$ soient multipliées par m, A devra aussi être multiplié par m. On devra donc avoir :

$$m\,A \text{ ou } m\,\varphi(a_1, a_2, \ldots a_n) = \varphi(m\,a_1, m\,a_2, \ldots m\,a_n).$$

L'expression de A qui ne satisferait pas à ces 2 conditions ne pourrait pas être prise comme mesure cherchée.

61. — ***Axiome de la moyenne.*** — Nous avons vu, à l'art. 35, remarque I, que le théorême de Bernouilli montre que dans une série de mesures, les écarts égaux et de signes contraires, sont également probables.

D'une façon générale, on admet que daus toute expression d'une certaine grandeur, obtenue à l'aide d'observations, les erreurs accidentelles, égales en valeur absolue, sont également probables. Il résulte de là, que si l'on fait un très-grand nombre de mesures, la somme de ces mesures est débarrassée de ces erreurs accidentelles, puisque ces dernières étant également probables et de signes contraires, elles se détruisent, s'annulent.

On admet que la grandeur à prendre, comme véritable mesure d'une grandeur observée, est la moyenne arithmétique des grandeurs relevées, c'est-à-dire que l'on a pour n mesures relevées

$$A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}.$$

Nous devons admettre nécessairement ce postulat pour déterminer la forme de la fonction qui permette de calculer, dans une mesure faite, la probabilité d'une grandeur déterminée.

Supposons que nous ayons une seule grandeur à mesurer et que les résultats de nos observations soient $a_1$, $a_2$, $a_3$, ... $a_n$, et que nous prenions, comme vraie valeur :

$$A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots a_n}{n},$$

nous conviendrons d'écrire

$A - a_1 = \Delta_1$ ; $A - a_2 = \Delta_2$ ; $A - a_3 = \Delta_3$ ; ... $A - a_n = \Delta_n$ ;
les signes $\Delta_1$, $\Delta_2$, ... $\Delta_n$ représentant ici les différences respectives de A avec $a_1$ ; $a_2$ ; ... $a_n$ ; ces signes sont donc les erreurs de mesures $a_1$ ; $a_2$ ; ... $a_n$.

(Ne pas confondre donc ces signes avec ceux donnés à l'art. 1 du calcul des diff., 2[e] partie de mon cours d'analyse ; où les différences secondes $\Delta_2$, troi-

sièmes $\Delta_3$ ; etc, sont respectivement les différences des différences premières, secondes, etc).

En vertu de l'hypothèse que nous avons faite, c'est-à-dire que les erreurs s'annulent, nous avons donc d'abord la relation $\sum_1^n \Delta = 0$,

ce qui exprime que la somme des erreurs $\Delta_1$ à $\Delta_n$ égale zéro, (voir art. 33, p. 31, de la 2e partie).

Nous pouvons supposer que parmi les erreurs $\Delta_1$ à $\Delta_n$, il y en ait un certain nombre qui soient égales entre elles. Par exemple, nous pouvons supposer qu'il y ait parmi ces erreurs, p erreurs d'une certaine valeur que nous représenterons par $\Delta_p$ ; q erreurs par $\Delta_q$, r erreurs par $\Delta_r$, s erreurs par $\Delta_s$, etc ; de telle sorte que n représentant le nombre total d'erreurs, nous aurons :

$$p+q+r+s+\ldots=n.$$

Or, d'après le théorème de Bayes, art. 50 et 51, la probabilité de commettre une nouvelle erreur $\Delta_p$ sera exprimée par $\frac{p}{n}$ ; de même pour $\Delta_q$ nous aurons $\frac{q}{n}$, et ainsi de suite, de sorte que nous aurons l'identité

$$\frac{p}{n}+\frac{q}{n}+\frac{r}{n}+\frac{s}{n}+\ldots=\frac{p+q+r+s+\ldots}{n}=\frac{n}{n}=1,$$

ce qui exprime la certitude, art. 7 ; et, en effet, la somme de ces probabilités donne la certitude

62. — *Forme de la probabilité P de commettre une erreur* $\Delta$.

Admettons que cette probabilité soit proportionnelle à une certaine fonction analytique que nous représenterons par $\varphi(\Delta)$. Puisque la probabilité de commettre une erreur déterminée $\Delta$, lorsqu'une infinité d'erreurs sont possibles, doit être infiniment petite, art. 5, nous pouvons représenter cette probabilité par une différentielle (art. 1, 1re partie, calc. diff.) soit

$$P=\varphi(\Delta)\, d.\Delta.$$

Supposons que les erreurs possibles soient comprises, en valeur absolue, entre a et b ; la probabilité P devient alors

$$P = \int_a^b \varphi(\Delta)\, d\Delta = 1,$$

ce qui exprime la certitude, art. 7, en effet, cette intégrale exprime la probabilité de commettre une erreur comprise entre les limites a et b, limites entre lesquelles sont comprises toutes les erreurs.

Pour déterminer la forme de $\varphi(\Delta)$, cherchons quelle est la probabilité de commettre des erreurs $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \ldots \Delta_n$ de grandeurs déterminées dans une série de mesures d'une même quantité. Cette probabilité, en vertu de l'art. 15, sera proportionnelle au produit $\varphi(\Delta_1)\varphi(\Delta_2)\varphi(\Delta_3)\ldots\varphi(\Delta_n)$. Par suite, si les erreurs ont été réellement commises, le produit devra être le plus grand possible pour obtenir le plus d'approximation. La fonction $\varphi$ devra donc satisfaire à la condition que le produit exprimé précédemment soit un maximum lorsqu'on y introduit les valeurs $\Delta_1\ \Delta_2 \ldots \Delta_n$ lesquelles sont les erreurs véritables, nous aurons donc $\varphi(\Delta_1)\ \varphi(\Delta_2)\ldots\varphi(\Delta_n) = \text{maximum}$, ce qu'on exprime en abrégé sous la forme

$$\pi_1^n\ \varphi(\Delta_n) = \text{maximum},$$

ce qui veut donc dire produit $\pi$ de $\varphi(\Delta_n)$ dans lequel n prend les valeurs de 1 à n, voir art. 16.

En vertu de l'art. 59, p. 68, 1<sup>re</sup> partie, la dérivée logarithmique de ce produit doit être nulle, donc

$$\frac{\varphi'(\Delta_1)}{\varphi(\Delta_1)} + \frac{\varphi'(\Delta_2)}{\varphi(\Delta_2)} + \ldots + \frac{\varphi'(\Delta_n)}{\varphi(\Delta_n)} = 0, \quad (111);$$

voir art. 12, p. 16 et art. 157 p. 176 de la 1re partie. Ici $\varphi'(\Delta_1)$, $\varphi'(\Delta_2)$, etc., sont les dérivées.

S'il s'agit d'une seule quantité, l'axiome de la moyenne, art. 61, donne pour la somme des erreurs

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n = 0. \quad (112).$$

Ces égalités doivent donc nous permettre de déterminer la fonction $\varphi$. Posons

$$\frac{\varphi'(\Delta_1)}{\varphi(\Delta_1)} = F(\Delta_1)\ ;\ \frac{\varphi'(\Delta_2)}{\varphi(\Delta_2)} = F(\Delta_2)\ ;\ \text{etc.}\ ;\ (112^{bis})$$

et en substituant dans l'égalité (111), nous aurons donc

$$F(\Delta_1) + F(\Delta_2) + \ldots + F(\Delta_n) = 0. \quad (113)$$

Supposons d'abord $n=2$, nous aurons d'après les expressions (112) et (113) :
$\Delta_1+\Delta_2=0$ et $F(\Delta_1)+F(\Delta_2)=0$ d'où $\Delta_2=-\Delta_1$ et $F(\Delta_1)=-F(\Delta_2)=-F(-\Delta_1)$, ce qui ne peut nous servir.

Nous prendrons donc pour $F(\Delta)$ une fonction impaire de $\Delta$. Soit $n=3$, nous aurons

$$\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3=0 \text{ d'où } \Delta_3=-(\Delta_1+\Delta_2)$$

et $F(\Delta_1)+F(\Delta_2)+F(\Delta_3)=0$ d'où $F(\Delta_1)+F(\Delta_2)=-F(\Delta_3)=$ donc $-F[-(\Delta_1+\Delta_2)]=-F(-\Delta_1-\Delta_2)=F(\Delta_1+\Delta_2)$.

La fonction F satisfait donc à l'équation

$$F(x)+F(y)=F(x+y) \qquad (114),$$

en remplaçant $\Delta_1$ et $\Delta_2$ par x et y.

Faisons $x=y$, il viendra

$$F(x)+F(x)=F(x+x) \text{ ou } 2F(x)=F(2x).$$

Si $x=\frac{1}{2}y$ ou $2x=y$, l'éq. (114) donne

$$F(x)+F(2x)=F(x+2x)=F(3x);$$

mais $$F(2x)=2F(x), \text{ donc}$$

$$F(x)+2F(x) \text{ ou } 3F(x)=F(3x).$$

Et d'une façon générale, lorsque $\alpha$ est entier, on a

$$\alpha F(x)=F(\alpha x). \qquad (115).$$

Dans $F(\alpha x)=\alpha F(x)$, faisons $x=\beta y$, nous aurons

$$F(\alpha\beta y)=\alpha F(\beta y)=\alpha\beta F(y)$$

car $$F(\beta y)=\beta F(y).$$

Si $\beta=\frac{1}{\gamma}$, nous aurons $\alpha\beta=\frac{\alpha}{\gamma}$, d'où $F\left(\frac{\alpha}{\gamma}y\right)=\frac{\alpha}{\gamma}F(y)$.

Mais tout nombre n rationnel ou irrationnel peut être considéré comme la limite d'un série de nombres

$$\frac{\alpha_1}{\gamma_1}, \quad \frac{\alpha_2}{\gamma_2}, \dots \frac{\alpha_m}{\gamma_m}.$$

Par suite, nous avons l'équation ponctuelle, dans laquelle n est quelconque :

$$F(nx)=nF(x).$$

Or, ceci ne peut arriver que lorsque x est du premier degré ; donc la fonction $F(x)$ sera de la forme $F(x)=Kx$, K étant une constante.

Nous avons supposé que $\varphi(\Delta)$ était une fonction analytique de $\Delta$. Par suite, la fonction F (x) sera de la forme

$$F(x) = \Delta_0 + \Delta_1 x + \Delta_2 x^2 + \ldots \quad (116).$$

Et en remplaçant dans cette équatlon, x par $\alpha$ x, la quantité $\alpha$ étant quelconque, il vient

$$F(\alpha x) = \Delta_0 + \Delta_1 \alpha x + \Delta_2 \alpha^2 x^2 + \ldots$$

ou, d'après ce qui précède, comme $F(\alpha x) = \alpha F(x)$, il vient $\alpha F(x) = \Delta_0 \alpha + \Delta_1 \alpha x + \Delta_2 \alpha x^2 + \ldots = F(\alpha x) = \Delta_0 + \Delta_1 \alpha x + \Delta_2 \alpha^2 x^2 + \ldots$, d'où $\alpha F(x) - F(\alpha x) = \Delta_0 \alpha + \Delta_1 \alpha x + \Delta_2 \alpha x^2 + \ldots - \Delta_0 - \Delta_1 \alpha x - \Delta_2 \alpha^2 x^2 - \ldots = 0$ ;

ce qui donne

$$(\Delta_0 \alpha - \Delta_0) + (\Delta_1 \alpha x - \Delta_1 \alpha x) + (\Delta_2 \alpha x^2 - \Delta_2 \alpha^2 x^2) + \ldots = 0;$$

ou encore

$$\Delta_0 (\alpha - 1) + \Delta_1 \alpha x (1 - 1) + \Delta_2 \alpha x^2 (1 - \alpha) + \ldots = 0 ;$$

ou $$\Delta_0 (\alpha - 1) + \Delta_2 \alpha (1 - \alpha) x^2 + \ldots = 0.$$

La solution $\alpha = 1$ qui satisfait à cette dernière équation doit être rejetée puisque $\alpha$ est quelconque ; donc il faut prendre $\Delta_0 = \Delta_2 = \ldots = 0$.

Mais, nous avons vu ci-dessus que $F(x) = Kx$, K étant une constante ; et d'après ce qui précède, formules ($112^{bis}$) :

$F(\Delta) = \dfrac{\varphi'(\Delta)}{\varphi(\Delta)}$ ; donc par analogie, en remplaçant x par $\Delta$, il vient

$$F(\Delta) = \frac{\varphi'(\Delta)}{\varphi(\Delta)} = K\Delta \text{ ; et par suite}$$

$F(\Delta)\, d\Delta = \dfrac{\varphi'(\Delta)}{\varphi(\Delta)} d\Delta = K\Delta\, d\Delta$ ; et, en intégrant, on aura

$$\int F(\Delta)\, d\Delta = \int \frac{\varphi'(\Delta)}{\varphi(\Delta)} d\Delta = \int K\Delta\, d\Delta = K \int \Delta d\Delta =$$

$= K \dfrac{\Delta^{1+1}}{1+1} + C = K \dfrac{\Delta^2}{2} + C = \dfrac{1}{2} K \Delta^2 + C$ ; et C étant une constante peut se représenter par log. c.

Or, (art. 28, 1re partie, de mon cours d'analyse) $\dfrac{dy}{y} = d. \log y$. Et en faisant $\varphi(\Delta) = y$, puisque en vertu de l'art. 157 pour $y = fx$, on a

$y' = \frac{d.\,y}{d.\,x} = f'(x)$ d'où $y'\,dx = dy = f'(x)\,dx$, il vient en remplaçant x par $\Delta$, $y'\,d\Delta$ ou $dy$ ou $d\,\varphi(\Delta) = \varphi'(\Delta)\,d\Delta$. Par suite $\int \frac{\varphi'(\Delta)\,d\Delta}{\varphi(\Delta)} = \int \frac{dy}{y} = \int d.\log y = \int d.\log \varphi(\Delta) =$ $= \log \varphi\,(\Delta)$.

Par suite, d'après ce qui précède

$$\frac{1}{2}\,K\,\Delta^2 + \log c = \log \varphi(\Delta).$$

et en représentant par l les logarithmes népériens, il vient $l\,\varphi\,(\Delta) = \frac{1}{2}\,K\,\Delta^2 + l\,c$ ou constante, ce qui détermine la forme de la fonction $\varphi$.

Remarquons d'après cette formule que le coefficient $\frac{1}{2}\,K$ doit être nécessairement négatif, puisque s'il était positif, la probabilité de commettre une erreur $\Delta$, art. 62, étant proportionnelle à $\varphi\,(\Delta)$, cette probabilité croîtrait avec cette erreur $\Delta$, ce qui est contraire à la vérité.

Nous pouvons donc poser, $h^2$ étant nécessairement positif

$$\frac{1}{2}\,K = -h^2 \text{ et } \frac{1}{2}\,K\Delta^2 = -h^2\,\Delta^2.$$

Par suite $l\,\varphi\,(\Delta) = -h^2\,\Delta^2 + l\,c$.

Mais, on sait que le logarithme népérien d'une puissance $e^n$ ou $l.\,e^n = n.\,l.\,e$ ; et comme $l.\,e = 1$, il vient $l.\,e^n = n$.

Par analogie, en faisant $n = -h^2\,\Delta^2$, il vient $l\,e^{-h^2\,\Delta^2} = -h^2\,\Delta^2$ ; donc on peut poser $l.\,\varphi\,(\Delta) = l.e^{-h^2\,\Delta^2} + l\,c$. Et comme le logarithme d'un produit de 2 facteurs est égal à la somme des logarithmes de ces facteurs, il vient $l.\,e^{-h^2\,\Delta^2} + l\,c = l.c.\,e^{-h^2\,\Delta^2}$ ; donc enfin $l.\,\varphi\,(\Delta) = l.\,c.\,e^{-h^2\,\Delta^2}$ ou $\varphi(\Delta) = c.\,e^{-h^2\,\Delta^2}$. (117).

63. — Nous allons déterminer la liaison qui existe entre h et c. Nous avons vu, au commencement de l'article 62, que

$$P \text{ ou } \int_a^b \varphi\,(\Delta)d\Delta = 1.$$

Remarquons d'abord que, d'après la formule (117), l'expression de $\varphi(\Delta)$ devient extrêmement petite à partir d'une certaine limite. (On sait que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; donc $e^{-h^2 \Delta^2} = \frac{1}{e^{h^2 \Delta^2}}$). Par conséquent, nous pouvons prendre indifféremment les limites effectives a et b ou d'autres limites o à $\infty$; et il viendra

$$\int_0^{\infty} \varphi(\Delta) d\Delta \text{ ou } \int_0^{\infty} c.\, e^{-h^2 \Delta^2} d\Delta \text{ ou } c \int_0^{\infty} e^{-h^2 \Delta^2} d\Delta = 1.$$

Et, puisque la fonction sous le signe intégral est paire, on peut poser $2\, c \int_0^{\infty} e^{-h^2 \Delta^2} d\Delta = 1.$

Représentons $h\Delta$ par t ; en différentiant il vient $h d\Delta = dt$ d'où $d\Delta = \frac{dt}{h}$. On a aussi $h^2 \Delta^2 = t^2$. En substituant ces valeurs dans l'intégrale ci-dessus, il vient

$$2\, c \int_0^{\infty} e^{-t^2} \frac{dt}{h} = 1 \text{ ou } \frac{2\, c}{h} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = 1$$

ou

$$2\, c \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = h.$$

Or, on sait que l'intégrale de Poisson donne

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Par comparaison, en remplaçant x par t, il vient

$$2\, c\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right) = h \text{ d'où } c = \frac{h}{\sqrt{\pi}};$$

c'est la relation cherchée.

Par conséquent, la probabilité P de commettre une erreur $\Delta$ est exprimée par (commencement art. 62) et ci-dessus :

$$P = \varphi(\Delta)\, d\Delta \text{ ou } c.\, e^{-h^2 \Delta^2} d\Delta \text{ ou } \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 \Delta^2} d\Delta. \quad (118).$$

Lorsque l'erreur peut varier entre les limites a et b, on a comme probabilité

$$P = \int_a^b \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 \Delta^2} d\Delta. \quad (119).$$

64. — La grandeur h que nous avons employée est appelée *coefficient de précision.* Voici pourquoi.

Admettons que nous ayons deux systèmes de détermination d'une même grandeur. Soit h la valeur de la constante, (art. 62), du premier système, et supposons qu'en valeur absolue l'erreur que l'on puisse commettre (dans l'appréciation de la grandeur à déterminer) varie entre les limites o et a. De même, soit h′ la constante dans le second système et o et a′ les limites entre lesquelles l'erreur puisse varier.

La probabilité de commettre une des erreurs possibles est, pour le premier système, art. 63 :

$$\int_{o}^{a} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2} d\Delta ;$$

et pour le second :

$$\int_{o}^{a'} \frac{h'}{\sqrt{\pi}} e^{-h'^2 \Delta^2} d\Delta.$$

Admettons l'égalité de ces deux probabilités, on aura, en supprimant le facteur commun $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ :

$$\int_{o}^{a} h e^{-h^2 \Delta^2} d\Delta = \int_{o}^{a'} h' e^{-h'^2 \Delta^2} d\Delta.$$

Posons, comme précédemment, art. 63 :

$$\Delta h = t \therefore d\Delta = \frac{dt}{h} \text{ pour le premier système.}$$

Pour $\Delta = o$, $t = o$ et pour $\Delta = a$, $t = a h$ ; donc t varie entre o et a h.

Et $\Delta h' = t' \therefore d\Delta = \frac{dt'}{h'}$ pour le second système ; pour $\Delta = o$, $t' = o$, et pour $\Delta = a'$, $t' = a' h'$ ; donc t′ varie entre o et a′ h′.

Les intégrales deviennent

$$\int_{o}^{a} h e^{-t^2} \frac{dt}{h} = \int_{o}^{a'} h' e^{-t'^2} \frac{dt'}{h'}$$

$$\int_{o}^{a} e^{-t^2} dt = \int_{o}^{a'} e^{-t'^2} dt'.$$

Et comme t et t′ varient, respectivement, entre o et a h, et entre o et a′ h′, on peut écrire

$$\int_0^{ah} e^{-t^2}\, dt = \int_0^{a'h'} e^{-t'^2}\, dt'$$

égalité qui se vérifie pour a h = a′ h′.

Par suite, on peut dire que l'égalité des deux probabilités équivaut à a h = a′ h′.

On tire de cette dernière égalité $h = \frac{a'\,h'}{a} = a'\,h' \times \frac{1}{a} =$ constante $\times \frac{1}{a}$; puisqu'on peut écrire a h = a′ h′ = a″ h″ = constante.

Remarquons que cette expression montre que la valeur de h sera d'autant plus grande que le facteur $\frac{1}{a}$ sera grand ou que la quantité a sera petite.

Donc la valeur h croît à mesure que l'erreur limite *a* à laquelle on peut s'atteindre décroît. Par conséquent on peut considérer h comme une mesure de précision, et c'est pour cela qu'on l'appelle *coefficient de précision ;* par suite on peut dire que la précision des observations sera d'autant plus grande que h a une plus grande valeur.

65. — Voyons maintenant ce qu'on appelle erreur moyenne.

1° Examinons d'abord comment, ayant effectué une série d'observations, on peut déterminer la mesure de la précision correspondant à cette suite d'observations.

Admettons qu'il n'y ait qu'une grandeur à mesurer et que les erreurs commises soient respectivement $\Delta_1\ \Delta_2\ \Delta_3 \ldots \Delta_n$.

Si l'on connait le coefficient de précision h, la probabilité P de la présence simultannée de ces erreurs (art. 15, prob. composées) est égale à (formule 118, art. 63) :

$$P = \left[\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta_1^2} \times \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta_2^2} \times \ldots \times \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta_n^2}\right] (d\Delta)^n.$$

Ce produit est égal à

$$\frac{h^n}{(\sqrt{\pi})^n}\left(e^{-h^2 \Delta_1^2}\, e^{-h^2 \Delta_2^2} \times \ldots \times e^{-h^2 \Delta_n^2}\right) (d\Delta)^n. \qquad (120).$$

Mais $(\sqrt{\pi})^n = \pi^{\frac{n}{2}}$. Et remarquons que de ce que $a^m \times a^n = a^{m+n}$, il vient

$$e^{-h^2 \Delta_1^2} e^{-h^2 \Delta_2^2} \ldots e^{-h^2 \Delta_n} = e^{-h^2 \Delta_1^2 + (-h^2 \Delta_2^2) + \ldots + (-h^2 \Delta_n^2)}$$

$= e^{-h^2 (\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_n^2)}$. Or, $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots \Delta_n^2$ peut se représenter par $\Sigma_1^n \Delta_1^2$ que, pour abréger nous représenterons pas $[\Delta\Delta]$, ce qui veut dire',art. 11, somme des $\Delta_i^2$ où i varie de 1 à n.

Donc, le produit (120) ci-dessus peut se représenter par

$$P = \frac{h^n}{\pi^{\frac{n}{2}}} e^{-h^2 \Sigma_{i=1}^{i=n} \Delta_i^2} (d\Delta)^n \text{ ou } \frac{h^n}{\pi^{\frac{n}{2}}} e^{-h^2 [\Delta\Delta]} (d\Delta)^n. \qquad (121).$$

2° Examinons maintenant de quelle façon on peut déterminer la constante h pour que l'expression (121) soit maximum. Tout d'abord, si l'on connaît h, on calculera à priori la probabilité des erreurs commises.

Actuellement, on connaît les erreurs commises $\Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_n$.

La probabilité de commettre ces erreurs est exprimée par la formule (121), et il s'agit de chercher la valeur de h qui rend cette fonction maximum.

Pour cela, remarquons que la partie variable de cette expression est : $h^n e^{-h^2 [\Delta\Delta]}$

Posons $y = h^n e^{-h^2 [\Delta\Delta]}$. La condition du maximum est (voir mon cours, 1^e partie, art. 59) :

$$\frac{dy}{dh} = 0 \text{ ou bien } \frac{d(h^n e^{-h^2 [\Delta\Delta]})}{dh} = 0 \text{ ou } \frac{d(e^{-h^2 [\Delta\Delta]} h^n)}{dh} = 0. \quad (122).$$

Or, voir 1^re partie (art. 9 et 12) : $d\,zy = z\,dy + y\,dz$ et $dx^m = mx^{m-1}\,dx$.

Et, art. 42, remarque III 1^re partie, on a :
$d.\,a^x = a^x\,dx\,L\,a$ ; et si l'on fait $a = e$, base du système népérien. il vient $d.\,e^x = e^x\,dx\,l\,e$ ; or, log e (système népérien) $= 1$ ; donc, enfin, $d.\,e^x = e^x\,dx$.

Par suite $d.\, e^{-h^2[\Delta\Delta]} = e^{-h^2[\Delta\Delta]}\, d.\, (-h^2 [\Delta\Delta]) = e^{-h^2[\Delta\Delta]} (-2\, h [\Delta\Delta]\, d\, h)$.

Par conséquent

$$d.\left(e^{-h^2[\Delta\Delta]}\, h^n\right) = e^{-h^2[\Delta\Delta]}\, n\, h^{n-1}\, d\, h + h^n \left[e^{-h^2[\Delta\Delta]} (-2h[\Delta\Delta]dh)\right] = e^{-h^2[\Delta\Delta]} nh^{n-1}dh - h^n e^{-h^2[\Delta\Delta]} 2h[\Delta\Delta]dh = e^{-h^2[\Delta\Delta]}\left[nh^{n-1} - 2h^{n+1}[\Delta\Delta]\right]dh = e^{-h^2[\Delta\Delta]}\left[h^{n-1}(n-2h^2[\Delta\Delta])\right]$$

$$dh = e^{-h^2[\Delta\Delta]} h^{n-1}(n-2h^2[\Delta\Delta])dh.$$

D'où, d'après la formule (122) en supprimant le facteur dh commun au numérateur et au dénominateur, il vient

$$e^{-h^2[\Delta\Delta]} h^{n-1}(n - 2\, h^2 [\Delta\Delta]) = 0.$$

Ecartons $e^{-h^2[\Delta\Delta]} = 0$ et $h = 0$ qui satisfont à cette expression, et il vient

$$n - 2h^2 [\Delta\Delta] = 0 \;\therefore\; n = 2\, h^2 [\Delta\Delta] \text{ et } \frac{n}{2[\Delta\Delta]} = h^2$$

$$\text{d'où } h = \sqrt{\frac{n}{2\,[\Delta\Delta]}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{[\Delta\Delta]}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, \frac{1}{\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}}. \quad (123),$$

$$\text{car } \frac{1}{\frac{\sqrt{[\Delta\Delta]}}{\sqrt{n}}} = 1 : \frac{\sqrt{[\Delta\Delta]}}{\sqrt{n}} = 1 \times \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{[\Delta\Delta]}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{[\Delta\Delta]}} = \sqrt{\frac{n}{[\Delta\Delta]}}).$$

C'est la condition du maximum.

L'expression (123) exprime la valeur de h en fonction des erreurs commises (voir ci-avant la valeur de $[\Delta\Delta]$. — Cette expression répond bien à l'idée qu'on se fait de la mesure d'exactitude des observations, car on a, en effet, art. 65 et formule ci-dessus :

$$h = \sqrt{\frac{n}{2[\Delta\Delta]}} = \sqrt{\frac{n}{2\left(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 \ldots\right)}} \;\therefore\; \frac{1}{h} = \sqrt{\frac{2\left(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots\right)}{n}}$$

ce qui montre que h est inversement proportionnel à cette quantité.

Si, dans les observations que l'on ferait pour déterminer une grandeur, on pourrait ne pas commettre d'erreur, l'expression ci dessus serait nulle, puisque les erreurs $\Delta_1$, $\Delta_2$, etc. seraient nulles, et par suite la somme $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots$ ou $[\Delta\Delta]$ serait nulle, et l'expression $h = \sqrt{\frac{n}{2[\Delta\Delta]}}$ égalerait $\sqrt{\frac{n}{0}} = \infty$, c'est-à-dire que l'on pourrait dire que la précision h de l'observateur est infinie.

D'après ce qui précède, on voit qu'à mesure que la moyenne de la somme des carrés $\Delta_1^2$, $\Delta_2^2$, etc, diminue, le coefficient de précision h devient plus grand. Or, il est évident que pour apprécier la précision des observations, puisque les erreurs égales et de signes contraires sont également probables, (remarque I, art. 35), c'est la somme des carrés des erreurs qui indiquera le degré de précision avec lequel on aura opéré.

La quantité $\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}$ s'appelle *l'erreur moyenne* ; on la représente par la lettre de l'ancien grec $\varepsilon$ (é epsilonn).

Donc, on a l'égalité, voir formule (123) :

$$h = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\varepsilon} \text{ d'où } h\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad (124).$$

66. — On appelle *erreur probable*, une erreur telle que l'on peut s'attendre aussi bien à la dépasser qu'à rester en-dessous.

Soit P la probabilité de commettre une erreur comprise entre $-\Delta$ et $+\Delta$ ; on a, art. 62 :

$$P = \int_{-\Delta}^{+\Delta} \varphi(\Delta)\, d\Delta ;$$

ou, comme nous avons fait pour les formules (53) et ($53^{bis}$), art. 37, en prenant l'intégrale entre 0 et $\Delta$, d'après la formule (119) sauf à mettre $\frac{h}{\sqrt{\pi}}$ hors du signe d'intégration, il vient $P = 2\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\Delta} e^{-h^2\Delta^2}\, d\Delta$ ;

ou, comme $h^2 \Delta^2 = t^2$ et $d\Delta = \frac{dt}{h}$, art. 63, il vient

$$P = 2\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\Delta} e^{-t^2} \frac{dt}{h} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\Delta} e^{-t^2}\, dt$$

et en prenant de o à t ou $\Delta h$ :

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\Delta h} e^{-t^2}\, dt.$$

Si, dans cette formule, on recherche la valeur de $\Delta$ pour laquelle $P = \frac{1}{2}$ ce qui indique l'incertitude, art. 7, on obtient $\Delta h = 0{,}477$ ; c'est-à-dire qu'alors on peut aussi bien dépasser l'erreur $\Delta$ que rester en-dessous ; et la valeur de $\Delta$ qui correspond à cette valeur de $\Delta h$ est donc ce qu'on appelle *l'erreur probable* ; on la désigne par r. Si l'on représente 0,477 par $\lambda$ (lettre l ou lambda du grec ancien), il vient $hr = \lambda$. Donc, on a pour l'erreur probable :

$P = \frac{1}{2}$ ; $h\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ; $hr = \lambda$ d'où $\frac{h\varepsilon}{hr}$ ou $\frac{\varepsilon}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} : \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\,\lambda}$ et

$r = \varepsilon \sqrt{2}\,\lambda$. (125).

L'égalité précédente exprime la ***relation qui existe entre l'erreur probable r et l'erreur moyenne*** $\varepsilon$.

*Remarque.* — En général, lorsqu'on détermine une grandeur par une série d'observations, on a soin de calculer en même temps soit l'erreur probable r de la détermination, soit l'erreur moyenne $\varepsilon$, parce que à cause des deux égalités ci-dessus ou $hr = \lambda$ et $h\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$ dès que l'on se donne r ou $\varepsilon$ on en déduit la mesure de précision h des observations. Or, cette mesure est nécessaire pour permettre de réduire à une même unité, ou pour permettre de combiner entre elles des séries d'observations de précision différente.

67. — Examinons maintenant si l'on peut rechercher la possibilité de déterminer l'***erreur de la moyenne arithmétique***. Nous admettons, art. 61, que la moyenne arithmé-

tique est la valeur la plus probable d'une inconnue déterminée par une série d'observations.

Admettons que nous ayons une grandeur mesurée donnant des déterminations que nous représentons par $a_1$ $a_2 \dots a_n$. Prenons comme première valeur de la moyenne arithmétique

$$A = \frac{1}{n} \Sigma_{i=1}^{i=n} a_i \; ;$$

alors les erreurs sont :

$$A - a_1 = \Delta_1$$
$$A - a_2 = \Delta_2$$
$$\dots\dots$$
$$A - a_n = \Delta_n \, .$$

Nous savons, art. 61, que la somme des erreurs égale zéro ou $\Sigma\, \Delta = 0$.

Supposons que la véritable mesure de la grandeur au lieu d'être A soit $A + \omega$. Les véritables erreurs au lieu d'être $\Delta_1\, \Delta_2 \dots \Delta_n$ seront $\Delta_1 + \omega$, $\Delta_2 + \omega$, ... $\Delta_n + \omega$. Et la probabilité de commettre ces erreurs dans un système de précision h est proportionnelle à

$$\frac{h^n}{\pi^{\frac{n}{2}}} e^{-h^2 \left\{ [\Delta\Delta] + n\omega^2 \right\}} (d\,\Delta)^n. \quad (126).$$

En effet, nous avons admis, art. 65, que $[\Delta\Delta] = \Sigma_{i=1}^{i=n} \Delta_i^2$ et nous avons obtenu la probabilité

$$\frac{h^n}{\pi^{\frac{n}{2}}} e^{-h^2 [\Delta\Delta]} (d\,\Delta)^n.$$

Or, ici, les erreurs sont $\Delta_1 + \omega$, $\Delta_2 + \omega$,... $\Delta_n + \omega$ ; donc on a :

$$(\Delta_1 + \omega)^2 = \Delta_1^2 + 2\,\Delta_1\,\omega + \omega^2$$
$$(\Delta_2 + \omega)^2 = \Delta_2^2 + 2\,\Delta_2\,\omega + \omega^2$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$(\Delta_n + \omega)^2 = \Delta_n^2 + 2\,\Delta_n\,\omega + \omega^2$$

et en faisant la somme, il vient

$$(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta_n^2) + 2\,\omega\,(\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n) + n\,\omega^2$$

ou $$\Sigma_{i=1}^{i=n} \Delta_i^2 + 2\,\omega\, \Sigma_{i=1}^{i=n} \Delta_i + n\,\omega^2 \, .$$

Or, nous avons vu ci-dessus que $\Sigma\Delta = 0$, donc

$$2\,\omega\,\Sigma_{i=1}^{i=n}\Delta_i = 0,\ \text{et il reste}$$

$\Sigma_{i=1}^{i=n}\Delta_i^2 + n\,\omega^2$ et comme $\Sigma_{i=1}^{i=n}\Delta_i^2 = [\Delta\Delta]$, il vient enfin

$$[\Delta\Delta] + n\,\omega^2 \text{ ce qui donne la formule (126).}$$

On obtiendra la probabilité que l'erreur de la moyenne soit nulle en faisant $\omega = 0$ dans cette formule (126) et l'on retrouve l'expression (125) ou $\frac{h^n}{\pi^{\frac{n}{2}}} e^{-h^2[\Delta\Delta]} (d\Delta)^n$.

La formule (126), en se basant sur ce que $a^m \times a^n = a^{m+n}$ peut se mettre sans la forme

$$\left[\frac{h^n}{\pi^{\frac{n}{2}}} e^{-h^2[\Delta\Delta]} (d\Delta)^n\right] \times e^{-h^2 n \omega^2}$$

Et l'on peut dire que la probabilité relative d'une erreur $\omega$ sur la moyenne est proportionnelle à $e^{-h^2 n \omega^2}$ ou $e^{-(h^2 n)\omega^2}$. Par suite, on peut admettre que la probabilité de l'erreur $\omega$ possède un coefficient de précision égal à $\sqrt{h^2 n}$ ou $h\sqrt{n}$. Soit H ce dernier coefficient et h étant la mesure de précision d'une observation, on aura $H = h\sqrt{n}$. Et comme, art. 66, on a les relations $h\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $hr = \lambda$, on voit que si l'on calcule l'erreur probable que nous désignerons par R, et l'erreur moyenne de la moyenne, erreur que nous représenterons par E, nous aurons

$$HE = \frac{1}{\sqrt{2}}\,;\ HR = \lambda\,;$$

donc, on tire de ces relations

$$H = h\sqrt{n} \text{ et } E = \frac{1}{\sqrt{2}\,H},\ \text{d'où } E = \frac{1}{\sqrt{2}\,h\sqrt{n}}.$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}\,h} \text{ d'où } E = \frac{1}{\sqrt{2}\,h} \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \varepsilon \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

De même $\frac{\lambda}{h} = r$ ; $R = \frac{\lambda}{H} = \frac{\lambda}{h\sqrt{n}} = \frac{\lambda}{h} \times \frac{1}{\sqrt{n}} = r \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{r}{\sqrt{n}}$ ;

d'où $R \times R$ ou $R^2 = \frac{r}{\sqrt{n}} \times \frac{r}{\sqrt{n}} = \frac{r^2}{n}$.

*On conclut de là que l'erreur moyenne E et l'erreur probable R de la moyenne sont inversement proportionnelles à la racine carrée $\sqrt{n}$ du nombre n des observations.*

68. — On appelle **poids** *des observations la valeur exprimée par le carré de la mesure de précision.*

Pour se faire une idée de cette définition, supposons que nous ayons deux systèmes de mesure de précision h et h'. La probabilité, dans le système h, de commettre n fois une erreur z est proportionnelle à $e^{-h^2 n z^2}$, (voir article précédent); et la probabilité de commettre une fois cette erreur z dans le système h' est proportionnelle à $e^{-h'^2 z^2}$.

Pour que les deux probabilités soient égales on doit avoir $h'^2 = nh^2$ ; d'où, $h' = h\sqrt{n}$. Par conséquent on peut dire que : lorsque dans une série indéfinie d'observations nous faisons n fois l'erreur z tandis que dans une autre série on ne commet qu'une fois l'erreur z, les deux séries donneront quand même naissance à la même valeur de la grandeur à mesurer ; c'est-à-dire que le résultat que l'on obtiendra sera le même dans les deux cas. En d'autres termes, une seule observation de la série h' équivaut à n observations de la série h. Donc, enfin, on peut dire que *le poids de ces deux séries d'observations est proportionnel au nombre d'observations qu'il faut, dans chacune d'elles, pour obtenir la même précision dans le résultat*, ce qu'on exprime en posant $\frac{h'^2}{h^2} = \frac{n}{1}$, expression qui se tire de la formule ci-dessus.

On voit que la condition ci-dessus est remplie si l'on convient que le poids de la moyenne est égal au nombre d'observations faites, car on a, art. précédent :

$$H = h\sqrt{n} \text{ ou } H^2 = h^2 n \text{ ; d'où}$$

P (moy.) ou poids moyen ou $H^2 = P$ (unité) ou poids

unitaire $h^2 \times n = 1 \times n = n$. (127).

Cette conséquence est encore vérifiée immédiatement par l'idée que l'on se fait du *poids* et de la *moyenne*.

Supposons que l'on ait à combiner 2 séries d'observations de la grandeur à mesurer ; et que la première série nous a donné des valeurs $a_1\ a_2 \ldots a_n$ et la dernière les valeur $b_1\ b_2 \ldots b_m$. Nous avons pour la moyenne arithmétique, art. 67 :

$$A = \frac{\Sigma a}{n} \text{ ou } \frac{1}{n} \Sigma_{i=1}^{i=n} a_i \text{ pour la première série}$$

et $$B = \frac{\Sigma b}{m} \text{ ou } \frac{1}{m} \Sigma_{i=1}^{i=m} b_i \text{ pour la seconde série.}$$

Les deux observateurs qui ont fait ces 2 séries d'observations, donnent A et B, mais par les suites $a_1\ a_2 \ldots a_n$ et $b_1\ b_{11} \ldots b_m$. Il s'agit de combiner ces 2 séries pour n'en faire qu'une seule. Pour cela, on prend comme résultat de la moyenne aritmétique combinée

$$\frac{nA + mB}{m+n}. \quad (128),$$

puisque cette expression revient à

$$\left(n\frac{\Sigma a}{n} + m\frac{\Sigma b}{m}\right) : m+n \text{ ou } \frac{\Sigma a + \Sigma b}{m+n}.$$

69. — *Application. — Etant donnée une grandeur X obtenue eumultipliant par $\alpha$ une grandeur $x$, chercher quelle est l'erreur moyenne et l'erreur probable de X, lorsqu'on connaît l'erreur moyenne et l'erreur probable de x.*

Soint E et R l'erreur moyenne et l'erreur probable de X; et $\varepsilon$ et r l'erreur moyenne et l'erreur probable de x. On a évidemment, puisque $X - \alpha x$, pour les erreurs demandées :

$$E = \alpha\,\varepsilon \text{ et } R = \alpha\,r.$$

Supposons maintenant que l'on ait $X = \alpha\,x + \alpha'\,x'$.

Soient $\varepsilon$, $\varepsilon'$ et r, r' les erreurs moyennes et probables des déterminations x, x'. Il s'agit de calculer l'erreur probable et l'errenr moyenne de la détermination X.

D'après ce que nous venons de voir, l'erreur probable de $\alpha\,x$ est $\alpha\,r$ ; l'erreur probable de $\alpha'\,x'$ est $\alpha'\,r'$. D'après

cela, au lieu du problème proposé, nous pouvons donc prendre celui-ci : *Soit la relation analytique $X = x + x'$. Soient $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $r$, $r'$ les erreurs moyennes et probables de $x$ et de $x'$. Il s'agit de trouver les erreurs $E$ et $R$, moyenne et probable de $X$.*

Supposons que les vraies valeurs de x et de x' soient a et a'. La véritable valeur de X sera donc $A = a + a'$.

Soient $x_1\, x_2 \ldots x_n$ les déterminations de x qui ont conduit à la valeur a ; et soient $x'_1\, x'_2 \ldots x'_m$ celles de x' qui ont conduit à la valeur a'. Si l'on combine 2 valeurs $x_i$ et $x'_K$ respectivement de la 1re et de la 2me séries, il est évident que l'on a une détermination

$$X_{iK} = x_i + x'_K \text{ de } X\,;$$

ou X formé de $x_i$ et de $x'_K$ que nous représentons par $X_{iK}$ On comprend que nous avons en tout m.n (que nous représenterons par N) déterminations semblables.

Les valeurs de a et de a' satisfont aux conditions

$\Sigma_{i=1}^{i=n} (a - x_i) = 0$ ou somme de $a - x_1$ ; $a - x_2$ ;... $a - x_n$ ou somme des erreurs égale zéro, art. 61.

$\Sigma_{K=1}^{K=m} (a' - x'_K) = 0$, où K varie de 1 à m.

Or, $A = a + a'$ et $X_{iK} = x_i + x'_K$

d'où l'erreur de $A - X_{iK} = (a + a') - (x_i + x'_K) = (a - x_i) + (a' - x'_K)$.

Et en prenant le carré de cette erreur, on aura :

$$\overline{A - X_{iK}}^2 = (a - x_i)^2 + (a' - x'_K)^2 + 2\,(a - x_i)\,(a' - x'_K).$$

Si nous donnons à i une valeur déterminée et si nous faisons varier K depuis 1 jusque m, nous aurons les m égalités ci-après :

$$\overline{A - X_{i_1}}^2 = (a - x_i)^2 + (a' - x'_1)^2 + 2(a - x_i)\,(a' - x'_1)$$

$$\overline{A - X_{i_2}}^2 = (a - x_i)^2 + (a' - x'_2)^2 + 2(a - x_i)\,(a' - x'_2)$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\overline{A - X_{im}}^2 = (a - x_i)^2 + (a' - x'_m)^2 + 2\,(a - x_i)\,(a' - x'_m).$$

Si dans chacune de ces m expressions, nous faisons varier i depuis 1 jusque n, nous obtenons une nouvelle suite d'expressions analogues dont le total est $m \times n = N$. Nous

aurons, en représentant par le double signe $\Sigma$ la somme de toutes ces expressions :

$$\Sigma \overline{A - X_{iK}}^2 = \Sigma\,\Sigma\,(a - x_i)^2 + \Sigma\,\Sigma\,(a' - x'_K)^2 \quad (129);$$

car les doubles produits $2\,(a - x_1)\,(a' - x'_1)$ etc., se détruisent en vertu de $\Sigma\,(a - x_i) = 0$ et $\Sigma\,(a' - x'_K) = 0$ ; expressions ci-dessus où i et K varient respectivement de 1 à n et de 1 à m.

En divisant les 2 membres de l'égalité (129) par mn ou N, nous aurons :

$$\Sigma \frac{\overline{A - X_{iK}}^2}{m\,n \text{ ou } N} = \Sigma\,\Sigma \frac{\overline{a - x_i}^2}{m\,n} + \Sigma\,\Sigma \frac{\overline{a' - x'_K}^2}{m\,n}. \quad (130).$$

Remarquons que dans le premier terme du second membre de cette dernière égalité, nous avons l'expression $\overline{a - x_i}^2$ qui est sensée figurer m fois avec chacune des valeurs déterminées de i. De même, dans le second terme, $a' - x'_K$ figure n fois avec chacune des valeurs déterminées de K. On peut donc admettre que sous le double signe $\Sigma$, le numérateur contient m en facteur dans le premier terme et n dans le second. Donc, en supprimant m et n, communs au numérateur et au dénominateur respectivement dans chacun de ces 2 termes, et alors en supprimant par suite le double du signe $\Sigma$, il vient

$$\Sigma \frac{\overline{A - X_{iK}}^2}{N} = \Sigma \frac{\overline{a - x_i}^2}{n} + \Sigma \frac{\overline{a' - x'_K}^2}{m}$$

Remarquons que le signe $\Sigma$ peut embrasser à la fois les 2 termes de chaque fraction, ou le numérateur seulement, c'est la même chose, on divise un tout en divisant chacune des parties.

Par définition, on a, (voir ci-dessus) $\overline{A - X_{iK}}^2$ = carré des erreurs et $\Sigma \overline{A - X_{iK}}^2$ = la somme des carrés des erreurs et en divisant cette somme par N on obtient le carré de l'erreur moyenne ou $E^2$. De même pour $\varepsilon^2$ et $\varepsilon'^2$.

Donc $E^2 = \frac{\Sigma \overline{A - X_{iK}}^2}{N}$ ; $\varepsilon^2 = \Sigma \frac{\overline{a - x_i}^2}{n}$ et $\varepsilon'^2 = \Sigma \frac{\overline{a' - x'_K}^2}{m}$.

Donc $E^2 = \varepsilon^2 + \varepsilon'^2$ et $E = \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon'^2}$. (131).

Et, art, 66, comme l'erreur probable égale l'erreur moyenne multipliée par $\sqrt{2}\,\lambda$, il vient

$$R = \sqrt{2}\,\lambda\, E \;;\; r = \sqrt{2}\,\lambda\,\varepsilon \text{ et } r' = \sqrt{2}\,\lambda\,\varepsilon' \;;$$

d'où $R^2 = 2\,\lambda^2\, E^2 = 2\,\lambda^2\,(\varepsilon^2 + \varepsilon'^2)$ ; $r^2 = 2\,\lambda^2\,\varepsilon^2$ et $r'^2 = 2\,\lambda^2\,\varepsilon'^2$ ; donc $r^2 + r'^2 = 2\,\lambda^2\,(\varepsilon^2 + \varepsilon'^2) = R^2$ et par suite $R = \sqrt{r^2 + r'^2}$. (132).

*Concluons donc enfin des expressions (131) et (132) que l'erreur moyenne et l'erreur probable de X sont respectivement égale à la racine carrée de la somme des carrés des erreurs moyennes et probables des quantités $x$ et $x'$.*

*Corollaire I.* — Si, an lieu du problème ci-dessus, dans laquel nous avons supposé $X = x + x'$, nous envisageons le problème proposé tout d'abord dans lequel $X = \alpha\, x + \alpha'\, x'$, nous aurons, d'après ce que nous avons vu ci-dessus :

$$E = \sqrt{\alpha^2\,\varepsilon^2 + \alpha'^2\,\varepsilon'^2}. \qquad (133).$$

et

$$R = \sqrt{\alpha^2\, r^2 + \alpha'^2\, r'^2}. \qquad (134).$$

*Corollaire II.* — On peut étendre évidemment les formules ci-dessus pour 2 variables à un nombre quelconque de variables. Soit

$$X = a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \ldots + a_m\, x_m \quad (135)$$

expression dans laquelle $a_1\, a_2 \ldots a_m$ sont des coefficients déterminés et $x_1\, x_2 \ldots x_m$ des valeurs susceptibles d'erreurs.

Soient $\varepsilon_i$ et $r_i$ les erreurs moyenne et probable de $x_i$.

Nous aurons, d'après ce qui précède, puisqu'il n'y a qu'une seule quantité $x_i$ :

$$R = \sqrt{\Sigma\,(a_i\, r_i)^2} \text{ où i varie de 1 à m.} \quad (136).$$

$$E = \sqrt{\Sigma\,(a_i\,\varepsilon_i)^2} \quad \text{id.} \qquad \text{id.} \quad (137).$$

En effet, nous pouvons tirer, de la formule (135), $a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \ldots + a_{m-1}\, x_{m-1}$ que nous représenterons par $b\, y = X - a_m\, x_m$ d'où

$$X = b\, y + a_m\, x_m.$$

Soit S l'erreur probable de y et r celle de x, nous aurons formule (134) :

$$R = \sqrt{b^2 S^2 + \overline{a_m r_m}^2} . \quad (138).$$

Cette formule nous montre qne si le théorême est vrai pour m—1 variables, il l'est également pour m variables.

Or, nous venons de voir qu'il est vrai pour 2 variables, donc il l'est de même pour 3 variables, et ainsi de suite.

*Corollaire III.* — Nous pouvons également arriver à une formule (n° 141 ci-après) qui permette de calculer l'erreur probable R d'une fonction quelconque. En effet, soit la fonction

$$X = f(x_1\ x_2 \dots x_m). \quad (139).$$

Prenons la variation de cette fonction [voir la 2e partie, art. 9, variations, p. 59, formule (25)] ; nous aurons :

$$\delta f \text{ ou } \delta X = \frac{\delta f}{\delta x_1} \delta x_1 + \frac{\delta f}{\delta x_2} \delta x_2 + \dots + \frac{\delta f}{\delta x_m} \delta x_m. \ (140).$$

Si nous attribuons dans les coefficients $\frac{\delta f}{\delta x_1}, \frac{\delta f}{\delta x_2} \dots \frac{\delta f}{\delta x_m}$ aux valeurs $x_1\ x_2 \dots x_m$ les valeurs probables déterminées, il en résultera que l'erreur à commettre sur la variation $\delta X$ sera exprimée en fonction linéaire (ou du 1er degré) des erreurs à commettre sur les variations $\delta x_1$ ; $\delta x_2$ ;... $\delta x_m$. Si nous désignons par $x_1\ x_2 \dots x_m$ un ensemble de valeurs déterminées par l'observation et susceptibles d'erreurs probables $r_1\ r_2 \dots r_m$ et que de ces valeurs considérées comme données on déduit une valeur X qui leur est liée par la relation

$$X = f(x_1\ x_2 \dots x_m)$$

ou X=fonction de $x_1\ x_2 \dots x_m$, on aura enfin en vertu de ce qui précède et en désignant par R l'erreur probable

$$R = \sqrt{\left(\frac{\delta f}{\delta x_1} r_1\right)^2 + \left(\frac{\delta f}{\delta x_2} r_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\delta f}{\delta x_m} r_m\right)^2} . \ (141).$$

70. — *Méthode des moindres carrés.* — Lorsqu'on doit déterminer des inconnues x, y, z, u,..., appartenant à un même système d'équations, il est toujours permis de supposer que ces inconnues sont liées à des

quantités connues a, b, c, d,... par des relations transcendantes, de telle façon, par exemple, que l'on ait :

$$F\ (x\ y\ z\ u \ldots a\ b\ c\ d \ldots) = 0.$$

Considérons, par exemple, 4 inconnues et 4 connues données a b c d ; nous pouvons admettre que la fonction ci-dessus traduit une observation. Et s'il existe un nombre m d'observations supérieur à celui des inconnues, les équations auxquelles nous devrions satisfaire pourraient se mettre sous la forme d'un système d'équations en nombre m supérieur à celui des inconnues, soit, par exemple :

$$F_1\ (x\ y\ z\ u\ \ a\ b\ c\ d) = 0$$
$$F_2\ (x\ y\ z\ u\ \ a\ b\ c\ d) = 0$$
$$F_3\ (x\ y\ z\ u\ \ a\ b\ c\ d) = 0$$
$$F_4\ (x\ y\ z\ u\ \ a\ b\ c\ d) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$F_m\ (x\ y\ z\ u\ \ a\ b\ c\ d) = 0.$$

La question à résoudre, c'est de calculer les inconnues de façon à satisfaire le mieux possible aux équations ci-dessus proposées.

Parmi ces m équations, choisissons en 4 puisque nous avons 4 inconnues, et supposons que, soit rigoureusement, soit approximativement, nous déterminions les valeurs de ces inconnues x, y, z, u qui satisfont à ces 4 équations.

Représentons par X Y Z U les valeurs de x y z u qui satisfont aux 4 premières équations, que nous représentons, en abrégé, par

$$F_1 = 0\ ;\ F_2 = 0\ ;\ F_3 = 0\ ;\ F_4 = 0.$$

Lorsque les observations sont bien faites, ces valeurs X Y Z U substituées dans les autres équations du système ne rendront généralement pas nulles ces fonctions, mais leur donneront des valeurs très petites bien proches de zéro.

Par conséquent, on peut chercher à satisfaire à toutes les équations du système, en posant, par exemple :

$x = X + \xi$ ou x ou lettre ksi du grec ancien
$y = Y + \eta$ ou ê ou lettre êta id.
$z = Z + \zeta$ ou dz ou lettre dzéta id.
$u = U + \upsilon$ ou u ou lettre upsilonn id.

Représentons, en général, par $F_K = 0$ une équation quelconque du système, autre que les 4 éq. satisfaites par x, y, z, u.

En substituant ces inconnues x, y, z, u dans $F_K = 0$,

$F_K$ (x y z u a b c d) deviendra $F_K \lfloor (X+\xi)(Y+\eta)(Z+\zeta)(U+\upsilon)(a\,b\,c\,d) \rfloor$

ou bien, en considérant plusieurs, 4 inconnues, (dans la formule de Taylor, p. 47, 1[re] partie) :

$$F_K \lfloor (X+\xi)(Y+\eta)(Z+\zeta)(U+\upsilon)(a\,b\,c\,d) \rfloor = F_K (XYZU\,abcd) + \xi \frac{d\,F_K}{d\,X} + \eta \frac{d\,F_K}{d\,Y} + \zeta \frac{d\,F_K}{d\,Z} + \upsilon \frac{d\,F_K}{d\,U} + \ldots$$

nous représentons par des points les autres termes $\frac{\xi^2}{1.2} \frac{d^2\,F_K}{d\,X^2} +$ etc.

Si les valeurs $\xi\ \eta\ \zeta$ et $\upsilon$ pouvaient satisfaire à ces équations, il viendrait

$$F_K (X\,Y\,Z\,U\ a\,b\,c\,d) + \xi \frac{d\,F_K}{d\,X} + \eta \frac{d\,F_K}{d\,Y} + \text{etc.} = 0.$$

Dans cette dernière équation, les expressions $F_K$(XYZU a b c d) et $\frac{d\,F_K}{d\,X}$, $\frac{d\,F_K}{d\,Y}$, etc. sont donc trouvées, connues, et les inconnues seraient $\xi\ \eta\ \zeta$ et $\upsilon$.

Or, on sait qu'on peut toujours ramener la résolution d'un système d'équations algébriques ou transcendantes en nombre supérieur aux inconnues, à la résolution d'un même nombre d'équations du 1[er] degré (abaissement du degré d'une équation, voir ci-après à Remarque). On se trouvera alors dans le même cas que précédemment, mais avec cette différence que les équations seront du 1[er] degré ; par conséquent, on sera ramené à résoudre un système de m équations linéaires ou du 1[er] degré à 4 inconnues, que nous représenterons comme suit :

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 u + n_1 = 0$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 u + n_2 = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_m x + b_m y + c_m z + d_m u + n_m = 0.$$

Mais quelles que soient les valeurs numériques substituées à $x\,y\,z\,u$ dans ces équations, les valeurs obtenues pour les premiers membres diffèreront en général de zéro, et si nous représentons ces différences par $\Delta_1$ ; $\Delta_2$ ;... $\Delta_m$, que nous appellerons *résidus*, nous aurons le système :

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 u + n_1 = \Delta_1$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 u + n_2 = \Delta_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_m x + b_m y + c_m z + d_m u + n_m = \Delta_m.$$

Et en déterminant toutes les combinaisons possibles des valeurs $x\,y\,z\,u$, nous pourrons considérer $\Delta_1$ $\Delta_2$ ... $\Delta_n$ comme les *erreurs sur la détermination des valeurs du 1er membre.*

Donc, en représentant par h le coefficient de précision, art. 64, de l'ensemble de ces équations, la probabilité d'avoir un résidu $\Delta$ sera proportionnelle, art. 63, à

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2}.$$

Et la probabilité de la présence simultanée des m résidus $\Delta_1$ $\Delta_2$ ... $\Delta_m$, sera donc proportionnelle, (art. 16), à :

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^m e^{-h^2 (\Delta^2 m)},$$

expression dans laquelle $(\Delta^2 m)$ signifie ici $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_m^2$, et en la représentant par $[\Delta\Delta]$, nous aurons au lieu de l'expression ci-dessus

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^m e^{-h^2 [\Delta\Delta]}.$$

En effet, d'après l'art. 16, il vient

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta_1^2} \times \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta_2^2} \times \ldots \times \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta_m^2}$$

ou $\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^m e^{-h^2 (\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_m^2)}$ ou $\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^m e^{-h^2 (\Delta^2 m)}$ où $\Delta$ va

de $\Delta_1$ à $\Delta_m$. Donc, comme nous l'avons dit à l'art. 65,

$$[\Delta\Delta] = \Sigma_{i=1}^{i=m} \Delta_i^2 .$$

Pour que cette probabilité soit *maximum*, nous devrons donc faire en sorte que $[\Delta\Delta]$ soit *minimum*.

Donc, on devra avoir, art. 59, 1[re] partie, calcul diff.:

$$\frac{d[\Delta\Delta]}{dx} = o ; \frac{d[\Delta\Delta]}{dy} = o ; \frac{d[\Delta\Delta]}{dz} = o \text{ et } \frac{d[\Delta\Delta]}{du} = o.$$

Nous aurons autant d'équations qu'il y a d'inconnues ; et ce sont ces équations, appelées *équations normales*, qui résolues donnent les valeurs les plus probables de x y z u.

Remarquons que les expressions précédentes sont des différentielles partielles ; pour cette raison, on les représente comme il suit :

$$\frac{\vartheta[\Delta\Delta]}{\vartheta x} = o ; \frac{\vartheta[\Delta\Delta]}{\vartheta y} = o ; \frac{\vartheta[\Delta\Delta]}{\vartheta z} = o \text{ et } \frac{\vartheta[\Delta\Delta]}{\vartheta u} = o.$$

(La lettre $\vartheta$ c'est la lettre thêta du grec ancien, écrite comme dans le grec moderne).

*Remarque.* — Comme exemples d'abaissement d'équations, on peut consulter le cours d'analyse inf. de Catalan, Université de Liége, année 1879, pages 242 à 277 inclusivement.

Ci-après une méthode approximative pour résoudre les équations, d'un degré supérieur au quatrième, ainsi que les équations transcendantes. Cette méthode est dit de Newton.

» Soient $f(x) = o$ l'équation à résoudre, et $f'(x)$ et $f''(x)$
» sa première dérivée et sa seconde dérivée par rapport
» à x.

» On remplace, dans l'éq. à résoudre, x par une
» valeur $x_1$ voisine de l'une des racines de cette éq.
» et obtenue par tâtonnement ; on obtient une deuxième
» valeur $x_2$ plus rapprochée de cette racine que la
» précédente en posant :

$$» \quad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} - \frac{[f(x_1)]^2}{2} \cdot \frac{f''(x_1)}{[f'(x_1)]^3} ;$$

» on peut quelquefois se contenter de l'approximation
» donnée par les deux premiers termes. On obtient une
» deuxième valeur corrigée en posant :

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{(f'x_2)} \text{ etc.}$$

» On continue de cette manière jusqu'à ce que la » valeur approchée $x_n$ diffère de la précédente $x_{n-1}$ » d'une quantité telle qu'on puisse la négliger ».

On peut consulter notre recueil sur les principes généraux relatifs à la résolution des éq., art. 20 ; le théorème de Descartes, art. 59 ; la formule de Moivre, art. 65 ; la résolution des éq. du 3e degré, art. 70.



# TABLE DES MATIERES

# ERRATA

p. 9, $2^e$ ligne ainsi.

p. 10, $3^e$ ligne = après précède ; et formule (1) mettre $\Sigma_1^n$

p. 11, avant-dernière ligne $\frac{a}{a+b}$

p. 13, $7^e$ ligne c'est au lieu de cet

p. 15, 17 et 87. Mettre $\pi$ majuscule.

p. 19. Avant-dernière ligne, ajouter après trouver : *pour un certain nombre de termes.*

p. 21, $21^e$ ligne, après précédent, ajouter : en prenant, pour plus de simplicité, la somme des termes de $-K$ à $+K$.

p. 23. Formule précédant extrayant la racine, mettre, au dénominateur $\overline{2n-1}^{1}$ au lieu de $\overline{2n-1}$

p. 29. En divisant, etc, mettre $\frac{[\varphi(n)]^2}{\varphi(2n)}$ au lieu de $[\varphi(n)]^2 \; \varphi(2n)$

p. 33. $1^{re}$ formule. $\frac{\beta}{\alpha} \frac{\alpha}{\beta}$ au lieu de $\beta \; \alpha \; \alpha \; \beta$

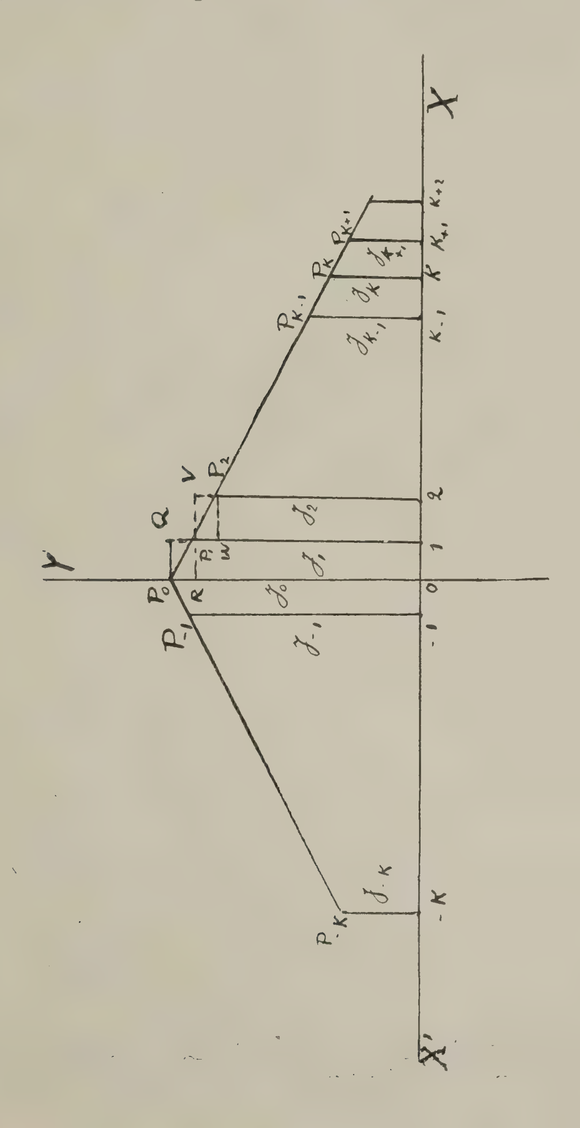
p. 36. Au lieu de $m\beta^{m\beta+K}$ ; $m\alpha^{m\alpha-K}$ ; mettre $(m\beta)^{m\beta+K}$ et $(m\alpha)^{m\alpha-K}$. Et dans la formule (36), après le $1^{er}$ membre = mettre $e^{-(m\beta+K)-(m\alpha-K)}$ au lieu de $e^{-(m\beta+K)-m\alpha-K}$

p. 37. $1^{re}$ formule, mettre au dénominateur $(m\beta)^{m\beta+K}$ et $(m\alpha)^{m\alpha-K}$ au lieu de $m\beta^{m\beta+K}$ et $m\alpha^{m\alpha-K}$.

Après des termes semblables, il vient, mettre : *en tenant compte des formules* (38) *et* (39) *et de ce que* $\alpha+\beta=1$ :

p. 38, formule 40, au dénominateur du $1^{er}$ terme du $2^d$ membre, mettre $\sqrt{2\pi m\alpha\beta}$ au lieu de $\sqrt{2nm\alpha\beta}$

p. 41, fin dernière ligne, mettre m$\alpha$, ou au lieu de onm$\alpha$.
p. 43, dernière ligne, fin, mettre R au lieu de K.
p. 44. — Voir la figure ci contre.



p. 44. 11e ligne, mettre $P_{K-1}$ au lieu de $P_{K}$.
p. 45. 4e ligne. On a ainsi :
p. 45. 26e ligne. déficients au lieu de déféceints
p. 48. 3e ligne. 193 au lieu de 195.
p. 49. Après P = 1,1284... (K— etc.) mettre :
Il conviendrait de trouver l'expression générale de la somme des termes de la série entre parenthèses, (voir nota ci-après).
p. 50, mettre 0.83824... au lieu de 0,8384.
p. 52, id id id 0,83216
p. 54, 12e ligne, mettre le signe = au lieu de — avant 0.
p. 56, 22e ligne, probabilités $p^m$ au lieu de pertes $p^m$
p. 58. Mettre une virgule avant égale à la 3e ligne ; et à la 7e ligne mettre le signe - dans $KC_{m,K}p^{m-K}q^K$
p. 61. 9e ligne, mettre le signe — entre les deux lx.
p. 62. 18e ligne, ajouter *de payer* avant pour la 1re année.
p. 70. 4e et 5e lignes, c'est $P_i = p_i\, l_i$ au lieu de $P_1 = p_1\, l_1$.
p. 71, fin art. 53, mettre : soit $\sum_a^b P_i$.
p. 73, 2° mettre *est* entre probabilité et $\psi$ (x). Et plus bas, mettre 54 au lieu de 52. Puis à la 4e avant-dernière ligne supprimer 11 et.
p. 74, 4e ligne, 94 au lieu de 93.
p. 76, rapprocher —1 dans n—1.
p. 77, 2e expression mettre $n^n$ au lieu de $m^n$.

3e expression, il faut au lieu de $\frac{m^{n+m-1}}{(m+n)^{n+1}} \times 0 = 0$,

$$\frac{m^{m-1}n^n}{(m+n)^{m-1+n}}\,\frac{0}{n} = 0 \text{ ou } 0 = 0.$$

Ajouter : On peut aussi remplacer directement 1—x par sa valeur $\frac{m}{m+n}$ et l'on obtient ainsi :

$$\left(\frac{m}{m+n}\right)^{m-1}\left(\frac{n}{m+n}\right)^{n}\left(m-\frac{\frac{mn}{m+n}}{\frac{n}{n+m}}\right) = \left(\frac{m^{m-1}n^n}{(m+n)^{m-1+n}}\right)$$

$$\left(\frac{mn-mn}{n}\right) = \frac{m^{m-1}n^n}{(m+n)^{m+n-1}}\,\frac{0}{n} = 0 \text{ ou } 0 = 0.$$

p. 78, dernière ligne, supprimer *au numérateur* et mettre : *comme à l'art. 57 pour plus d'uniformité* les limites, etc : $P''' = \int_0^1 \frac{x^m \text{ etc.}}{\int_0^1 x^m \text{ etc.}}$.

p. 79. De même, l'intégrale du numérateur peut embrasser les 2 termes de la fraction.

Formule 106 mettre = au lie de — après P'''.

p. 80, 16ᵉ ligne mettre $\frac{r^2}{p^2}$ au lieu de $\frac{r^2}{q^2}$ dans le développement de $\left(1 + \frac{r}{p}\right)^{pr}$.

p. 81, 1ʳᵉ formule, $\left(1 + \frac{r}{p}\right)^{pr}\left(1 - \frac{r}{q}\right)^{qr}$ = page précédente = $\left(1 + \frac{pr}{1}\frac{r}{p}\right)\left(1 - \frac{qr}{1}\frac{r}{q}\right) = (1 + r^2)(1 - r^2) = 1 - r^4$.

Et 3ᵉ avant-dernière ligne mettre $\sqrt{2\pi q r}$ au lieu de $\sqrt{2\pi} q r$

p. 82, 13ᵉ ligne mettre $\left(\frac{1}{r}\right)^{(p+q)r}$ au lieu de $\left(\frac{1}{r}\right)^{(p+qr}$.

p. 84, 1ʳᵉ ligne $a_2$ au lieu de $a^2$.

8ᵉ ligne savoir au lieu de avoir.

p. 87, 25ᵉ ligne, après p. 16, mettre art. 28 p. 37.

p. 91, dernière formule mettre a à $\int_a^b$

p. 93. Avant-dernière formule, 2ᵉ facteur du 2ᵈ membre $h^2$ au lieu de $h_2$.

p. 94. 3ᵉ ligne, $\Delta_n{}^2$ au lieu de $\Delta_n$.

p. 99. 13ᵉ ligne, $e^{-(h^2 n)\omega^2}$ mettre le signe —.

p. 101, 25ᵉ ligne, $X = \alpha x$ au lieu de $X - \alpha x$.

Dernière ligne $\alpha' r'$ au lieu de $\alpha' 1'$.

p. 102. 8ᵉ ligne, $x_1 x_2 \ldots x_n$ au lieu de $x_1 x_2 \ldots x_i$

*Nota.* — L'intégrale de $e^{-t^2} dt$ que nous donnons pages 47, 48 et 49, n'ayant pu la trouver dans les bouquins que nous avons consultés, tels que Analyse inf. Catalan ; résumé Mansion ; Exercices de calcul inté-

gral par Joseph Graindorge, Université de Liége, etc ; a été cherchée par nous, par la méthode que nous exposons dans la 1re partie.

Nous voyons page 69, de l'Aide-mémoire de l'Ingénieur, par Huguenin, 3e édition, 1895, que

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} .$$

C'est l'intégrale de Poisson que nous mentionnons dans le corps de cet ouvrage, page 91.

---

# ANNEXE PROBABILITÉS

*par Albert CREFCŒUR*

---

A la page 79, $2^{me}$ avant-dernière ligne, après au $2^{o}$ de l'art. 56, remplacer ce qui suit jusqu'à la théorie des erreurs, p. 83, par :

La probabilité x de l'évènement A est donc maximum lorsqu'on aura $x = \frac{m}{m+n}$. Il s'agit de rechercher la probabilité P que la probabilité x de l'évènement A soit comprise entre deux limites $\frac{m}{m+n} + l$ et $\frac{m}{m+n} - l$ voisines de cette valeur extrême. Donc l doit être petit.

Faisons, pour abréger, $\frac{m}{m+n} = p$ ; les limites de x seront $p+l$ et $p-l$.

Posons $x=p+z$, (z pouvant varier de $-l$ à $+l$).

On aura : $1-x=1-p-z=q-z$, car $1-p=q$. On a $dx=dz$, puisque p est une constante.

Pour $x=p+l$, $z=l$ ; et pour $x=p-l$, $z=-l$.

Donc l'inconnue z pourra varier, dans notre hypothèse, de $-l$ à $+l$ ; et l'on aura ainsi pour le numérateur de la formule (107), dans le cas qui nous occupe :

$$X = \int_{-l}^{+l} (p+z)^{pr} (q-z)^{qr}\, dz = \int_{-l}^{+l} p\left(1+\frac{z}{p}\right)^{pr} q\left(1-\frac{z}{q}\right)^{qr} dz =$$

$$= p^{pr} q^{qr} \int_{-l}^{+l} \left(1+\frac{z}{p}\right)^{pr} \left(1-\frac{z}{q}\right)^{qr} dz. \quad (108).$$

Cherchons, par logarithmes népériens, le produit sous l'$\int$.

On sait que $l.\, e^{x} = x\, l.\, e = x$, car $l.\, e = 1$. Par analogie :

$$l.\left(1+\frac{z}{p}\right)^{pr} = pr.\, l.\left(1+\frac{z}{p}\right) = l.\, e^{pr.l\left(1+\frac{z}{p}\right)} \text{ car } l.\, e^{pr\, l.\left(1+\frac{z}{p}\right)} =$$

$$pr.\, l\left(1+\frac{z}{p}\right) l.\, e = pr.\, l\left(1+\frac{z}{p}\right). \text{ Donc } \left(1+\frac{z}{p}\right)^{pr} = e^{pr\, l.\left(1+\frac{z}{p}\right)}$$

puisque ces 2 termes ont même logarithme.

On trouverait de même que

$$\left(1-\frac{z}{q}\right)^{qr}=e^{qr\,l.\left(1-\frac{z}{q}\right)}.$$

Donc : $\left(1+\frac{z}{p}\right)^{pr}\left(1-\frac{z}{q}\right)^{qr}=e^{pr\,l.\left(1+\frac{z}{p}\right)}e^{qr\,l.\left(1-\frac{z}{q}\right)}=$

$$=e^{pr\,l\left(1+\frac{z}{p}\right)+qr\,l\left(1-\frac{z}{q}\right)}=e^{r\left[pl\left(1+\frac{z}{p}\right)+q\,l\left(1-\frac{z}{q}\right)\right]}$$

Or on sait que (p. 151 et 153 Catalan, analyse) :

$l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$, et $-l(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots$

Donc par analogie :

$$l.\left(1+\frac{z}{p}\right)=\frac{z}{p}-\frac{1}{2}\frac{z^2}{p^2}+\frac{1}{3}\frac{z^3}{p^3}-\frac{1}{4}\frac{z^4}{p^4}+\ldots$$

$$\text{et } l.\left(1-\frac{z}{q}\right)=-\frac{z}{q}-\frac{1}{2}\frac{z^2}{q^2}-\frac{1}{3}\frac{z^3}{q^3}-\frac{1}{4}\frac{z^4}{q^4}-\ldots$$

Par suite :

$$\left(1+\frac{z}{p}\right)^{pr}\left(1-\frac{z}{q}\right)^{qr}=e^{r\left[p\left(\frac{z}{p}-\frac{1}{2}\frac{z^2}{p^2}+\frac{1}{3}\frac{z^3}{p^3}-\ldots\right)+q\left(-\frac{z}{q}-\frac{1}{2}\frac{z^2}{q^2}-\frac{1}{3}\frac{z^3}{q^3}-\ldots\right)\right]}=e^{r\left[z-\frac{1}{2}\frac{z^2}{p}+\frac{1}{3}\frac{z^3}{p^2}-\ldots-z-\frac{1}{2}\frac{z^2}{q}-\frac{1}{3}\frac{z^3}{q^2}-\ldots\right]}$$

Remarquons que z est petit, donc à plus forte raison $\frac{z}{p}$ et $\frac{z}{q}$ et à fortiori les puissances $\frac{z^2}{p}$, etc..

On négligera donc les puissances de $\frac{z}{p}$, etc., en ne conservant que les termes de l'ordre $\frac{z^2}{p}$ et $\frac{z^2}{q}$.

Il viendra donc ainsi en observant que $z-z=0$ :

$$\left(1+\frac{z}{p}\right)^{pr}\left(1-\frac{z}{q}\right)^{qr}=e^{r\left[-\frac{1}{2p}z^2-\frac{1}{2q}z^2\right]}=e^{r\left[z^2\left(-\frac{1}{2p}-\frac{1}{2q}\right)\right]}$$

$$=e^{r\left[z^2\left(\frac{-q-p}{2pq}\right)\right]}$$

Mais de $p+q=1$, on tire $-p-q=-1$ ; d'où

$$\left(1+\frac{z}{p}\right)^{pr}\left(1-\frac{z}{q}\right)^{qr}=e^{r\left[z^2\left(\frac{-1}{2pq}\right)\right]}=e^{-\frac{rz^2}{2pq}}$$

Par suite X devient :

$$X = p^{pr} q^{qr} \int_{-1}^{+1} e^{\frac{-rz^2}{2pq}} dz.$$

Et comme l'aire de o à 1 égale celle de o à — 1, il vient (voir errata p. 47.)

$$X = 2\, p^{pr}\, q^{qr} \int_{o}^{1} e^{\frac{-rz^2}{2pq}} dz.$$

Posons $\frac{rz^2}{2pq} = t^2$ d'où $z^2 = \frac{2\,p\,q\,t^2}{r}$ et $z = t\sqrt{\frac{2pq}{r}}$ ;

$t = \frac{z}{\sqrt{\frac{2pq}{r}}} = z\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2pq}} = z\sqrt{\frac{r}{2pq}}$. On aura $dz = \sqrt{\frac{2pq}{r}}$ $dt$ et $dt = dz\sqrt{\frac{r}{2pq}}$.

En substituant dans la valeur de X, il vient :

$$X = 2\, p^{pr}\, q^{qr} \int_{o}^{1} e^{-t^2} \sqrt{\frac{2pq}{r}}\, dt.$$

Mais $dt = \sqrt{\frac{r}{2pq}}\, dz$, donc, comme à l'errata de la page 47, nous devrons multiplier 1 par $\sqrt{\frac{r}{2pq}}$, et en posant $\Theta = 1\sqrt{\frac{r}{2pq}}$ nous aurons :

$$X = 2\, p^{pr}\, q^{qr} \sqrt{\frac{2pq}{r}} \int_{o}^{\Theta} e^{-t^2}\, dt.$$

En substituant dans l'expression de P, formule (107), il vient :

$$P = \frac{2\, p^{pr}\, q^{qr} \sqrt{\frac{2pq}{r}} \int_{o}^{\Theta} e^{-t^2}\, dt}{\int_{o}^{1} x^m\, dx\, (1-x)^n}.$$

Et en remplaçant le dénominateur par la valeur donnée par la formule (99), il vient :

$$P = \frac{2\, p^{pr}\, q^{qr} \sqrt{\frac{2pq}{r}} \int_{o}^{\Theta} e^{-t^2}\, dt}{\frac{n\,!\,m\,!}{(m+n+1)\,!}}$$

Et comme $m+n=r$, on aura :

$$P = \frac{2\,p^{pr}\,q^{qr}\,\sqrt{2\,p\,q}\,\sqrt{\frac{1}{r}}\int_0^{\Theta} e^{-t^2}\,dt}{\frac{n\,!\,m\,!}{(r+1)\,!} \text{ ou } \frac{n\,!\,m\,!}{(r+1)\,r\,!}}$$

$$= \frac{2\,p^{pr}\,q^{qr}\,\sqrt{2\,p\,q}\,(r+1)\,r\,!\int_0^{\Theta} e^{-t^2}\,dt}{n\,!\,m\,!\,\sqrt{r}}.$$

Or, la formule de Stirling, art. 26, donne :

$$r\,! = \sqrt{2\,\pi\,r}\,r^{r}\,e^{-r}$$

car on peut négliger $(1+\varepsilon r)$ puisque $\varepsilon\,r$ tend vers zéro.

Et comme $n=q\,r$ et $m=p\,r$, il vient $n\,! = \overline{q\,r}\,!$ et $m\,! = \overline{p\,r}\,!$ d'où

$\overline{q\,r}\,! = \sqrt{2\,\pi\,q\,r}\;\;qr^{qr}\;e^{-qr}$

$\overline{p\,r}\,! = \sqrt{2\,\pi\,pr}\;pr^{pr}\;e^{-pr}$

En substituant, on obtient :

$$P = \frac{2\,p^{pr}\,q^{qr}\,\sqrt{2\,p\,q}\,(r+1)\,\sqrt{2\,\pi\,r}\,r^{r}\,e^{-r}}{\sqrt{2\pi\,q\,r}\;qr^{qr}\;e^{-qr}\;\sqrt{2\pi\,pr}\;pr^{pr}\;e^{-pr}\,\sqrt{r}}\int_0^{\Theta} e^{-t^2}\,dt =$$

$$= \frac{2\,p^{pr}\,q^{qr}\,\sqrt{2\,p\,q}\,(r+1)\,\sqrt{2\,\pi\,r}\,r^{r}\,e^{-r}}{\sqrt{2\pi r}\,\sqrt{q}\,q^{qr}\,r^{qr}\,e^{-qr}\;\sqrt{2\,\pi\,r}\,\sqrt{p}\,p^{pr}\,r^{pr}\,e^{-pr}\;\sqrt{r}}\int_0^{\Theta} e^{-t^2}\,dt =$$

$$= \frac{2\,\sqrt{2\,pq}\,(r+1)\,r^{r}\,e^{-r}}{\sqrt{q}\;r^{qr}\,e^{-qr}\,\sqrt{2\pi r}\,\sqrt{p}\;r^{pr}\,e^{-pr}\,\sqrt{r}}\int_0^{\Theta} e^{-t^2}\,dt.$$

Mais $\sqrt{q}\,\sqrt{p} = \sqrt{pq}$; $r^{qr}\,r^{pr} = r^{qr+pr} = r^{(q+p)r} = r^{r}$ car $p+q=1$; $e^{-qr}\,e^{-pr} = e^{-qr-pr} = e^{-(q+p)r} = e^{-r}$ ; $\sqrt{2\pi r} = \sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\,\sqrt{r}$ ; d'où il vient : $P = \dfrac{2\sqrt{2}\,(r+1)}{\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\,\sqrt{r}\,\sqrt{r}}$ ou $\dfrac{2(r+1)}{\sqrt{\pi}\;r}\displaystyle\int_0^{\Theta} e^{-t^2}\,dt.$

Si r est assez grand, $\dfrac{r+1}{r}$ tend rapidement vers l'unité, de sorte que l'expression de P tend vers :

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\Theta} e^{-t^2}\,dt.$$

Comme nous avons vu, p. 49, où thêta est remplacé par T, cette valeur tend rapidement vers l'unité, et l'on peut dire :

*Il y a une probabilité* P *aussi voisine qu'on le veut de l'unité, que si deux évènements* A *et* B *contradictoires se sont produits* m *et* n *fois, la probabilité* x *de l'arrivée de l'évènement* A *est comprise entre les limites* $\frac{m}{m+n} - l$ *et* $\frac{m}{m+n} + l$, l *pouvant être aussi petit qu'on le veut.*

Nous avons vu, page 91, que l'intégrale de Poisson donne :

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Donc, en faisant dans la formule qui précède $\Theta = \infty$, il vient

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1.$$

Alors, la probabilité égalant l'unité, on aura la certitude.

---

Remarquons, à la page 84, que $\alpha_1$ ; $\alpha_2$ ; etc. sont égaux à l'augmentation $\alpha$.

---

A la page 92, il faut changer les limites en même temps que la variable, c'est-à-dire, au lieu de $\int_0^a$ et $\int_0^{a'}$ il faut $\int_0^{ah}$ et $\int_0^{a'h'}$.

---

Page 22, après la ligne 26, au lieu des formules (10) et (11), après il viendra : mettre :

$$\frac{1.\,2.\,3\ldots n}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = \varphi(n) = 1 + \varepsilon n. \quad (10),$$

avec limite $\varepsilon n = 0$.

Considérons d'abord, etc.

---

Page 17, ligne 7, il faut $P_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{1}{3}$ au lieu de $\left(\frac{2}{6}\right)^3 \frac{1}{3}$.

# SUITE ERRATA PROBABILITES

*Page 27.* — 8[e] ligne, après indéfini, ajouter : mais de plus en plus petits.

*Page 30.* — Après soit $T_{p+1}$ ce terme, ajouter : Voir formule (41), p. 38 ; et errata, suite à p. 43, la démonstration du maximum de ce terme.

*Page 38.* — 3[e] ligne, après art. 24 et 30, ajouter : et errata.

*Page 43.* — 10[e] ligne, après terme $T_{p+1}$ ajouter : lequel est le terme que nous avons admis comme terme maximum. En effet, la formule (47), en y faisant K=0, donne la valeur du terme maximum $P = T_{p+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi m\alpha\beta}}$ conformément à la formule (41) page 38. Pour constater ce maximum, remarquons que d'après l'art. 59, 1[re] p[tie], les conditions, pour qu'une fonction y de x ou f(x) soit maximum, consistent en ce que $\frac{dy}{dx}$ soit nul et que $\frac{d^2y}{dx^2}$ soit négatif. Or, dans $y = e^{-1/2 \frac{K^2}{m\alpha\beta}}$, nous chercherons d'abord la valeur de $\frac{dy}{dK}$. Pour cela, remarquons, formule (36) page 36, 1[re] p[tie], que $d.\,a^{x'} = ax\,dx'\,La$. Et en faisant a=e, base du syst. de log. nép., il vient $d.e^{x'} = e^{x'}\,dx'$, car, dans ce système, Le=1. Par suite, en posant $x' = \frac{-K^2}{2m\alpha\beta}$ il vient

$$dy \text{ ou } d.\,e^{x'} \text{ ou } d.\,e^{-\frac{K^2}{2m\alpha\beta}} = e^{-\frac{K^2}{2m\alpha\beta}}\,d\left(-\frac{K^2}{2m\alpha\beta}\right) =$$

$$= e^{-\frac{K^2}{2m\alpha\beta}}\left(-\frac{1}{2m\alpha\beta}\right) dK^2 = e^{-\frac{K^2}{2m\alpha\beta}}\left(-\frac{1}{2m\alpha\beta}\right) 2K\,dK =$$

$$= -\frac{1}{2m\alpha\beta}\, e^{-\frac{K^2}{2m\alpha\beta}}\, 2K\,dK.$$

Et $\frac{dy}{dK} = -\frac{1}{2m\alpha\beta}\, e^{-\frac{K^2}{2m\alpha\beta}}\, 2K$. Or si $K=0$, il vient $\frac{dy}{dK} = -\frac{1}{2m\alpha\beta}\, e^{-0} \times 0 = 0.$

Ensuite $\frac{d^2y}{dK^2} = d\left(-\frac{1}{2m\alpha\beta}\, e^{-\frac{K^2}{2m\alpha\beta}}\, 2K\right) : dK.$

Or, $d\left(-\frac{1}{2m\alpha\beta}\, 2K\, e^{-\frac{K^2}{2m\alpha\beta}}\right) = -\frac{1}{2m\alpha\beta}\, d\left(2K\, e^{-\frac{K^2}{2m\alpha\beta}}\right).$

Et, (art. 9, p. 15, 1[re] p[tie]), si l'on fait $2K = z$ et $e^{-\frac{K^2}{2m\alpha\beta}} = y$, il vient, puisqu'alors $d.z.y. = z\,dy + y\,dz$, en remplaçant $z$ et $y$ par leurs valeurs, (on a ci-dessus la valeur de $dy$) :

$$d\left(2K.\, e^{-\frac{K^2}{2m\alpha\beta}}\right) = 2K\left(-\frac{1}{2m\alpha\beta}\, e^{-\frac{K^2}{2m\alpha\beta}}\, 2K\,dK\right) +$$

$$+ e^{-\frac{K^2}{2m\alpha\beta}}\, 2\,dK = -\frac{1}{2m\alpha\beta}\, e^{-\frac{K^2}{2m\alpha\beta}}\, 4K^2\,dK +$$

$$+ 2e^{-\frac{K^2}{2m\alpha\beta}}\, dK = \left(-\frac{1}{2m\alpha\beta}\, 4K^2 + 2\right) e^{-\frac{K^2}{2m\alpha\beta}}\, dK =$$

$$= \left(-\frac{2K^2}{m\alpha\beta} + 2\right) e^{-\frac{K^2}{2m\alpha\beta}}\, dk = \frac{-2K^2 + 2m\alpha\beta}{m\alpha\beta}\, e^{-\frac{K^2}{2m\alpha\beta}}\, dk.$$

$$\text{Et } -\frac{1}{2m\alpha\beta}\, d\left(2K.\, e^{-\frac{K^2}{2m\alpha\beta}}\right) = -\frac{1}{2m\alpha\beta}\left(\frac{-2K^2 + 2m\alpha\beta}{m\alpha\beta}\, e^{-\frac{K^2}{2m\alpha\beta}}\, dk\right).$$

Donc $\frac{d^2 y}{dk^2} = -\frac{1}{2m\alpha\beta}\,2\left(\frac{-K^2 + m\alpha\beta}{m\alpha\beta}\,e^{-\frac{K^2}{2m\alpha\beta}}\right)$.

Enfin, pour K=o, il vient

$$\frac{d^2 y}{dk^2} = -\frac{1}{2m\alpha\beta}\,2\left(\frac{m\alpha\beta}{m\alpha\beta}\,e^{-o}\right) = -\frac{1}{2m\alpha\beta}\,2\left(1 \times \frac{1}{e^{o}}\right) =$$

$= -\frac{1}{2m\alpha\beta}\,\frac{2}{e^{o}} = -\frac{1}{2m\alpha\beta}\,\frac{2}{1} = -\frac{1}{m\alpha\beta}$. Et comme m, $\alpha$ et $\beta$ sont positifs, cette expression est négative, ce qu'il fallait démontrer

Nous pouvons donc dire que l'expression $e^{-\frac{K^2}{2m\alpha\beta}}$ est maximum pour K=o ; alors il vient $e^{-o} = \frac{1}{e^{o}} = \frac{1}{1} = 1$ et la formule 47 donne

$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi m\alpha\beta}} \times 1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi m\alpha\beta}}$ conformément à ce que nous montre la formule (41).

Remarquons aussi que les termes également distants, etc.

*Page 47.* — Modifier comme il suit :

Remarquons que nous avons $x = \sqrt{2m\alpha\beta}\,t$ d'où $t = \frac{x}{\sqrt{2m\alpha\beta}}$, donc t est la $\frac{1}{\sqrt{2m\alpha\beta}}$ e partie de x.

Par suite, si nous substituons la nouvelle variable t dans l'intégrale, il faut, en adoptant cette variable t, réduire les limites d'intégration de $\frac{1}{\sqrt{2m\alpha\beta}}$, car ces limites sont les valeurs qui doivent être substituées à la variable dans l'intégration, elles doivent donc diminuer aussi proportionnellement à la variable. Donc si cette variable devient $\frac{1}{\sqrt{2m\alpha\beta}}$ fois plus petite, les valeurs limites d'intég. doivent être rendues le même nombre de fois plus petite ; c'est comme si l'on ramenait le tout à une échelle $\frac{1}{\sqrt{2m\alpha\beta}}$ fois plus petite

Nous aurons donc

$$\int_{-K}^{K} e^{-\frac{x^2}{2m\alpha\beta}} dx = \int_{-\frac{K}{\sqrt{2m\alpha\beta}}}^{\frac{K}{\sqrt{2m\alpha\beta}}} e^{-t^2} dt \sqrt{2m\alpha\beta} =$$

$= \sqrt{2m\alpha\beta} \int_{-T}^{T} e^{-t^2} dt$ en représentant $\frac{K}{\sqrt{2m\alpha\beta}}$ par T.

La formule (52) devient

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi m\alpha\beta}} \left[ \sqrt{2m\alpha\beta} \int_{-T}^{T} e^{-t^2} dt + y_K \right].$$

Or, lorsque m est très-grand, $y_K$ est très-petit, et, à plus forte raison $\frac{y_K}{\sqrt{2\pi m\alpha\beta}}$ ; cette dernière expression pourra donc être négligée dans cette somme.

En effet, nous savons, page 43, que $y_0$ correspond au terme maximum $T_{\mu+1}$ et que $y_K$ répond à un terme de plus en plus petit à même que K augmente (voir figure laquelle est un schéma de la courbe des probabilités représentée par quelques coordonnées).

L'expression ci-dessus de P devient donc :

$$P = \frac{\sqrt{2m\alpha\beta}}{\sqrt{2\pi m\alpha\beta}} \int_{-T}^{T} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-T}^{T} e^{-t^2} dt. \quad (53).$$

Et comme l'aire de o à T est égale à celle de o à $-T$, il suffit de prendre l'intégrale de o à T, en multipliant par 2, et l'on a enfin

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{T} e^{-t^2} dt. \quad (53^{bis}).$$

Soit à trouver par la méthode des séries $\int e^{-t^2} dt$. etc.

*Page 49.* — A partir de la 13e ligne, modifier comme il suit :

Or, on a $$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{T} e^{-t^2} dt$$

et, comme (art. 69 du calcul intégral 1re partie) pour prendre l'intégr. de o à T, il suffit de remplacer t par T dans l'intégr. il vient

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(T - \frac{T^3}{3} + \frac{T^5}{10} - \frac{T^7}{42} + \ldots\right).$$

Mais $\sqrt{\pi} = 1,77\,245\,385\ldots$ et $\frac{2}{\sqrt{\pi}} = 1,12\,84\ldots$ donc

$$P = 1,12\,84\ldots\left(T - \frac{T^3}{3} + \frac{T^5}{10} - \frac{T^7}{42} + \ldots\right).$$

Lorsque m est très grand, T ou $\frac{K}{\sqrt{2m\alpha\beta}}$ est très petit, et l'on peut se contenter de prendre les premiers termes de la série.

Nous avons vu que $x = K = t\sqrt{2m\alpha\beta}$, et si l'on prend t très-petit, K sera également assez petit, et à plus forte raison T ou $\frac{K}{\sqrt{2m\alpha\beta}}$ ; et l'on verra que la probabilité P se rapproche rapidement de l'unité.

En effet, soient $\alpha = 3,5$ et $\beta = 2,5$ ; $m = 100$, il vient $K = t\sqrt{2m\alpha\beta} = t\sqrt{2\times100\times3,5\times2,5} = t\sqrt{48} = 7\,t$ environ ; et $T = \frac{K}{\sqrt{2m\alpha\beta}} = t\,\frac{\sqrt{2m\alpha\beta}}{\sqrt{2m\alpha\beta}} = t.$

Si $t=0$, il vient $K=0$, $T=0$, l'aire $=0$ et $P=0$.

Si t ou $T=0,1$ il vient $K=0,1\sqrt{48}=0,7$ environ ; en effet, etc.

$$\text{Et } P=1,1284\ldots\left(0,1 - \frac{\overline{0,1}^3}{3} + \frac{\overline{0,1}^5}{10} - \frac{\overline{0,1}^7}{42} + \ldots\right) =$$

$= 1,1284\,(0,0997001) = 0,1125$ environ.

*Page 50.* — Remplacer les lignes de 6 à 12 inclusivement par :

Soit $T=1$, d'où $K=\sqrt{48}=7$ environ et

$$P=1,1284\ldots\left(1 - \frac{1^3}{3} + \frac{1^5}{10} - \frac{1^7}{42} + \ldots\right) =$$

$$=1,1284\ldots\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \ldots\right) = 1,1284\,\frac{312}{420} = 0,8382\ldots$$

Pour $K=8$, $T=\frac{8}{\sqrt{48}}=\frac{8}{7}$ environ et

$$P = 1,1284\ldots\left[\frac{8}{7} - \frac{1}{3}\left(\frac{8}{7}\right)^3 + \frac{1}{10}\left(\frac{8}{7}\right)^5 - \frac{1}{42}\left(\frac{8}{7}\right)^7 + \ldots\right] =$$

$= 0,8745\ldots$ environ

Donc, on voit que P s'approche de l'unité.

*Page 52.* — $\int_0^T$ au lieu de $\int_0^K$. Puis $T=1$ au lieu de $K=1$. Supprimer $t=0, 143\ldots$ Mettre $P=0, 8382\ldots$ au lieu de $0, 83216$.

*Page 67.* — Commencement de l'art. 50, mettre : Le théorême de Bayes se démontre à l'aide du théorême de Bernouilli.

*Page 75.* — $10^e$ ligne mettre ($98^{bis}$) par le nº de la formule.

Et au lieu des lignes 11 à 17 mettre :

L'expression $\int_0^1 x^{m+n}\,dx = \frac{x^{m+n+1}}{m+n+1}$ et comme, page 73, x varie entre 0 et 1, lorsque $x=1$, il vient $\frac{1^{m+n+1}}{m+n+1} = \frac{1}{m+n+1} = 0$ ou indéfiniment petit pour m et n très-grands. Quand $x=0$, il vient $\frac{0^{m+n+1}}{m+n+1} = \frac{0}{m+n+1} = 0$.

Dans les 2 cas, cette dernière intégrale du second membre tend vers zéro et non vers l'unité, et par suite ne peut être négligée. On aura donc en multipliant les 2 termes de l'expression ($98^{bis}$) par 1. 2. 3... m ou par m !

$$\int_0^1 (1-x)^n x^m\,dx = \frac{n!\ m!}{1.\ 2.\ 3\ldots m\,(m+1)\ldots(m+n)} \times \frac{x^{m+n+1}}{m+n+1}$$

ou enfin $\int_0^1 x^m\,dx\,(1-x)^n = \frac{n!\ m!}{(m+n)!} \frac{x^{m+n+1}}{m+n+1}$, ou, comme $x=1$, cette intég. $= \frac{n!\ m!}{(m+n+1)!}\,1^{m+n+1} = \frac{n!\ m!}{(m+n+1)!}$ (99).

Par suite, la formule (98) devient

$$P = \frac{x^m\,dx\,(1-x)^n}{\dfrac{n!\ m!}{\overline{m+n+1}\,!}} = \frac{\overline{m+n+1}\,!}{n!\ m!}\,x^m\,dx\,(1-x)^n. \quad (100).$$

*Page 75.* — 3°. — Mettre $\overline{m+n+1}\,!$ au lieu de $\overline{m+n}\,!$

*Page 77.* — 21ᵉ et 22ᵉ lignes, à valeur de $P'$ mettre $\overline{m+n+1}\,!$ au lieu de $\overline{m+n}\,!$.

Laisser : et en remplaçant dans la formule (99), m par m+1, il vient :

Faire :

$$P' = \frac{\overline{m+n+1}\,!}{n\,!\,m\,!} \cdot \frac{n\,!\,\overline{m+1}\,!}{[(m+1)+n+1]!} = \frac{n\,!\,\overline{m+1}\,!\,\overline{m+n+1}\,!}{n\,!\,m\,!\,\overline{m+n+2}\,!}$$

$$= \frac{n\,!\,m\,!\,\overline{m+1}\,\overline{m+n+1}\,!}{n\,!\,m\,!\,\overline{m+n+2}\,!} = \frac{(m+1)\,(m+n+1)\,!}{(m+n+1)\,!\,(m+n+2)} =$$

$= \dfrac{m+1}{m+n+2}$ et en divisant par m+n les 2 termes, il vient :

$$P' = \frac{\dfrac{m}{m+n} + \dfrac{1}{m+n}}{1 + \dfrac{2}{m+n}}$$

Lorsque m et n sont très-grands, $\dfrac{1}{m+n} = 0$ et $\dfrac{2}{m+n} = 0$

et l'on obtient $P' = \dfrac{m}{m+n}$. (104).

*Page 78.* – Supprimer ce qui précède Remarque, et mettre à Remarque : Pour l'évènement B, on trouverait :

$$P'' = \frac{n}{m+n}. \quad (105).$$



